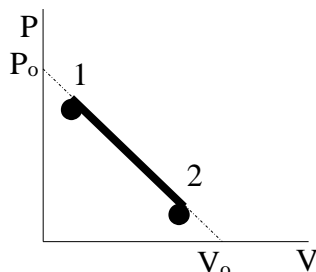


11.-Un mol de un gas ideal monoatómico ($C_V = 3/2 R$) ejecuta un proceso desde 1 a 2 tal como se indica en el esquema inferior.



a) Encontrar la máxima temperatura del gas durante el citado proceso.

b) Determinar para qué valor del volumen, Q es máximo.

c) Dibujar las gráficas $T-V$ y $Q-V$ cuando $P_0 = 10 \text{ atm}$, $V_0 = 20 \text{ L}$, $P_1 = 8 \text{ atm}$ y $P_2 = 2 \text{ atm}$.

a) Designamos con P_x, V_x y T_x a las variables del gas para un punto cualquiera comprendido entre 1 y 2. De la figura 1 se deduce:

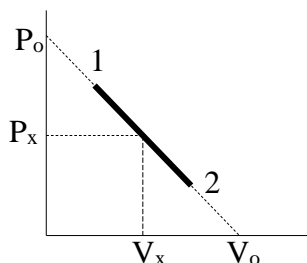


Fig.1

$$\frac{P_0}{V_0} = \frac{P_0 - P_x}{V_x} \Rightarrow \frac{P_0}{V_0} V_x = P_0 - P_x \quad (1)$$

De acuerdo con la ecuación de los gases perfectos $P_x V_x = RT_x$. Sustituyendo en (1)

$$\frac{P_0}{V_0} V_x = P_0 - \frac{RT_x}{V_x} \Rightarrow \frac{P_0}{V_0} V_x^2 = P_0 V_x - RT_x \Rightarrow T_x = \frac{P_0 V_x}{R} - \frac{P_0}{V_0} \frac{V_x^2}{R} \quad (2)$$

Como nos piden la temperatura máxima derivamos la ecuación anterior respecto de V_x e igualamos a cero.

$$\frac{dT_x}{dV_x} = \frac{P_o}{R} - \frac{2P_o}{V_o R} V_x = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2V_x}{V_o} = 0 \Rightarrow V_x = \frac{V_o}{2}$$

$$T_x = \frac{P_o V_x}{R} - \frac{P_o}{V_o} \frac{V_x^2}{R} = \frac{P_o V_o}{2R} - \frac{P_o}{V_o} \frac{V_o^2}{4R} \Rightarrow T_x = \frac{P_o V_o}{4R}$$

El valor de la presión es:

$$P_x = \frac{RT_x}{V_x} = \frac{R \frac{P_o V_o}{4R}}{\frac{V_o}{2}} = \frac{P_o}{2}$$

En el punto medio de los valores P_o y V_o se produce la temperatura máxima.

b) Calculamos cómo evoluciona Q en función de la presión, para ello hacemos uso del primer principio de la Termodinámica, escrito en la forma $\Delta U = Q + W$, lo que supone que si Q y W son positivos los recibe el sistema y si son negativos los emite el sistema a los alrededores.

$$W = -\int P_x dV_x$$

Volviendo a la figura 1.

$$\frac{P_o}{V_o} = \frac{P_o - P_x}{V_x} \Rightarrow V_x = \frac{(P_o - P_x)V_o}{P_o} = 1 - \frac{P_x V_o}{P_o} \Rightarrow dV_x = -\frac{V_o}{P_o} dP_x$$

$$W = -\int P_x dV_x = +\int P_x \frac{V_o}{P_o} dP_x = \frac{V_o}{P_o} \frac{P_x^2}{2} + \text{Cte}; \quad \text{cuando } P_x = P_1 \rightarrow W = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Cte} = -\frac{V_o}{P_o} \frac{P_1^2}{2} \Rightarrow W = \frac{V_o}{2P_o} (P_x^2 - P_1^2)$$

Para un gas perfecto

$$\Delta U = C_v (T_x - T_1) = \frac{3}{2} R \left(\frac{P_x V_x}{R} - \frac{P_1 V_1}{R} \right) = \frac{3}{2} (P_x V_x - P_1 V_1) = Q + \frac{V_o}{2P_o} (P_x^2 - P_1^2) \Rightarrow$$

$$Q = \frac{3}{2} (P_x V_x - P_1 V_1) - \frac{V_o}{2P_o} (P_x^2 - P_1^2) = \frac{3}{2} \left(P_x \frac{(P_o - P_x)V_o}{P_o} - P_1 V_1 \right) - \frac{V_o}{2P_o} (P_x^2 - P_1^2) \Rightarrow$$

$$Q = \frac{3}{2} \left[P_x V_o \left(1 - \frac{P_x}{P_o} \right) - P_1 V_1 \right] - \frac{V_o}{2P_o} (P_x^2 - P_1^2) \quad (3)$$

