

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

XXXVIII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. IRÁN. 2007

PROBLEMA 1

Este problema se refiere a un modelo simplificado de acelerómetro diseñado para activar los airbags de un automóvil a causa de una colisión. El sistema electromecánico debe funcionar de modo que cuando la aceleración del vehículo exceda de un determinado valor, uno de los parámetros eléctricos del sistema, por ejemplo, el voltaje, en un cierto punto del circuito, sobrepasa un valor umbral, lo que determina que el airbag se active.

1.- Considere el condensador de platos paralelos representado en la figura 1. El área de cada plato es A , la distancia entre los platos d , siendo d muy pequeño comparado con las dimensiones de los platos.

Uno de los platos está en contacto con una pared a través de un muelle cuya constante elástica es k , el otro plato está fijo. Cuando la distancia entre los platos es d el muelle ni está contraído ni estirado, en otras palabras el muelle no ejerce fuerza sobre el plato.. La permitividad del medio entre los platos es ϵ_0 y la capacidad del condensador $C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$.

Sobre los platos se ponen cargas $+Q$ y $-Q$ y se permite que el sistema alcance el equilibrio. En el problema se considera que la gravedad

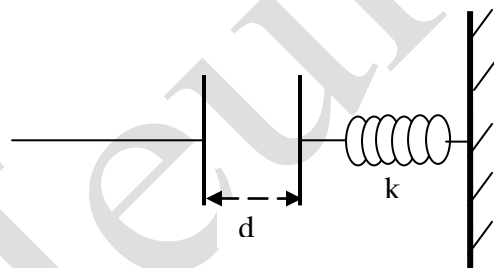


Fig.1

1.1.-Calcular la fuerza eléctrica, F_E , que ejercen entre sí los platos.

1.2.-Sea x el desplazamiento que sufre el plato ligado al muelle. Calcular x .

1.3.-En este estado ¿cuál es la diferencia de potencial eléctrico V entre los platos del condensador en función de Q , A , d y k ?

1.4.-Encontrar la relación C/C_0 en función de Q , A , d y k .

1.5.-¿Cuál es la energía, U , almacenada en el sistema en función de Q , A , d y k .

En la figura 2, la masa M está unida a un plato conductor móvil de masa despreciable y a dos muelles que poseen la misma constante elástica k . El plato conductor se puede desplazar adelante y atrás en el espacio que existe entre los otros platos que están fijos. Todos los platos son similares y tienen la misma área A . El conjunto de los tres platos constituyen dos condensadores. Tal como indica la figura 2, los platos fijos están conectados a potenciales $+V$ y $-V$ y el plato del medio a un interruptor doble. El hilo conectado al plato móvil no perturba el movimiento del plato y los tres permanecen siempre paralelos. La distancia entre los platos fijos es d y cuando el sistema está en reposo el plato móvil equidista de los fijos.

Cuando todo el dispositivo no se encuentra acelerado la distancia de cada plato fijo al móvil es, siendo d muy pequeño comparado con las dimensiones de los platos. El espesor del plato móvil es despreciable.

