

1.- Para elevar la temperatura en 1 K de un gas desconocido se necesita aportar 650 J de energía si se hace a volumen constante y 910 J si el proceso es a presión constante. ¿De qué gas se trata?

En el proceso a volumen constante la energía aportada aumenta la energía interna del gas,. En el proceso a presión constante se aumenta la energía libre del gas. Ambas magnitudes termodinámicas están relacionadas

$$\Delta H = \Delta U + p \Delta V \Rightarrow 910 - 650 = 260 = p \Delta V = nR \Delta T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{260}{8,31 \cdot 1} = \frac{1000}{M} \Rightarrow M = \frac{8,31 \cdot 10^3}{260} = 32$$

El gas debe ser O₂.

2.-Diez moles de un gas se encuentran a la temperatura de 293 K y a la presión de 1 atmósfera. El calor específico de este gas a volumen constante es 19,6 J/molK. A dicho gas se le suministran 10^4 J de calor a presión constante. Calcular la variación de energía interna del gas y el trabajo ejecutado.

Dado que el calor se le suministra a presión constante la variación de entalpia del proceso vale $\Delta H = 10^4$ J.

$$\Delta H = 10^4 = nC_p(T_F - T_I) = n(C_v + R)(T_F - T_I) \Rightarrow T_F = \frac{\Delta H}{n(C_v + R)} + T_I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_F = \frac{10^4}{10(19,6 + 8,3)} + 293 \approx 329\text{K}$$

$$\Delta U = nC_v(T_F - T_I) = 10 \cdot 19,6 \cdot 36 \approx 7,1 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow W = 7,1 \cdot 10^3 - 10^4 = -2,9 \cdot 10^3 \text{ J}$$

El criterio de signos utilizado es que lo que recibe el sistema es positivo y lo que desprende o ejecuta negativo.

3.- *Un recipiente cilindro se encuentra dividido en dos mitades iguales mediante un pistón que carece de masa y puede moverse sin rozamiento.*

*Ambas mitades contienen el mismo gas ideal ($C_v = 20,9 \frac{J}{mol \cdot K}$) a la presión $P = 1 atm$, $T = 300K$ y $V = 5 L$. Las paredes del cilindro así como el pistón son impermeables al calor. El gas contenido en la mitad izquierda recibe calor mediante una resistencia eléctrica alojada en esa mitad, de modo que su temperatura se eleva a $T_1 = 500K$. El pistón se desplaza y comprime al gas de la parte derecha. a) *Calcular la presión, temperatura y volumen de cada gas una vez alcanzado el equilibrio, b) determinar el calor recibido por el gas de la izquierda**

a) El gas contenido en la parte derecha se comprime adiabáticamente, hasta alcanzar una presión que designamos con ρ , siendo su temperatura T_2 y su volumen V_2 . El gas de la parte izquierda, una vez alcanzado el equilibrio, se encuentra a la presión ρ , ocupa un volumen V_1 y su temperatura es $T_1 = 500K$.

Las ecuaciones que rigen el proceso son:

$$\left. \begin{aligned} 2V &= V_1 + V_2 & (1) \\ PV^\gamma &= \rho V_2^\gamma & (2) \\ \frac{PV}{T} &= \frac{\rho V_1}{T_1} & (3) \\ \frac{PV}{T} &= \frac{\rho V_2}{T_2} & (4) \end{aligned} \right\}$$

De la ecuación (4) despejamos V_2 y lo llevamos a la (2).

$$V_2 = \frac{PVT_2}{\rho T} \Rightarrow PV^\gamma = \rho \left(\frac{PVT_2}{\rho T} \right)^\gamma \Rightarrow PV^\gamma = \rho^{1-\gamma} \frac{P^\gamma V^\gamma T_2^\gamma}{T^\gamma} \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = \rho^{1-\gamma} T_2^\gamma \quad (5)$$

De la ecuación (5) despejamos T_2 y el resultado lo llevamos a la (4)

$$\frac{PV}{T} = \frac{\rho(2V - V_1)}{\left(\frac{P^{1-\gamma} T^\gamma}{\rho^{1-\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}} \Rightarrow \frac{PV}{T} = \frac{\rho \cdot \rho^{\frac{1}{\gamma}-1} (2V - V_1)}{P^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot T} \Rightarrow P^{\frac{1}{\gamma}} V = \rho^{\frac{1}{\gamma}} (2V - V_1) \quad (6)$$