Para calcular el valor máximo de Q derivamos la expresión anterior respecto de P_x e igualamos a cero.

$$\frac{dQ}{dP_x} = \frac{3}{2} \left[P_x V_0 \left(-\frac{1}{P_0} \right) + \left(1 - \frac{P_x}{P_0} \right) V_0 \right] - \frac{V_0}{2P_0} 2P_x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \left(-\frac{P_x V_0}{P_0} + V_0 - \frac{P_x V_0}{P_0} \right) = \frac{P_x V_0}{P_0} \Rightarrow \frac{3}{2} V_0 = \frac{4P_x V_0}{P_0} \Rightarrow P_x = \frac{3}{8} P_0$$

Para hallar el volumen sustituimos en la ecuación (1)

$$\frac{P_0}{V_0} V_x = P_0 - P_x \Rightarrow \frac{P_0}{V_0} V_x = P_0 - \frac{3P_0}{8} = \frac{5P_0}{8} \Rightarrow V_x = \frac{5V_0}{8}$$

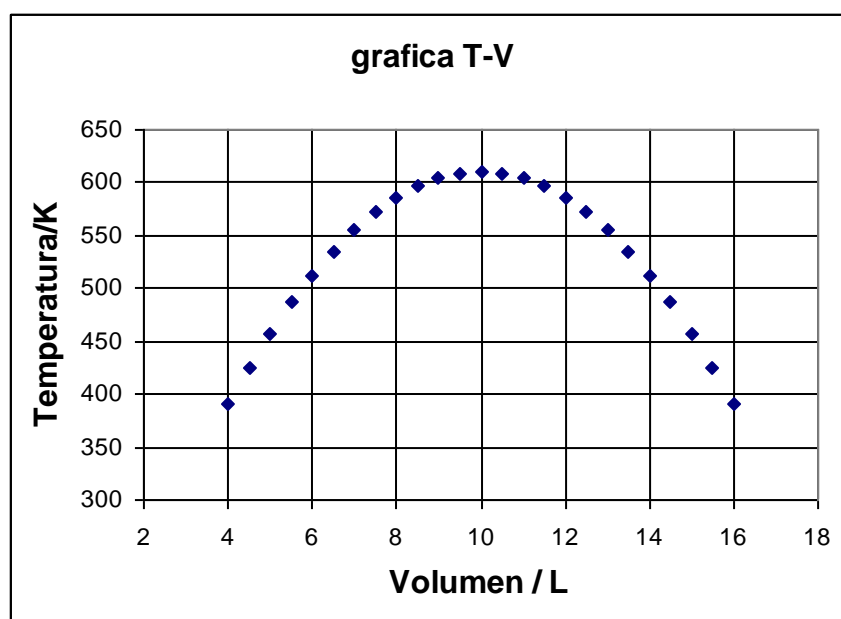
Para hallar la temperatura aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$T_x = \frac{P_x V_x}{R} = \frac{\frac{3P_0}{8} \cdot \frac{5V_0}{8}}{R} = \frac{15P_0 V_0}{64R}$$

c) Para construir la gráfica T frente a V, recurrimos a la ecuación (2).

$$T_x = \frac{P_0 V_x}{R} - \frac{P_0}{V_0} \frac{V_x^2}{R} = \frac{10 \cdot V_x}{0,082} - \frac{10}{20 \cdot 0,082} V_x^2 = 122 V_x - 6,1 V_x^2$$

El intervalo de V_x se obtiene aplicando la ecuación (1), resulta: para $P_1 = 8 \text{ atm}$, $V_1 = 4 \text{ L}$ y para $P_2 = 2 \text{ atm}$, $V_2 = 16 \text{ L}$



Para construir la gráfica Q frente a V, recurrimos a la ecuación (3).

$$Q = \frac{3}{2} \left[P_x V_o \left(1 - \frac{P_x}{P_o} \right) - P_1 V_1 \right] - \frac{V_o}{2P_o} (P_x^2 - P_1^2) = \frac{3}{2} \left[P_x V_o - \frac{P_x^2 V_o}{P_o} - P_1 V_1 \right] - \frac{V_o P_x^2}{2P_o} + \frac{V_o P_1^2}{2P_o}$$