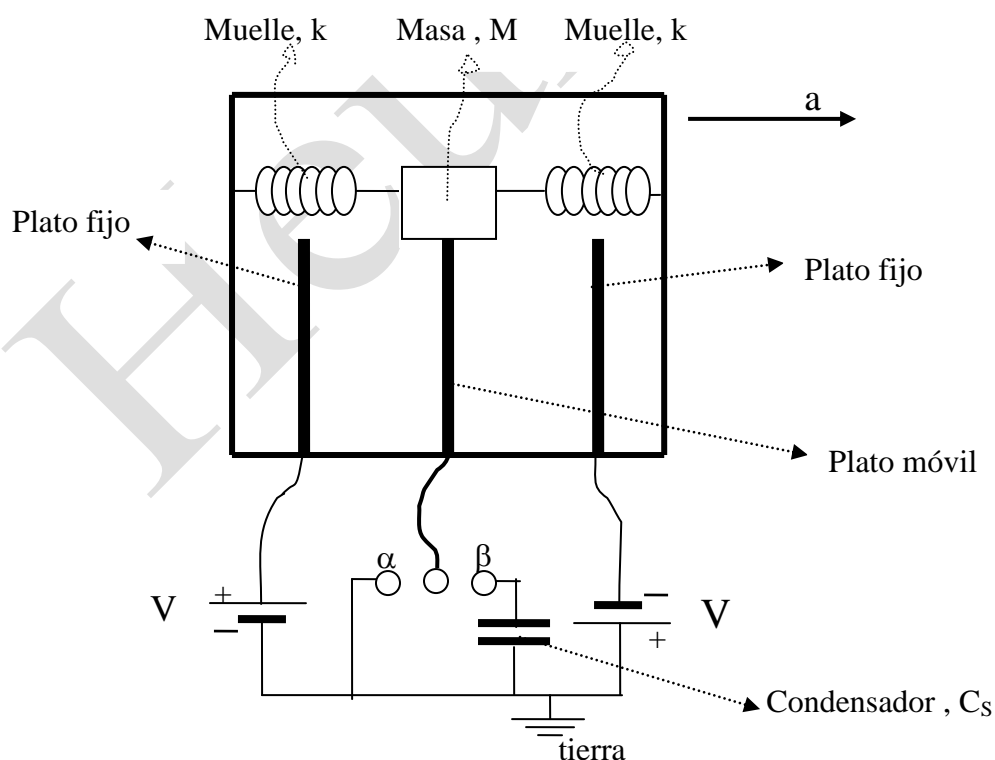


Fig.2

El interruptor puede estar en dos estados α y β . Suponer que el dispositivo está siendo acelerado con aceleración, a , constante. Admitir que durante el tiempo que dura la aceleración el muelle no oscila y todos los componentes del sistema están en posiciones de equilibrio, esto es, no se mueven uno respecto de otro y con el automóvil.

Debido a la aceleración, el plato móvil se desplaza una longitud x respecto de la posición central de los dos platos fijos.

2.-Considerar el caso en el que el interruptor esté en la posición α , esto es, el plato móvil está conectado a tierra a través del hilo.

2.1.- Encontrar la carga de cada condensador en función de x .

2.2.- Encontrar la fuerza eléctrica neta sobre el plato móvil, F_E , en función de x .

2.3.-Suponer que $d \gg x$ y los términos x^2 pueden despreciarse frente a d^2 . Simplificar la respuesta del apartado 2.2.

2.4.-Escribir la fuerza total sobre el plato móvil como $-k_{eff}$ y dar la expresión de k_{eff} .

2.5.-Expresar la aceleración constante, a , en función de x .

3.- Ahora suponemos que el interruptor se encuentra en el estado b y que el sistema se ha diseñado para que cuando el voltaje a través del condensador (C_s) alcance el valor de 0,15 V, el airbag se active. Por otra parte el airbag no se debe activar durante una frenada normal en la que la aceleración es menor que $g=9,8 \text{ m/s}^2$.

3.1.- ¿Cuál es el valor de C_s para que ocurra lo anterior?

3.2.-De nuevo suponga que $d \gg x$ y desprece los términos de orden x^2 frente a d^2 y así simplifique la respuesta del apartado 3.1

4.-Debemos ajustar los parámetros no sólo para que el airbag no se active en una frenada normal, sino que cuando ocurra una colisión se abra lo suficientemente rápido que evite que la cabeza del conductor choque contra el parabrisas o el volante.

Como se ha visto en el apartado 2.4 la fuerza ejercida por los muelles y por las cargas eléctricas sobre el plato móvil se puede representar mediante la acción de un muelle de constante elástica k_{eff} . El sistema electromecánico es similar a un sistema de masa M y muelle k_{eff} bajo la influencia de una aceleración constante a , que en este problema corresponde a la aceleración del automóvil.

Considere los siguientes valores numéricos para el problema

$D=1,0 \text{ cm}$, $A = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, $k = 4,2 \cdot 10^3 \text{ N/m}$, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
 $V = 12 \text{ V}$, $M = 0,15 \text{ kg}$

4.1.- Utilizando los datos anteriores calcule la relación de la fuerza eléctrica (ya calculada en el apartado 2.3) a la fuerza de los muelles y muestre que la fuerza eléctrica se puede despreciar por su pequeño valor frente a la fuerza de los muelles

4.2.- Si un automóvil que viaja a velocidad constante repentinamente frena con una aceleración constante a ¿cuál es el máximo desplazamiento del plato móvil?

Suponer que el interruptor ocupa la posición β y el sistema se ha diseñado para que cuando el voltaje eléctrico a través del condensador alcance el valor de $V_s = 0,15 \text{ V}$, el airbag se active. Por otra parte el airbag no se debe activar en frenadas normales cuyo valor no es superior a $g = 9,8 \text{ m/s}^2$

4.3.- ¿Cuál es el valor de C_s ?