En la ecuación (6) sustituimos V_1 despejado de la (3)

$$P^{\frac{1}{\gamma}} V = \rho^{\frac{1}{\gamma}} \left(2V - \frac{PVT_1}{\rho T} \right) = 2V\rho^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{\rho^{\frac{1}{\gamma}} PVT_1}{\rho T} = 2V\rho^{\frac{1}{\gamma}} - \frac{\rho^{\frac{1}{\gamma}-1} PVT_1}{T} \Rightarrow P^{\frac{1}{\gamma}} T = 2T\rho^{\frac{1}{\gamma}} - PT_1\rho^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

La última ecuación solamente contiene como incógnita ρ , pero es necesario resolverla por tanteo. Sustituimos los valores numéricos

$$C_p - C_v = R \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_v + R}{C_v} = \frac{20,9 + 8,3}{20,9} = 1,4$$

$$300 = 2 \cdot 300 \cdot \rho^{0,714} - 500\rho^{-0,286} \Rightarrow 3 = 6\rho^{0,714} - 5\rho^{-0,286}$$

Damos valores a ρ

| | | | |
|---------------------------|-------|--------|-----------|
| $\rho = 1,5 \text{ atm}$ | 8,014 | -4,453 | 3,561 > 3 |
| $\rho = 1,3 \text{ atm}$ | 7,236 | -4,639 | 2,597 < 3 |
| $\rho = 1,4 \text{ atm}$ | 7,629 | -4,541 | 3,088 > 3 |
| $\rho = 1,38 \text{ atm}$ | 7,551 | -4,560 | 2,991 < 3 |

Tomamos como solución aproximada $\rho = 1,38 \text{ atm}$. Sustituyendo este valor en la ecuación (2)

$$1 \cdot 5^{1,4} = 1,38 \cdot V_2^{1,4} \Rightarrow V_2^{1,4} = 6,897 \Rightarrow V_2 = 3,97 \text{ L} \Rightarrow V_1 = 2 \cdot 5 - 3,97 = 6,03 \text{ L}$$

De la ecuación (4)

$$\frac{1 \cdot 5}{300} = \frac{1,38 \cdot 3,97}{T_2} \Rightarrow T_2 = 329 \text{ K}$$

b) El calor recibido por el gas de la izquierda sirve para aumentar su energía interna y realizar el trabajo de compresión sobre el segundo gas. Como se trata de un gas ideal su energía interna es solamente función de la temperatura

$$\Delta U = nC_v \Delta T = \frac{PV}{RT} C_v \Delta T = \frac{101325 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 300} 20,9 \cdot (500 - 300) = 850 \text{ J}$$

Para el gas de la derecha aplicamos el primer principio de la termodinámica

$$\Delta U_2 = Q + W$$

Como la transformación ha sido adiabática, $Q=0$, por tanto, el trabajo recibido por ese gas es igual a la variación de su energía interna y como es un gas ideal solo depende de la temperatura

$$\Delta U_2 = W = nC_v (T_2 - T) = \frac{101325 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8,3 \cdot 300} 20,9 (329 - 300) = 123 \text{ J}$$

El calor recibido es $850 + 123 = 973 \text{ J}$

4.- En un recipiente se colocan los líquidos inmiscibles tetracloruro de carbono (CCl_4) y agua (H_2O). La presión atmosférica es 1 atmósfera y a esta presión las temperaturas de ebullición para ambos líquidos son respectivamente $76,7^\circ\text{C}$ y 100°C . El recipiente se calienta de modo uniforme al baño María y la ebullición en la superficie de separación de los líquidos comienza a la temperatura de $65,5^\circ\text{C}$. Determínese en la fase vapor la relación en masa del tetracloruro de carbono al agua.

Datos. Presión de vapor del agua a $65,5^\circ\text{C} = 25,9 \text{ kPa}$

Masas atómicas $\text{C} = 12$, $\text{H} = 1$, $\text{O} = 16$, $\text{Cl} = 35,5$

Para mezclas inmiscibles se produce la ebullición cuando la presión de vapor, suma de las presiones de vapor del tetracloruro y del agua, igualan a la presión exterior

$$p_{\text{ext}} = 101,3 \text{ kPa} = 25,9 \text{ kPa} + P_{\text{CCl}_4} \Rightarrow P_{\text{CCl}_4} = 101,3 - 25,9 = 75,4 \text{ kPa}$$