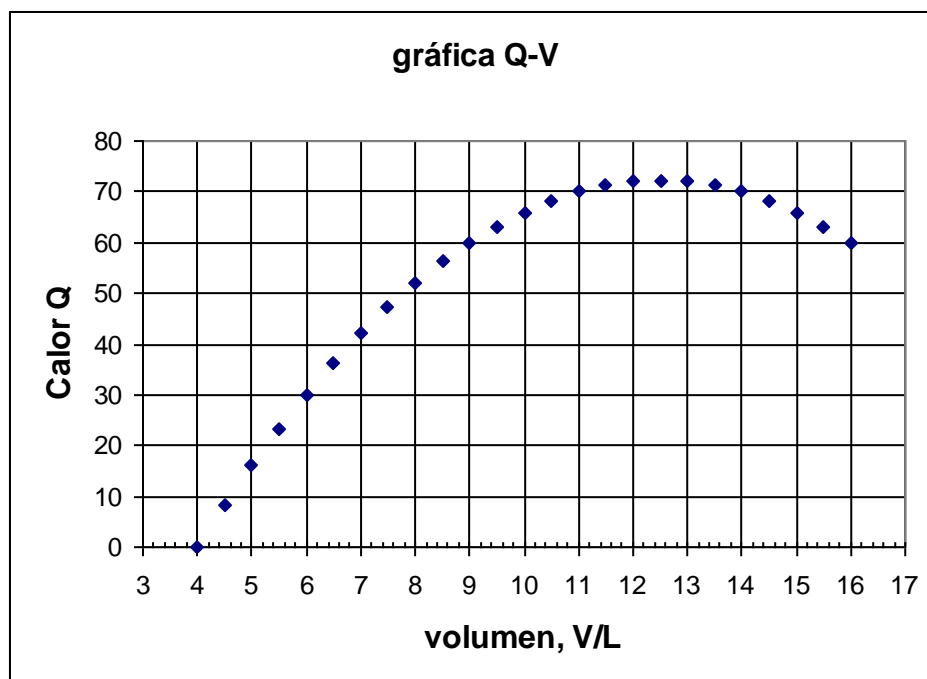
$$Q = \frac{3}{2} [20P_x - 2P_x^2 - 32] - P_x^2 + 64 = 30P_x - 4P_x^2 + 16$$

A partir de la ecuación (1);

$$\frac{P_o}{V_o} V_x = P_o - P_x \Rightarrow P_x = P_o \left(1 - \frac{V_x}{V_o} \right) = 10 \left(1 - \frac{V_x}{20} \right) = 10 - \frac{V_x}{2}$$

Sustituyendo en Q

$$Q = 30 \left(10 - \frac{V_x}{2} \right) - 4 \left(100 + \frac{V_x^2}{4} - 10V_x \right) + 16 = -84 + 25V_x - V_x^2$$



12.-Un mol de gas perfecto con coeficiente adiabático γ se expansionó de forma reversible según la ley $p = kV$, donde k es una constante. El volumen inicial del gas es V_0 . Como resultado de la expansión el volumen final alcanzado por el gas es nV_0 . a) Calcular: a) el incremento de energía interna del gas. b) El trabajo realizado por dicho gas. c) Su capacidad calorífica molar para este proceso.

a) Calculamos la presión, volumen y temperatura del gas al principio y al final de la expansión:

Inicial: $p_0 = kV_0$, V_0 , T_0 ; Final: $p_f = kV_f = knV_0$, $V_f = nV_0$,

Para calcular la temperatura final aplicamos la ley de los gases perfectos

$$\frac{kV_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{knV_0 \cdot nV_0}{T_f} \Rightarrow T_f = n^2 T_0$$

La variación de energía interna para un gas perfecto es:

$$\Delta U = C_v(T_f - T_0) = C_v(n^2 T_0 - T_0) = C_v T_0 (n^2 - 1)$$

Para un gas ideal $C_p - C_v = R$; $\frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

$$\Delta U = C_v T_0 (n^2 - 1) = \frac{RT_0}{\gamma - 1} (n^2 - 1) = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1} (n^2 - 1) = \frac{kV_0^2}{\gamma - 1} (n^2 - 1)$$

$$b) \quad W = - \int_{V_0}^{V_f} P_{\text{ext}} dV = - \int_{V_0}^{V_f} P_{\text{gas}} dV = - \int_{V_0}^{nV_0} kV dV = -k \left[\frac{n^2 V_0^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} \right] = \frac{kV_0^2}{2} (1 - n^2)$$

dado que $n > 1$, W es negativo, lo cual indica que el trabajo lo realiza el sistema al exterior.

c) A partir del primer principio $\Delta U = Q + W$, utilizando como criterio de signos que Q y W son positivos cuando sobre el sistema y desde el exterior se aporta trabajo o calor

$$Q = \Delta U - W = \frac{kV_0^2}{\gamma - 1} (n^2 - 1) - \frac{kV_0^2}{2} (1 - n^2) = kV_0^2 (n^2 - 1) \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = kV_0^2 (n^2 - 1) \left(\frac{2 + \gamma - 1}{2(\gamma - 1)} \right) = kV_0^2 (n^2 - 1) \left(\frac{1 + \gamma}{2(\gamma - 1)} \right)$$