El dispositivo debe activarse con suficiente rapidez para que la cabeza del conductor no llegue a chocar con el parabrisas o con el volante. Suponer que a consecuencia de una colisión la deceleración del automóvil alcanza el valor de $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

4.4.- *Estimar una distancia entre la cabeza del conductor y el volante y calcular el tiempo que tarda t_1 la cabeza del conductor en chocar con el volante*

4.3.- *Encontrar el tiempo t_2 que transcurre para que se active el airbag y compárelo con t_1 . ¿Se activa a tiempo el airbag? Suponer que el airbag se abre instantáneamente.*

PROBLEMA 2

Las ecuaciones de la Física son dimensionalmente homogéneas, esto quiere decir que las dimensiones del primer miembro deben ser iguales a las del segundo. No puede ser correcta una ecuación en que las dimensiones del primer miembro sean por ejemplo una longitud y las del segundo un tiempo. A veces se utiliza este hecho para deducir alguna relación física sin que el problema se haya resuelto analíticamente.

Por ejemplo, si queremos determinar el tiempo que transcurre para que un objeto situado a una altura h sobre el suelo llegue a él en el campo gravitatorio terrestre se puede argumentar que debemos buscar una expresión que incluya las cantidades h y g y que sea dimensionalmente iguala un tiempo. Por ejemplo

$t = a \left(\frac{h}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$. La solución incluye un número sin dimensiones a , que no se puede

determinar por este método, el coeficiente puede ser cualquier número real.

Este método de deducir relaciones físicas recibe el nombre de análisis dimensional.

En este método los coeficientes se consideran sin importancia y no se escriben, además en muchos casos el orden de los mismos que es 1 y por tanto el no ponerlos no cambia el orden de magnitud de las cantidades físicas. Así para el ejemplo

propuesto se escribe: $t = \left(\frac{h}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Las dimensiones de las cantidades físicas se suelen escribir en función de cuatro magnitudes : masa (M), Longitud (L) , tiempo (T) y temperatura (K). Las dimensiones de una cantidad arbitraria x se escribe $[x]$. Por ejemplo, las dimensiones de la velocidad , de la energía cinética y de la capacidad calorífica C_V se escriben : $[v] = LT^{-1}$, $[E_c] = ML^2T^{-2}$, $[C_V] = ML^2T^{-2}K^{-1}$.

1.- Constantes fundamentales y análisis dimensional

1.1.- Encontrar las dimensiones de las siguientes constantes fundamentales: La constante de Planck , h , la velocidad de la luz , c , la constante universal de gravitación , G , y la constante de Boltzmann, k_b , en función de longitud , masa, tiempo y temperatura.,

La ley de Stefan-Boltzmann establece que la energía total radiada por unidad de área y unidad de tiempo por un cuerpo negro es igual a $\sigma\theta^4$, en la que σ es la denominada constante de Stefan-Boltzmann y θ la temperatura absoluta del cuerpo negro.

1.2.- Determinar las dimensiones de la constante de Stefan-Boltzmann en función de la longitud, masa, tiempo y temperatura.

La constante de Stefan-Boltzmann no es una constante fundamental y se puede expresar en términos de las constantes universales, esto es, se puede escribir $\sigma = a h^\alpha c^\beta G^\gamma k_b^\delta$. En esta relación a es un parámetro adimensional de orden 1 y como se ha mencionado anteriormente su valor exacto no es significativo desde nuestro punto de vista, así que por ello lo haremos igual a 1.

1.3 Encontrar α , β , γ , y δ , utilizando el análisis dimensional

(1)

2.- Física de los agujeros negros

En esta parte del problema intentaremos encontrar algunas propiedades de los agujeros negros utilizando el análisis dimensional de acuerdo con un cierto teorema de la física conocido como no hair teoreme todas las características de los agujeros negros que consideramos en este problema dependen solamente de su masa. Una característica de los agujeros negros es su horizonte de sucesos. De forma aproximada, el horizonte de sucesos del agujero negro es una frontera dentro de la cual la intensidad gravitatoria es tan intensa que ni siquiera la luz pueda salir fuera de ella. Tratamos de encontrar una relación entre la masa del agujero negro, m , y el área del horizonte de sucesos, A . Esta área depende de la masa del agujero negro, de la velocidad de la luz y de la constante de gravitación universal. Como ya se hizo en 1.3 escribimos $A = G^\alpha c^\beta m^\gamma$

2.1.- Utilice el análisis dimensional para encontrar α , β y γ .