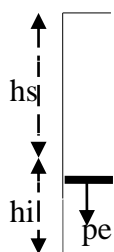
El número de moles de cada componente en la fase de vapor es directamente proporcional a las presiones de vapor

$$\frac{n(\text{CCl}_4)}{n(\text{H}_2\text{O})} = \frac{p(\text{CCl}_4)}{p(\text{H}_2\text{O})} \Rightarrow \frac{n(\text{CCl}_4) \cdot M(\text{CCl}_4)}{n(\text{H}_2\text{O}) \cdot M(\text{H}_2\text{O})} = \frac{m(\text{CCl}_4)}{m(\text{H}_2\text{O})} = \frac{p(\text{CCl}_4) \cdot M(\text{CCl}_4)}{p(\text{H}_2\text{O}) \cdot M(\text{H}_2\text{O})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m(\text{CCl}_4)}{m(\text{H}_2\text{O})} = \frac{75,4 \cdot (12 + 4 \cdot 35,5)}{25,9 \cdot (2 \cdot 1 + 16)} = 24,9$$

5.- Un cilindro vertical de sección S y cerrado por los dos extremos, lleva en su interior incorporado un émbolo que se puede desplazar hacia arriba o hacia abajo con facilidad, de esta manera el cilindro queda dividido en dos cámaras, una superior, por encima del cilindro y otra inferior por debajo del mismo. La cámara superior contiene 1 mol de gas ideal a la temperatura de 300K y en la inferior 1 mol del mismo gas y a la misma temperatura; en estas circunstancias el volumen de la cámara superior es cuatro veces mayor que el de la inferior. Se pide para qué temperatura ocurre que el volumen de la cámara superior sea tres veces el de la inferior

Cuando la temperatura es 300K, designamos a la altura de la cámara superior por h_s y la inferior por h_i , siendo sus respectivos volúmenes Sh_s y Sh_i . Designamos con p_e el peso del émbolo



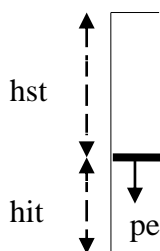
y con P_s y P_i las presiones en las dos cámaras. Aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$P_s \cdot S \cdot h_s = R \cdot 300 \quad ; \quad P_i \cdot S \cdot h_i = R \cdot 300 \Rightarrow P_s \cdot S \cdot h_s = P_i \cdot S \cdot h_i \Rightarrow P_s = P_i \frac{h_i}{h_s} = \frac{P_i}{4}$$

Se tiene que cumplir que la fuerza ejercida por el gas de la cámara superior más el peso del émbolo sea igual a la fuerza ejercida por el gas de la cámara inferior

$$P_s \cdot S + p_e = P_i \cdot S \Rightarrow p_e = S(P_i - P_s) = 3S \cdot P_s \quad (1)$$

Para la nueva temperatura T , la relación de volúmenes es 3. Las alturas de las cámaras son h_{st} y h_{it} y las presiones de los gases P_{st} y P_{it} respectivamente.



Aplicando la ecuación de los gases

$$P_{st} \cdot S \cdot h_{st} = R \cdot T \quad ; \quad P_{it} \cdot S \cdot h_{it} = R \cdot T \Rightarrow P_{st} \cdot S \cdot h_{st} = P_{it} \cdot S \cdot h_{it} \Rightarrow P_{st} = P_{it} \frac{h_{it}}{h_{st}} = \frac{P_{it}}{3}$$

Se tiene que cumplir que la fuerza ejercida por el gas de la cámara superior más el peso del émbolo es igual a la fuerza ejercida por el gas de la cámara inferior

$$P_{st} \cdot S + p_e = P_{it} \cdot S \Rightarrow p_e = S(P_{it} - P_{st}) = 2S \cdot P_{st} \quad (2)$$

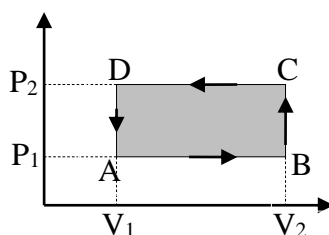
De las ecuaciones (1) y (2) se deduce: $3S \cdot P_s = 2S \cdot P_{st} \Rightarrow P_s = \frac{2}{3} P_{st}$

Se cumple la relación: $h_s + h_i = h_{st} + h_{it}$

$$h_s + h_i = h_{st} + h_{it} \Rightarrow \frac{R \cdot 300}{S \cdot P_s} + \frac{R \cdot 300}{S \cdot P_i} = \frac{R \cdot T}{S \cdot P_{st}} + \frac{R \cdot T}{S \cdot P_{it}} \Rightarrow \frac{300}{P_s} + \frac{300}{4P_s} = \frac{T}{P_{st}} + \frac{T}{3P_{st}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1500}{4P_s} = \frac{4T}{3P_{st}} \Rightarrow \frac{1500}{4 \cdot \frac{2}{3} P_{st}} = \frac{4T}{3P_{st}} \Rightarrow T = \frac{9 \cdot 1500}{32} = 421,9 \text{ K}$$

6.- Un mol de un gas ideal realiza el ciclo indicado en la figura inferior



Calcular para cada una de las transformaciones y para el ciclo completo el trabajo y el calor puesto en juego, expresando los resultados en función de los parámetros que aparecen en la figura y el coeficiente adiabático γ .