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{\frac{kV_o^2}{2}(n^2 - 1)\left(\frac{1+\gamma}{\gamma-1}\right)}{n^2T_o - T_o} = \frac{kV_o^2}{2T_o}\left(\frac{1+\gamma}{\gamma-1}\right)$$

Para un gas perfecto: $PV = RT \Rightarrow p_o V_o = RT_o \Rightarrow kV_o^2 = RT_o$

$$C = \frac{kV_o^2}{2T_o}\left(\frac{1+\gamma}{\gamma-1}\right) = \frac{R}{2}\left(\frac{1+\gamma}{\gamma-1}\right)$$

13.-Un gas perfecto contiene n moles. Dicho gas se enfría a volumen constante y a continuación se expande a presión constante hasta que su temperatura es igual a la inicial y su presión varió k veces la inicial. Se pide el cambio de entropía que ocurre en el proceso total.

Designamos con P_1 , V_1 y T_1 las condiciones iniciales del gas (estado 1). Al enfriarlo isocóricamente (estado 2) sus variables son P_2, V_1, T_2 , después del proceso isobárico, las coordenadas termodinámicas del gas son: $P_3 = P_2 = \frac{P_1}{k}$, V_3 , T_1 (estado 3).

El proceso del estado 1 al estado 2 se produce con variación de la presión y de la temperatura

De acuerdo con el primer principio $dU = \delta Q + \delta W$. Recordando que $dS = \frac{\delta Q}{T}$, y $\delta W = -pdV = -\frac{RT}{V}dV$, resulta:

$$dU = TdS - RT \frac{dV}{V} = C_v dT \Rightarrow dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$$

Aplicando la ecuación anterior para el proceso del estado 1 al 2.

$$S_2 - S_1 = nC_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1)$$

El proceso del estado 2 al estado 3 se produce con variación de la temperatura y del volumen.

$$dU = TdS - pdV = C_v dT ; \quad TdS - \frac{RT}{V}dV = C_v dT \Rightarrow dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V}$$

Aplicando la ecuación anterior para el proceso del estado 2 al 3.

$$S_3 - S_2 = nC_v \ln \frac{T_3}{T_2} + nR \ln \frac{V_3}{V_2} \quad (2)$$

Sumamos las ecuaciones (1) y (2).

$$S_3 - S_1 = n \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{T_3}{T_2} + R \ln \frac{V_3}{V_2} \right) \quad (3)$$

Según la ley de los gases perfectos

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_1}{k P_1} = \frac{1}{k} \quad \text{y} \quad \frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{T_3} = \frac{\frac{P_1}{k} V_3}{T_1} \Rightarrow V_3 = k V_1$$

Sustituyendo en la ecuación (3)

$$S_3 - S_1 = n \left(C_v \ln \frac{1}{k} + R \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v \ln \frac{T_1}{T_2} + R \ln \frac{k V_1}{V_2} \right)$$

$$S_3 - S_1 = n R \left(\ln \frac{V_2}{V_1} - \ln \frac{V_2}{k V_1} \right) = n R \ln k$$

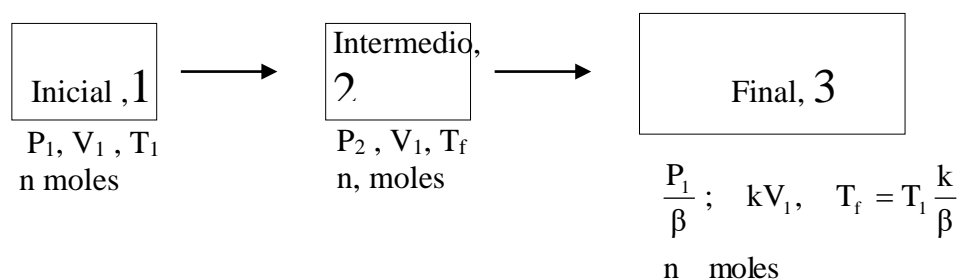
14.-Calcular el aumento de entropía de n moles de un gas perfecto cuyo exponente adiabático es γ , si el gas sufre un proceso por el que su volumen aumentó k veces y su presión disminuyó β veces.

Hacer el cálculo para $n = 2$ moles, $\gamma = 1,30$, $k = 2$, $\beta = 3$.

En el estado inicial, las coordenadas del gas son: P_1 , V_1 y T_1 y en el estado final $\frac{P_1}{\beta}$, kV_1 ; T_f . La relación entre ambos estado es:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{\frac{P_1}{\beta} \cdot k V_1}{T_f} \Rightarrow T_f = T_1 \frac{k}{\beta}$$

Para calcular el aumento de entropía podemos establecer caminos entre el estado inicial y el final ya que la entropía es función de estado y no depende del camino seguido sino del estado inicial y final.