El resultado de 2.1 indica que el área del horizonte de sucesos de un agujero negro aumenta con el aumento de su masa. Desde el punto de vista clásico nada puede salir de un agujero negro y por lo tanto en todos

los procesos físicos del área del horizonte de sucesos puede solamente aumentar. Al igual, que la segunda ley de la termodinámica, Bekenstein propuso asignar una entropía S a un agujero negro, proporcional al área del horizonte de sucesos $S = \eta A$. Esta conjetura se ha hecho más plausible utilizando otros argumentos.

2.2.- Utilice la definición termodinámica de entropía $dS = dQ/\theta$ para encontrar las dimensiones de la entropía

2.3.- *Expresar la constante dimensional η en función de h , c , G , k_b*

Para el resto del problema no utilice el análisis dimensional, aunque puede utilizar los resultados que se hayan obtenido en los apartados anteriores.

3.- Radiación de Hawking

A partir de un tratamiento semicuántico, Hawking argumentó, que contrariamente al punto de vista clásico, los agujeros negros emiten radiación parecida a la de un cuerpo negro y a una temperatura que se denomina temperatura de Hawking.

3.1.- *Utilice $E = mc^2$, expresión que da la energía de un agujero negro en función de su masa, y las leyes de la termodinámica para expresar la temperatura de Hawking, θ_H , en función de la masa del agujero negro y de las constantes fundamentales. Suponga que el agujero negro no ejecuta trabajo sobre los alrededores.*

(4)

3.2.- *La masa de un agujero negro aislado cambiará debido a la radiación de Hawking. Utilice la ley de Stefan-Boltzmann para encontrar la variación de la masa del agujero negro respecto del tiempo producido por la radiación citada.*

(5)

3.3.- *Encontrar el tiempo t^* que transcurre para que un agujero negro aislado de masa m se evapore completamente, esto es, pierda su masa.*

Desde el punto de vista de la termodinámica, los agujeros negros exhiben propiedades extrañas. Por ejemplo, su capacidad calorífica es negativa.

3.4.- *Encontrar la capacidad calorífica de un agujero negro de masa m .*

4.- Agujeros negros y radiación cósmica de fondo

Considerar un agujero negro que se encuentra expuesto a la radiación cósmica de fondo. La radiación cósmica de fondo es la radiación de un cuerpo negro a una temperatura θ_b y que llena todo el universo. Un objeto que tenga un área A recibe por unidad de tiempo una energía $\sigma\theta_b^4 A$. Por lo tanto un agujero negro pierde energía debido a la radiación Hawking y la gana debido a la radiación cósmica de fondo.

4.1.- Encontrar la variación de masa con el tiempo de un agujero negro en función de su masa, la temperatura de la radiación de fondo y las constantes fundamentales.

4.2.- Existe una masa m^ para la que dm/dt se anula. Expresar m^* en función de θ_b y las constantes fundamentales.*

4.3.- Utilice el valor de θ_b obtenido en el apartado anterior y calcule dm/dt en función de m , m^ y las constantes fundamentales.*

4.4.- Encontrar la temperatura de Hawking de un agujero negro que está en equilibrio térmico con la radiación cósmica de fondo

4.5.- ¿El equilibrio es estable o inestable?