El criterio de signos utilizado es que el trabajo y el calor son positivos cuando se dan al sistema desde el exterior y son negativos cuando el sistema los proporciona al exterior.

$$W_{AB} = -P_1(V_2 - V_1) ; W_{BC} = 0 ; W_{CD} = -P_2(V_1 - V_2) ; W_{DA} = 0$$

$$W_{\text{ciclo}} = W_{AB} + W_{CD} = -P_1(V_2 - V_1) - P_2(V_1 - V_2) = (V_1 - V_2)(P_1 - P_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{\text{ciclo}} = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1)$$

El trabajo W_{AB} lo hace el sistema, el trabajo W_{CD} lo hace el exterior sobre el sistema
Según el primer principio de la termodinámica

$$\Delta H = Q_{P=\text{Cte}} = \int_{T_A}^{T_B} C_p dT = C_p(T_B - T_A)$$

Según la ecuación de los gases perfectos:

$$P_1 V_1 = RT_A \quad \Rightarrow \quad T_A = \frac{P_1 V_1}{R} ; \quad P_1 V_2 = RT_B \quad ; \quad T_B = \frac{P_1 V_2}{R}$$

Transformación AB

$$\Delta H = Q_{P=\text{Cte}} = \int_{T_A}^{T_B} C_p dT = C_p(T_B - T_A) = C_p \left(\frac{P_1 V_2}{R} - \frac{P_1 V_1}{R} \right) = \frac{C_p P_1}{R} (V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{C_p}{C_p - C_v} P_1 (V_2 - V_1) = \frac{1}{1 - \frac{C_v}{C_p}} P_1 (V_2 - V_1) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\gamma}} P_1 (V_2 - V_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_1 (V_2 - V_1)$$

Transformación BC

$$\begin{aligned}\Delta U = Q_{V=\text{cte}} &= \int_{T_B}^{T_C} C_V dT = C_V (T_C - T_B) = C_V \left(\frac{P_2 V_2}{R} - \frac{P_1 V_2}{R} \right) = \frac{C_V V_2}{R} (P_2 - P_1) = \\ &= \frac{C_V}{C_p - C_V} V_2 (P_2 - P_1) = \frac{1}{\frac{C_p}{C_V} - 1} V_2 (P_2 - P_1) = \frac{1}{\gamma - 1} V_2 (P_2 - P_1)\end{aligned}$$

Transformación CD

Por analogía con lo calculado para la transformación AB

$$\Delta H = Q_{P=\text{cte}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} P_2 (V_1 - V_2)$$

Transformación DA

Por analogía con lo calculado para la transformación BC

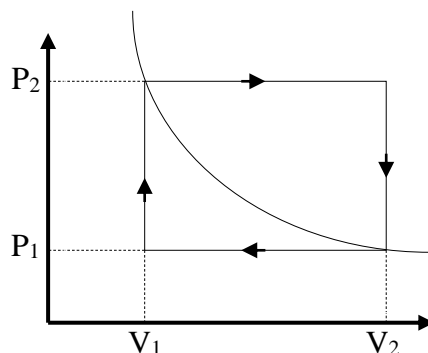
$$\Delta U = Q_{V=\text{cte}} = \frac{1}{\gamma - 1} V_1 (P_1 - P_2)$$

Para el ciclo completo

La variación de energía interna al realizar un ciclo es cero.

$$\Delta U = 0 = Q + W \Rightarrow Q = -W = -(P_2 - P_1)(V_2 - V_1) = (P_1 - P_2)(V_2 - V_1)$$

7.-Un mol de un gas perfecto describe el ciclo termodinámico indicado en la figura inferior



Los puntos de coordenadas (P_2, V_1) y (P_1, V_2) se encuentran sobre una isoterma de temperatura T_2 . Las otras temperaturas son T_1 y T_3 . Se pide el trabajo realizado en un ciclo en función de la constante R de los gases y las temperaturas T_1 y T_3 .