Desde el estado 1 al 2 el gas evoluciona cambiando su presión y temperatura y manteniendo constante su volumen

De acuerdo con el primer principio $dU = \delta Q_R + \delta W$. Recordando que $dS = \frac{\delta Q_R}{T}$, y $\delta W = -p dV = -\frac{RT}{V} dV$, resulta:

$$dU = T dS - RT \frac{dV}{V} = C_v dT \Rightarrow dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \quad (1)$$

Para un mol de gas

$$PV = RT \Rightarrow P dP + V dV = R dT \Rightarrow \frac{P dP}{PV} + \frac{V dV}{PV} = \frac{R}{PV} dT \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = C_v \frac{dT}{T} + R \left(\frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right) = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad (2)$$

Aplicamos la ecuación (2) para n moles de gas entre los estados 1 y 2.

$$S_2 - S_1 = nC_p \ln \frac{T_f}{T_1} - nR \ln \frac{P_2}{P_1} = nC_p \ln \frac{T_1 \frac{k}{\beta}}{T_1} - nR \ln \frac{\frac{RT_1 \frac{k}{\beta}}{V_1}}{\frac{RT_1}{V_1}} = nC_p \ln \frac{k}{\beta} - nR \ln \frac{k}{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_2 - S_1 = nC_v \ln \frac{k}{\beta}$$

Desde el estado 2 al 3 el gas evoluciona cambiando su presión y volumen y manteniendo constante su temperatura.. Sustituyendo en (1)

$$dS = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = C_v \left(\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \right) + R \frac{dV}{V} = C_v \frac{dP}{P} + C_p \frac{dV}{V} \quad (3)$$

Aplicamos la ecuación (3) para n moles de gas entre los estados 2 y 3.

$$S_3 - S_2 = nC_v \ln \frac{P_1}{P_2} + nC_p \ln \frac{k V_1}{V_1} = nC_v \ln \frac{\frac{n R T_1}{\beta V_1}}{\frac{n R T_f}{V_1}} + nC_p \ln k = nC_v \ln \frac{T_1}{\beta T_1 \frac{k}{\beta}} + nC_p \ln k$$

$$S_3 - S_2 = nC_v \ln \frac{1}{k} + nC_p \ln k$$

$$(S_3 - S_2) + (S_2 - S_1) = S_3 - S_1 = nC_v \ln \frac{1}{k} + nC_p \ln k + nC_v \ln \frac{k}{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 - S_1 = n(-C_v \ln k + C_p \ln k + C_v \ln k - C_v \ln \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 - S_1 = n(C_p \ln k - C_v \ln \beta) = n(C_v \ln k + R \ln k - C_v \ln k)$$

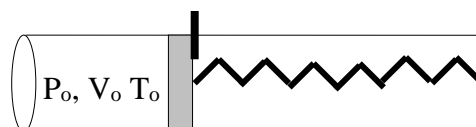
La diferencia de las capacidades caloríficas es igual a R

$$C_p - C_v = R \Rightarrow \frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v} \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$S_3 - S_1 = n \left(\frac{R}{\gamma - 1} \ln k + R \ln k - \frac{R}{\gamma - 1} \ln \beta \right) = \frac{nR}{\gamma - 1} [\ln k + (\gamma - 1) \ln k - \ln \beta] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 - S_1 = \frac{nR}{\gamma - 1} (\gamma \ln k - \ln \beta) = \frac{2 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}}{1,30 - 1} (1,30 \cdot \ln 2 - \ln 3) = -10,9 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

15.- En la figura inferior el cilindro lleva un émbolo que se puede desplazar sin rozamiento. Inicialmente el émbolo se encuentra sujeto y el muelle tiene su longitud natural (no está estirado ni comprimido). En la parte izquierda existe un mol de gas perfecto cuyas coordenadas termodinámicas son (P_o, T_o, V_o) . En la parte derecha se ha hecho el vacío y el sistema está termoaislado. Si se deja en libertad el émbolo, el gas adquiere un volumen $2V_o$. Calcular los valores de la temperatura y presión del gas, suponiendo despreciables los calores específicos del émbolo y del cilindro.