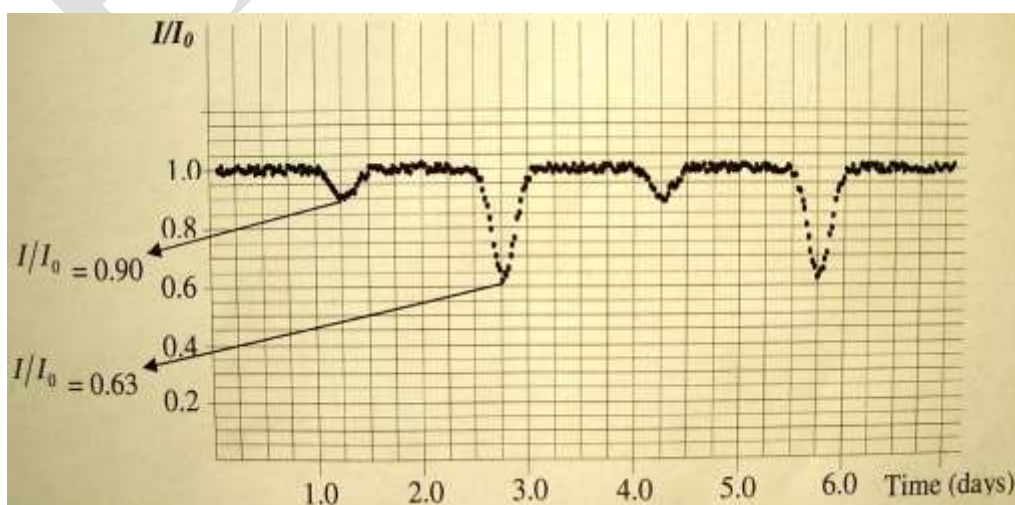
PROBLEMA 3

Un sistema binario está formado por dos estrellas que giran alrededor de su centro de masas. Aproximadamente la mitad de las estrellas de nuestra galaxia son sistemas binarios. No resulta fácil desde la Tierra detectar estos sistemas binarios, ya que la distancia entre las dos estrellas del sistema es mucho menor que su distancia a la Tierra y por ello no se pueden detectar con el telescopio. Para ello se necesita recurrir a la fotometría o espectrofotometría y observar las variaciones de la intensidad o el espectro de una estrella para decidir si es o no un sistema binario.

Fotometría de estrellas binarias

Si nosotros nos encontramos exactamente en el plano de movimiento de las dos estrellas, cuando una de ellas se oculta respecto de nosotros al situarse detrás de la que está delante, la intensidad del sistema disminuye con el tiempo. Estos sistemas binarios se llaman binarias eclípticas.

1.- Suponer que las dos estrellas describen órbitas circulares alrededor de su común centro de masas con una velocidad angular constante, ω , y nosotros nos encontramos exactamente en el plano de movimiento del sistema binario. Suponer también que las temperaturas de las estrellas son T_1 y T_2 , respectivamente, siendo $T_1 > T_2$ y sus radios R_1 y R_2 siendo $R_1 > R_2$. La intensidad total de luz medida en la Tierra está representada en la figura 1 frente al tiempo. Medidas cuidadosas indican que los mínimos de las intensidades de la luz incidente son el 90% y 60% de la intensidad máxima, I_0 , ($I_0 = 4,8 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2$) recibida en la Tierra por las dos estrellas.



1.1.- Encontrar el periodo del movimiento orbital, dando la respuesta en segundos con dos cifras significativas. ¿Cuál es la frecuencia angular del sistema en rad/s?

De forma aproximada se puede calcular la radiación de una estrella admitiendo que es la radiación de un cuerpo negro en forma de disco y con radio igual al de la estrella. Por consiguiente la potencia recibida de la estrella es proporcional a AT^4 en la que A es el área del disco y T su temperatura

1.2.- Utilice la figura 1 para determinar los cocientes R_1/R_2 y T_1/T_2

Espectrometría de sistemas binarios

En esta sección se deben calcular propiedades astronómicas de un sistema binario utilizando para ello medidas espectrométricas del sistema. Los átomos emiten o absorben radiación de determinadas longitudes de onda. Por ello el espectro de absorción de una estrella contiene líneas oscuras de absorción producidas por los átomos que se encuentran en su atmósfera.

La línea D_1 del espectro del sodio posee una longitud de onda de $5895,90 \text{ \AA}$ ($10^0 \text{ \AA} = 1 \text{ nm}$). Si examinamos en el espectro de una estrella del sistema binario, la línea D_1 , resulta que esta línea está afectada de un corrimiento debido al efecto Doppler y que lo produce por el hecho de que la estrella se está moviendo respecto de nosotros.

Cada una de las estrellas del sistema binario se desplaza con distinta velocidad respecto de nosotros y por ello es desplazamiento Doppler será diferente de una a otra estrella.

La medida del efecto Doppler requiere medidas muy precisas ya que la velocidad de las estrellas es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz.

En este problema se considera que la velocidad del centro de masas del sistema binario es mucho más pequeña que la velocidad orbital de las

estrellas. De ello se deduce que el corrimiento Doppler se debe únicamente a la velocidad orbital de las estrellas.