El trabajo se mide por el área abarcada por el ciclo

$$W = (P_2 - P_1) \cdot (V_2 - V_1) = P_2 V_2 - P_2 V_1 - P_1 V_2 + P_1 V_1 = RT_3 - RT_2 - RT_2 + RT_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = R(T_3 + T_1) - 2RT_2 \quad (1)$$

Buscamos una relación entre T_2 con T_1 y T_3

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_1}{T_2} \Rightarrow \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \quad ; \quad \frac{P_1 V_2}{T_2} = \frac{P_2 V_2}{T_3} \Rightarrow \frac{P_1}{T_2} = \frac{P_2}{T_3}$$

A partir de las últimas ecuaciones se deduce que

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3} \Rightarrow T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$$

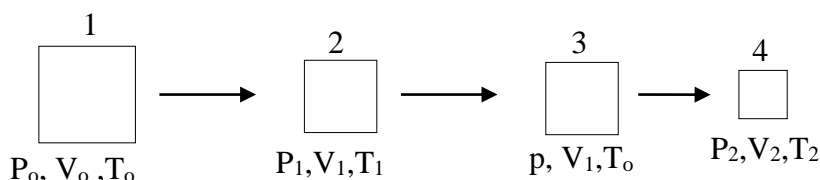
Llevando la ecuación anterior a la (1)

$$W = R(T_3 + T_1) - 2R\sqrt{T_1 T_3} = R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_3})^2$$

8.-Se utilizan dos compresores para elevar la presión de un gas diatómico, para el que $C_v = \frac{5}{2}R$, de la forma siguiente:

El primer compresor reduce el volumen inicial de gas V_o hasta un volumen intermedio V_1 , después el gas comprimido se enfría a volumen constante hasta adquirir la temperatura inicial T_o , a continuación trabaja el segundo compresor que reduce el volumen del gas hasta V_2 . a) Calcular para que valor de V_1 expresado en función de V_o y V_2 , el trabajo total realizado por los compresores es el mínimo posible y cuál es su valor. b) Calcular también el trabajo que realiza cada compresor en el caso anterior.

a) El esquema de bloques inferior nos indica cómo es el proceso



De 1 a 2 se trata de un proceso adiabático en el que no hay intercambio de calor

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U = W \Rightarrow W_1 = nC_v(T_1 - T_o) \quad (1)$$

De 3 a 4 el proceso también es adiabático

$$W_2 = nC_v(T_2 - T_o) \quad (2)$$

El trabajo total es la suma de W_1 y W_2 .

La transformación de (1) a (2) es adiabática y combinando la ecuación de la adiabática $PV^\gamma = \text{Cte}$, y de los gases perfectos

$$P_o V_o^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow \frac{P_o}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_o}\right)^\gamma \quad ; \quad \frac{P_o V_o}{T_o} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \Rightarrow \frac{P_o}{P_1} = \frac{V_1 T_o}{V_o T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_o}\right)^\gamma = \frac{V_1 T_o}{V_o T_1} \Rightarrow \frac{T_o}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_o}\right)^{\gamma-1}$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$W_1 = n C_v \left[T_o \left(\frac{V_o}{V_1} \right)^{\gamma-1} - T_o \right] = n C_v T_o \left[\left(\frac{V_o}{V_1} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \quad (4)$$

Para el proceso de 3 a 4 el cálculo es análogo

$$W_2 = n C_v T_o \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \quad (5)$$

El trabajo total:

$$W_T = n C_v T_o \left[\left(\frac{V_o}{V_1} \right)^{\gamma-1} + \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 2 \right]$$

De la expresión anterior se deduce que para que el trabajo sea mínimo, lo que está dentro del paréntesis cuadrado debe de ser mínimo. Para calcular este mínimo derivamos la expresión del paréntesis cuadrado respecto de V_1 e igualamos a cero.