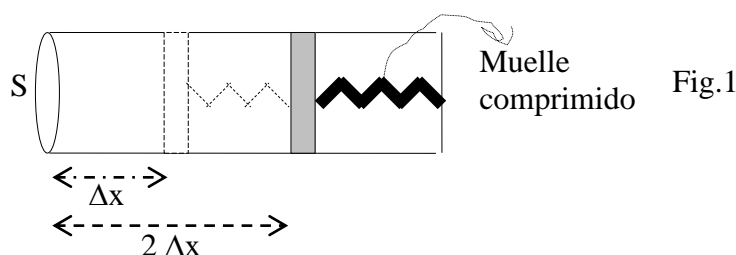


Al dejar en libertad el émbolo el gas se expande hasta un volumen $2V_o$ y adquiere una presión P_f y una temperatura T_f . El muelle se comprime una longitud Δx . En consecuencia el muelle almacena una energía potencial elástica de valor $\frac{1}{2} k \Delta x^2$.

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica $\Delta U = Q + W$, y al estar el sistema termoaislado, $Q=0$. La disminución de energía interna del gas es igual al trabajo realizado, y ese trabajo se acumula en energía potencial en el muelle.

$$\Delta U = C_v (T_f - T_o) = -\frac{1}{2} k \Delta x^2$$

El signo menos aparece porque el trabajo ha sido realizado por el gas contra el exterior.



En la figura 1, designamos con S la sección de la base del cilindro. Δx es la altura inicial cuando el émbolo está sujeto, por tanto, $V_o = S \cdot \Delta x$. El émbolo está en equilibrio y en dirección horizontal actúan de izquierda a derecha la fuerza que ejerce el gas de valor $P_f S$, y de derecha a izquierda la fuerza con que el muelle empuja al émbolo de valor $k \Delta x$. Estas dos fuerzas son iguales en módulo, puesto que el émbolo está en equilibrio.

$$P_f S = k \Delta x \Rightarrow k = \frac{P_f S}{\Delta x} = \frac{P_f V_o}{\Delta x^2}$$

Por otra parte se cumple que

$$P_f \cdot 2V_o = RT_f \Rightarrow P_f = \frac{RT_f}{2V_o} \Rightarrow k = \frac{\frac{RT_f}{2V_o} \cdot V_o}{\Delta x^2} = \frac{RT_f}{2\Delta x^2}$$

Llevando el valor de k a la ecuación (1)

$$C_v(T_f - T_o) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{RT_f}{2\Delta x^2} \cdot \Delta x^2 = -\frac{RT_f}{4} \Rightarrow T_f \left(C_v + \frac{R}{4} \right) = C_v T_o \Rightarrow T_f = \frac{T_o}{\left(1 + \frac{R}{4C_v} \right)}$$

En la ecuación de los gases perfectos

$$P_f \cdot 2V_o = RT_f = R \left(\frac{T_o}{1 + \frac{R}{4C_v}} \right) \Rightarrow P_f = \frac{RT_o}{2V_o \left(1 + \frac{R}{4C_v} \right)} = \frac{P_o V_o}{2V_o \left(1 + \frac{R}{4C_v} \right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_f = \frac{P_o}{2 \left(1 + \frac{R}{4C_v} \right)}$$

16.- Un kilogramo de agua hierve cuando la presión exterior es 1 atmósfera, transformándose íntegramente en vapor. Calcular la variación de entropía y de energía interna en el proceso. Se supone que el vapor de agua se comporta como un gas perfecto.

Dato .-Calor de vaporización del agua $\lambda = 2,25 \text{ kJ/g}$

La entropía es función de estado y por consiguiente su valor no depende del camino mediante el cual se realiza el proceso de ebullición del agua, podemos calcular la variación de entropía mediante la ecuación:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{1000 \text{ g} \cdot 2,25 \frac{\text{kJ}}{\text{g}}}{373 \text{ K}} = 6,0 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

La variación de energía interna viene dada por la ecuación $\Delta U = Q + W$

Q representa el calor suministrado al sistema $Q = 1000 \cdot 2,25 = 2,25 \cdot 10^3 \text{ kJ}$

W es el trabajo que ejecuta el sistema y vale $-P \cdot \Delta V = -P(V_v - V_L)$, siendo P la presión exterior, V_v el volumen del vapor de agua y V_L el volumen del líquido. El volumen del líquido es aproximadamente un litro y el volumen del vapor de agua lo calculamos mediante la ecuación de los gases perfectos

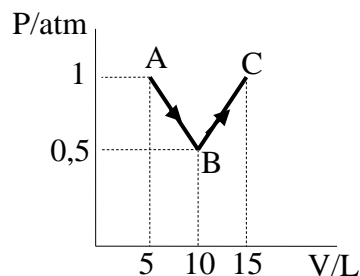
$$P V_v = \frac{g}{M} RT \Rightarrow V_v = \frac{g R T}{P M} = \frac{1000 \text{ g} \cdot 8,3 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 373 \text{ K}}{101300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 1,70 \frac{\text{J} \cdot \text{m}^2}{\text{N}} = 1,70 \frac{\text{N m}^3}{\text{N}}$$

$$V_v = 1,70 \text{ m}^3$$

$$W = -101300 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} (1,70 \text{ m}^3 - 10^{-3} \text{ m}^3) = -1,72 \cdot 10^2 \text{ kJ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U = 2,25 \cdot 10^3 - 1,72 \cdot 10^2 = 2,1 \cdot 10^3 \text{ kJ}$$