La tabla 1 son las medidas de las longitudes de onda observadas en la Tierra para cada una de las estrellas.

t/días	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4
$\lambda_1/\text{Å}$	5897,5	5897,7	5897,2	5896,2	5895,1	5894,3	5894,1	5894,6
$\lambda_2/\text{Å}$	5893,1	5892,8	5893,7	5896,2	5897,3	5898,7	5899,0	5898,1

t/días	2,7	3,0	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8
$\lambda_1/\text{Å}$	5895,6	5896,7	5897,3	5897,7	5897,2	5896,2	5895,0	5894,3
$\lambda_2/\text{Å}$	5896,4	5894,5	5893,1	5892,8	5893,7	5896,2	5897,4	5898,7

Nota.- No es necesario hacer una gráfica de los datos de esta tabla

2. Utilizar esta tabla

2.1.- Encontrar las velocidades orbitales de las estrellas v_1 y v_2 . No considerar efectos relativista. Velocidad de la luz, $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s

2.2.- Encuentre el cociente de las masas $\frac{m_1}{m_2}$.

2.3.- Sean r_1 y r_2 las distancias de cada una de las estrellas al centro de masas común, determinar r_1 y r_2 .

2.4.- Sea r la distancia entre las estrellas. Encontrar el valor de r .

3.- La fuerza de gravitación es la única fuerza que actúa entre las estrellas.

3.1.- Determinar la masa de cada una de las estrellas con una cifra significativa. Constante de gravitación Universal $G = 6,7 \cdot 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻²

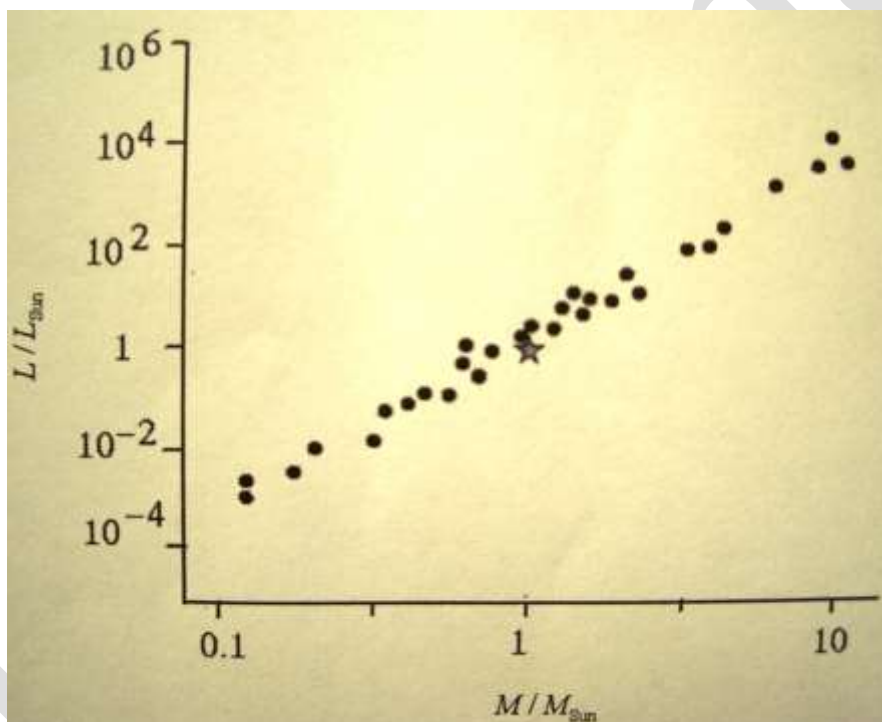
Características generales de las estrellas

4.- La mayoría de las estrellas generan energía mediante el mismo mecanismo. Existe una relación empírica entre su masa, M , y su luminosidad, L , la cual es la potencia radiante total de la estrella; esta relación se puede expresar en la forma

$$\frac{L}{L_{Sol}} = \left(\frac{M}{M_{Sol}} \right)^\alpha$$

$$M_{Sol} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} ; L_{Sol} = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

La relación se indica en la gráfica log-log de la figura inferior



La estrella que aparece en el la gráfica representa al Sol

4.1.- Encontrar α con una cifra significativa.

4.2.- Sean L_1 y L_2 las luminosidades respectivas de cada estrella del sistema binario. Encontrar los valores de L_1 y L_2 .

4.3.-Calcular la distancia d , desde la estrella a nosotros expresando el resultado en años luz. Un año luz es la distancia que recorre la luz en un año terrestre.

4.4.- ¿Cuál es la máxima distancia angular, θ , entre las estrellas a partir de nuestro punto de observación?

4.5.-¿Cuál es la menor apertura de un telescopio óptico, D , que pueda separar estas dos estrellas?

Heureka