$$\begin{aligned} & \frac{-V_o^{\gamma-1}(\gamma-1)V_1^{\gamma-2}}{[(V_1)^{\gamma-1}]^2} + \frac{V_2^{\gamma-1}(\gamma-1)V_1^{\gamma-2}}{[(V_2)^{\gamma-1}]^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & \frac{[-V_o^{\gamma-1}(\gamma-1)V_1^{\gamma-2}][(V_2)^{\gamma-1}]^2 + [V_2^{\gamma-1}(\gamma-1)V_1^{\gamma-2}][(V_1)^{\gamma-1}]^2}{[(V_1)^{\gamma-1}]^2[(V_2)^{\gamma-1}]^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & [V_o^{\gamma-1}V_1^{\gamma-2}][(V_2)^{\gamma-1}]^2 = [V_2^{\gamma-1}V_1^{\gamma-2}][(V_1)^{\gamma-1}]^2 \Rightarrow [V_o^{\gamma-1}][(V_2)^{\gamma-1}] = [(V_1)^{\gamma-1}]^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow & (V_o^{\gamma-1})(V_2^{\gamma-1}) = (V_1)^{\gamma-1} \cdot (V_1)^{\gamma-1} \Rightarrow V_o V_2 = V_1^2 \Rightarrow V_1 = \sqrt{V_o V_2} \quad (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo esta última ecuación en el trabajo total tendremos el trabajo mínimo

$$\begin{aligned} W_T &= n C_v T_o \left[\frac{V_o^{\gamma-1}}{(V_o V_2)^{\frac{\gamma-1}{2}}} + \frac{(V_o V_2)^{\frac{\gamma-1}{2}}}{V_2^{\gamma-1}} - 2 \right] = n C_v T_o \left[\frac{\frac{\gamma-1}{V_o^{\frac{\gamma-1}{2}}} + \frac{\gamma-1}{V_o^{\frac{\gamma-1}{2}}}}{\frac{\gamma-1}{V_2^{\frac{\gamma-1}{2}}} + \frac{\gamma-1}{V_2^{\frac{\gamma-1}{2}}} - 2} \right] = \\ &= n C_v T_o \left[\frac{\frac{\gamma-1}{2V_o^{\frac{\gamma-1}{2}}}}{\frac{\gamma-1}{V_2^{\frac{\gamma-1}{2}}} - 2} \right] = n T_o \frac{5}{2} R \left[2 \left(\frac{V_o}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 2 \right] = 5 P_o V_o \left[\left(\frac{V_o}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

b) En las ecuaciones (4) y (5) sustituimos la (3)

$$W_1 = n C_v T_o \left[\frac{V_o^{\gamma-1}}{[V_o V_2]^{\frac{\gamma-1}{2}}} - 1 \right] = n C_v T_o \left[\left(\frac{V_o}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]$$

$$W_2 = n C_v T_o \left[\frac{[V_o V_2]^{\frac{\gamma-1}{2}}}{V_2^{\gamma-1}} - 1 \right] = n C_v T_o \left[\left(\frac{V_o}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} - 1 \right]$$

Los trabajos de ambos compresores son iguales.

9.- Dos gases ideales, uno monoatómico y el otro diatómico, están mezclados para formar un gas de comportamiento ideal. La ecuación que rige un proceso adiabático de esta mezcla de gases es : PV^χ , donde $\chi = \frac{11}{7}$. Sean n_1 el número de moles del gas monoatómico y n_2 del gas

diatómico en la mezcla. Determinar la relación $\frac{n_1}{n_2}$.

Imaginemos que los gases están en compartimientos diferentes, separados por un tabique pero a la misma presión P y temperatura T , el gas monoatómico ocupa un volumen V_1 y el diatómico V_2 . Luego, se rompe el tabique de separación y los gases se mezclan. Al ser gases de comportamiento ideal el volumen resultante es la suma de V_1+V_2 .

Designaremos respectivamente los calores específicos de cada gas a volumen y presión constante, como: $C_V(1)$; $C_P(1)$ y $C_V(2)$; $C_P(2)$.

Teniendo en cuenta que la energía interna y la entalpía son magnitudes extensivas, la energía interna de la mezcla es la suma de las energías internas de cada gas y la entalpía es la suma de las entalpías de cada gas.

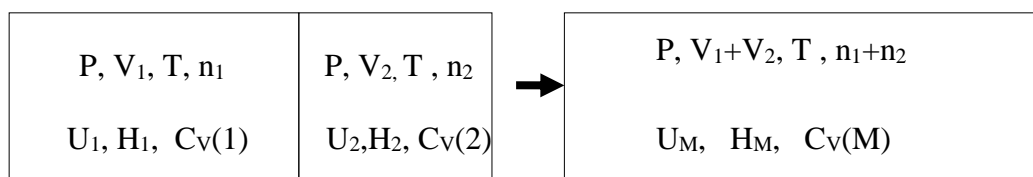


Fig.1

La energía interna de cada uno de los gases es:

$$U_1 = n_1 C_V(1) \cdot (T - T_o) ; U_2 = n_2 C_V(2) \cdot (T - T_o)$$

Siendo T , la temperatura del gas y T_o la temperatura de referencia a la cual se la da el valor nulo a la energía interna .