17.- Un mol de un gas ideal cuyo coeficiente adiabático es $\gamma = \frac{5}{2}R$, efectúa la transformación indicada en la figura inferior



Calcular a) el trabajo realizado por el sistema cuando pasa de A a B.

b) El calor que se debe suministrar al sistema para pasar de B a C. c) La variación de energía interna en el proceso ABC.

b) La expresión del trabajo de expansión es : $-\int_{V_i}^{V_f} P dV$. La relación entre la presión

y el volumen en la transformación AB es una línea recta, cuya ecuación la calculamos mediante la expresión que nos da la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{P - 1}{0,5 - 1} = \frac{V - 5}{10 - 5} \Rightarrow P - 1 = -0,1V + 0,5 \Rightarrow P = -0,1V + 1,5$$

Resolvemos la integral

$$W = -\int_5^{10} (-0,1V + 1,5) dV = \frac{+0,1(10^2 - 5^2)}{2} - 1,5(10 - 5) = -3,75 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

El signo negativo indica que el trabajo es efectuado por el gas hacia el exterior.

Una forma mucho más rápida para calcular el trabajo, es medir el área comprendida entre la recta AB y el eje de abscisas. La figura es un trapecio

$$\text{Área} = \frac{1 + 0,5}{2} \cdot 5 = 3,75 \Rightarrow W = -3,75 \text{ atm} \cdot \text{L} = -3,75 \cdot 101325 \cdot 10^{-3} = -380 \text{ J}$$

b) Calculamos primero la variación de energía interna entre B y C

$$\Delta U_{BC} = C_v (T_C - T_B) = C_v \left(\frac{P_C V_C}{R} - \frac{P_B V_B}{R} \right) = \frac{C_v}{R} (P_C V_C - P_B V_B)$$

Según el dato del problema $\gamma = \frac{5}{3} = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{R}{C_V} \Rightarrow C_V = \frac{3}{2}R$

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} + W_{BC} = \frac{\frac{3}{2}R}{R} (1 \cdot 15 - 0,5 \cdot 10) = \frac{3}{2} \cdot 10 = 15 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

El trabajo BC lo calculamos por el área como se hizo anteriormente

$$\text{Área} = \frac{0,5+1}{2} \cdot (10-5) = 3,75 \Rightarrow W_{BC} = -3,75 \text{ atm} \cdot \text{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{BC} = \Delta U_{BC} - W_{BC} = 15 - (-3,75) = 18,75 \text{ atm} \cdot \text{L} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ J}$$

c) La variación de energía interna en el proceso ABC es igual a la suma siguiente

$$\Delta U_{ABC} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} = C_V (T_B - T_A) + \Delta U_{BC} = C_V \left(\frac{P_A V_A}{R} - \frac{P_B V_B}{R} \right) + \Delta U_{BC} \Rightarrow$$

$$\Delta U_{ABC} = C_V \left(\frac{1 \cdot 5}{R} - \frac{0,5 \cdot 10}{R} \right) + \Delta U_{BC} = 15 \text{ atm} \cdot \text{L} = 15 \cdot 101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 1,5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

18.-Un mol de un gas ideal realiza una transformación reversible desde un estado inicial (291 K, 21 L) hasta un estado final (305 K, 12,7 L). En el diagrama P-V esta transformación queda representada por una línea recta. Determinar a) el trabajo y el calor implicados en la mencionada transformación. Dato $C_v = (5/2)R$.

El trabajo viene determinado por la integral $W = - \int_{V_I}^{V_F} P dV$, para poder resolverla necesitamos conocer la relación entre las variables P y V. Hallamos mediante la ecuación de los gases perfectos las presiones de los dos estados.

$$P_I V_I = 1 \text{ mol} \cdot R T_I \Rightarrow P_I = \frac{1 \cdot \text{mol} \cdot 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol K}} \cdot 291 \text{ K}}{21 \text{ L}} = 1,14 \text{ atm}$$

$$P_F V_F = 1 \text{ mol} \cdot R T_F \Rightarrow P_F = \frac{1 \cdot \text{mol} \cdot 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol K}} \cdot 305 \text{ K}}{12,7 \text{ L}} = 1,97 \text{ atm}$$