Designando como $C_V(M)$ al calor específico a volumen constante de la mezcla y con U_M a su energía interna, resulta:

$$U_M = (n_1 + n_2) C_V(M) \cdot (T - T_o)$$

$$n_1 C_V(1) \cdot (T - T_o) + n_2 C_V(2) \cdot (T - T_o) = (n_1 + n_2) C_V(M) \cdot (T - T_o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_V(M) = \frac{n_1 C_V(1) + n_2 C_V(2)}{n_1 + n_2} \quad (1)$$

La entalpía de cada uno de los gases es:

$$H_1 = n_1 C_P(1) \cdot (T - T_x) ; H_2 = n_2 C_P(2) \cdot (T - T_x)$$

Siendo T , la temperatura del gas y T_X la temperatura de referencia a la cual se le da el valor nulo de la entalpía. Designamos con $C_p(M)$ al calor específico a presión constante de la mezcla.

La entalpía de la mezcla $H_M = (n_1 + n_2)C_p(M) \cdot (T - T_X)$

$$n_1 C_p(1) \cdot (T - T_X) + n_2 C_p(2) \cdot (T - T_X) = (n_1 + n_2) C_p(M) \cdot (T - T_X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_p(M) = \frac{n_1 C_p(1) + n_2 C_p(2)}{n_1 + n_2} \quad (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) por la (1)

$$\frac{C_p(M)}{C_v(M)} = \chi = \frac{11}{7} = \frac{n_1 C_p(1) + n_2 C_p(2)}{n_1 C_v(1) + n_2 C_v(2)} \quad (3)$$

Para los gases ideales se cumple: $C_p - C_v = R$, y además para los gases monoatómicos

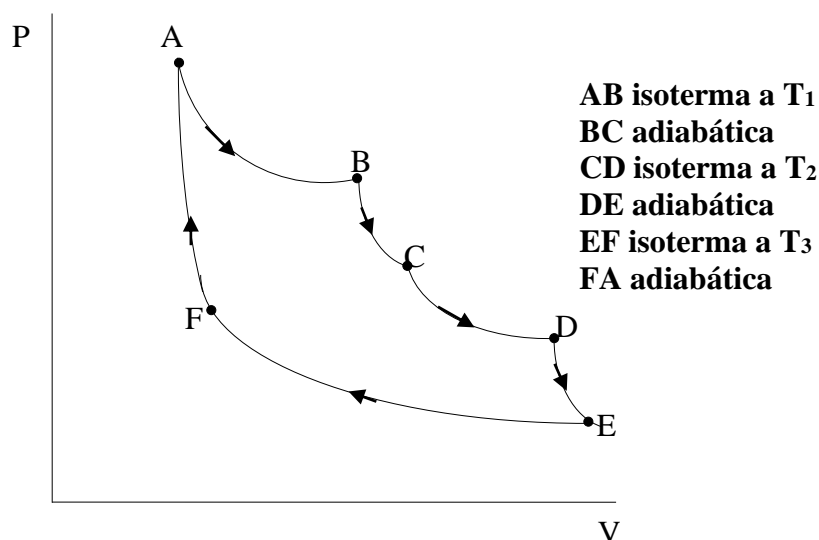
$C_v = \frac{3}{2}R$ y para los diatómicos, $C_v = \frac{5}{2}R$, por lo que la ecuación (3) queda así:

$$\frac{C_p(M)}{C_v(M)} = \chi = \frac{11}{7} = \frac{n_1 C_p(1) + n_2 C_p(2)}{n_1 C_v(1) + n_2 C_v(2)} = \frac{n_1 R + n_1 C_v(1) + n_2 R + n_2 C_v(2)}{n_1 C_v(1) + n_2 C_v(2)} \Rightarrow$$

$$\frac{11}{7} = \frac{n_1 R + n_1 \frac{3}{2}R + n_2 R + n_2 \frac{5}{2}R}{n_1 \frac{3}{2}R + n_2 \frac{5}{2}R} = \frac{n_1 \frac{5}{2} + n_2 \frac{7}{2}}{n_1 \frac{3}{2} + n_2 \frac{5}{2}} = \frac{\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{7}{2}}{\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{11}{7} = \frac{5 \frac{n_1}{n_2} + 7}{3 \frac{n_1}{n_2} + 5} \Rightarrow 33 \frac{n_1}{n_2} + 55 = 35 \frac{n_1}{n_2} + 49 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = 3$$

10.-Un gas perfecto realiza un ciclo termodinámico compuesto de isotermas y adiabáticas, tal como indica la figura. Las isotermas se verifican a las temperaturas T_1 , T_2 y T_3 . En cada expansión isoterma la relación de volúmenes final e inicial es: $V_{Final} = \beta V_{Inicial}$. Calcular el rendimiento termodinámico del citado ciclo.



El primer principio lo escribimos $\Delta U = Q + W$, por tanto los valores positivos de Q y W indican que el calor y el trabajo se dan al sistema desde el exterior, y los valores negativos que los cede el sistema a los alrededores.

Isoterma AB

$$W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = - \int_{V_A}^{V_B} \frac{R T_1}{V} dV = -R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\Delta U_{AB} = 0 = Q_{AB} + W_{AB} \Rightarrow Q_{AB} = R T_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$$

Q_{AB} es positivo pues $V_B > V_A$ y el \ln resulta positivo.

Adiabática BC

$$\Delta U_{BC} = C_V (T_2 - T_1) = Q_{BC} + W_{BC} \Rightarrow W_{BC} = C_V (T_2 - T_1)$$

Isoterma CD

$$W_{CD} = - \int_{V_C}^{V_D} P dV = - \int_{V_C}^{V_D} \frac{R T_2}{V} dV = -R T_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

$$\Delta U_{CD} = 0 = Q_{CD} + W_{CD} \Rightarrow Q_{CD} = R T_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

Q_{CD} es positivo pues $V_D > V_C$ y el \ln resulta positivo

Adiabática DE

$$\Delta U_{DE} = C_V (T_3 - T_2) = Q_{DE} + W_{DE} \Rightarrow W_{DE} = C_V (T_3 - T_2)$$

Isoterma EF

$$W_{EF} = - \int_{V_E}^{V_F} P dV = - \int_{V_E}^{V_F} \frac{R T_3}{V} dV = -R T_3 \ln \frac{V_F}{V_E}$$

$$\Delta U_{EF} = 0 = Q_{EF} + W_{EF} \Rightarrow Q_{EF} = R T_3 \ln \frac{V_F}{V_E}$$

Siendo Q_{EF} un calor negativo y por lo tanto cedido, al ser $V_F < V_E$ es el \ln negativo.

Adiabática FA

$$\Delta U_{FA} = C_V (T_3 - T_1) = Q_{FA} + W_{FA} \Rightarrow W_{FA} = C_V (T_3 - T_1)$$

La suma de los trabajos efectuados durante el ciclo

$$W = -RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} - RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} - RT_3 \ln \frac{V_F}{V_E} + C_V (T_2 - T_1) + C_V (T_3 - T_2) + C_V (T_1 - T_3) \Rightarrow$$

$$W = -RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} - RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C} - RT_3 \ln \frac{V_F}{V_E}$$

Los calores recibidos por el sistema son solo los que tienen signo positivo

$$Q = RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}$$

La relación entre los volúmenes es: $V_B = \beta V_A$; $V_D = \beta V_C$

Para calcular la relación entre V_E y V_F , supongamos un ciclo que comienza en C sigue por D y E, luego por la isoterma EF hasta un punto X de esa isoterma y se cierra por una adiabática entre X y C. Entre E y X es una compresión, el volumen en X es menor que en E, por tanto: $V_E = \beta V_X$, entre X y F también es una compresión, por lo que

$$V_X = \beta V_F \Rightarrow \frac{V_E}{\beta} = \beta V_F \Rightarrow V_E = \beta^2 V_F$$

Llevando estas relaciones de los volúmenes a la ecuación del trabajo

$$W = -R T_1 \ln \beta - R T_2 \ln \beta - RT_3 \ln \frac{1}{\beta^2} = -R \ln \beta (T_1 + T_2 - 2T_3)$$

El rendimiento del ciclo es el cociente entre el trabajo y el calor recibido. El signo menos que aparece en la expresión anterior indica el trabajo realizado por el ciclo sobre los alrededores

$$\eta = \frac{R \ln \beta (T_1 + T_2 - 2T_3)}{RT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + RT_2 \ln \frac{V_D}{V_C}} = \frac{R \ln \beta (T_1 + T_2 - 2T_3)}{RT_1 \ln \beta + RT_2 \ln \beta} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 + T_2} - \frac{2T_3}{T_1 + T_2} = 1 - \frac{2T_3}{T_1 + T_2}$$