En el diagrama, PV tenemos dos puntos de coordenadas (1,14 atm , 21 L) y (1,97 atm , 12,7 L) unidos por una recta. La ecuación general de la recta es $P = m V + b$, siendo m la pendiente y b la ordenada en el origen. La pendiente y ordenada en el origen son:

$$\text{tag } \alpha = \frac{1,97 - 1,14}{12,7 - 21} = -0,1 \Rightarrow P = -0,1V + b \Rightarrow 1,14 = -0,1 \cdot 21 + b \Rightarrow b = 3,24$$

Sustituyendo la ecuación p-V en la integral

$$W = - \int_{21}^{12,7} (-0,1V + 3,24) dV = 0,1 \frac{V^2}{2} - 3,24V \Big|_{21}^{12,7} = 0,05 \cdot (12,7^2 - 21^2) - 3,24(12,7 - 21) \Rightarrow$$

$$W = 12,9 \text{ atm} \cdot \text{L} = 12,9 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot 101325 \frac{\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{\text{atm} \cdot \text{L}} = 1,3 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Como el trabajo es positivo es un trabajo que se realiza desde fuera sobre el sistema.

$$\Delta U = C_v (T_f - T_i) = Q + W \Rightarrow Q = C_v (T_f - T_i) - W = \frac{5}{2} R (305 - 291) - 1,3 \cdot 10^3 \Rightarrow$$

$$Q = 2,5 \cdot 8,31 \cdot 14 - 1,3 \cdot 10^3 = -1,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Un calor con signo negativo significa que el sistema cede ese calor al medio exterior.

19.-Hallar la temperatura máxima posible de un gas perfecto en cada uno de los procesos siguientes.

$$a) p = p_0 - \alpha V^2 \quad ; \quad b) p = p_0 e^{-\beta V}$$

donde p_0 , α y β son constantes positivas y V el volumen de un mol de gas.

a) Si se trata de un gas perfecto obedece a la ecuación de los gases

$$pV = RT \Rightarrow (p_0 - \alpha V^2)V = RT \Rightarrow T = \frac{p_0 V}{R} - \frac{\alpha V^3}{R}$$

Calculamos la derivada de la temperatura respecto del volumen e igualamos a cero.

$$\frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{R} - \frac{3\alpha V^2}{R} = 0 \Rightarrow p_0 = 3\alpha V^2 \Rightarrow V = \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}$$

Llevamos este valor a la ecuación de la temperatura

$$T_m = \frac{V}{R} (p_0 - \alpha V^2) = \frac{\sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}}{R} \left(p_0 - \alpha \frac{p_0}{3\alpha} \right) = \frac{2}{3} \frac{p_0}{R} \sqrt{\frac{p_0}{3\alpha}}$$

b)

$$\begin{aligned} pV = RT \Rightarrow p_0 e^{-\beta V} V = RT \Rightarrow T = \frac{p_0 e^{-\beta V} V}{R} \Rightarrow \frac{dT}{dV} &= \frac{p_0}{R} (e^{-\beta V} - \beta V e^{-\beta V}) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-\beta V} - \beta V e^{-\beta V} &\Rightarrow 1 - \beta V = 0 \Rightarrow V = \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Llevando el valor de V a T

$$T_m = \frac{p_0}{R} \cdot e^{-\beta \frac{1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{p_0}{eR\beta}$$

20.-Un mol de un gas perfecto cuyo exponente adiabático es γ , se expandió según la ley $p=aV$, donde a es una constante. El volumen inicial del gas es V_0 . Como resultado de la expansión el gas aumento de volumen η veces. Calcular el aumento de energía interna del gas b) el trabajo realizado por éste c) La capacidad calorífica molar del gas en este proceso.

a) Designamos con $(P_0=aV_0 ; V_0 ; T_0)$ las coordenadas termodinámicas del gas antes de expandirse y con $(P_1=aV_1 ; V_1 ; T_1)$ después de la expansión. Al tratarse de un gas perfecto la variación de energía interna vale:

$$\Delta U = C_v(T_1 - T_0)$$

La relación entre los dos estados del gas nos permite escribir

$$\frac{aV_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{aV_1 \cdot V_1}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{V_1^2 T_0}{V_0^2} = \frac{\eta^2 V_0^2 T_0}{V_0^2} = \eta^2 T_0$$

La ecuación de los gases perfectos aplicada al estado inicial conduce a:

$$aV_0 \cdot V_0 = RT_0 \Rightarrow T_0 = \frac{aV_0^2}{R}$$

Llevando los valores de las temperaturas a la ecuación de la energía interna

$$\Delta U = C_v(\eta^2 T_0 - T_0) = C_v \frac{aV_0^2}{R}(\eta^2 - 1)$$

Ponemos C_v en función de γ .

$$C_p - C_v = R \Rightarrow \frac{C_p}{C_v} - 1 = \frac{R}{C_v} \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\Delta U = \frac{1}{\gamma - 1} \cdot aV_0^2(\eta^2 - 1)$$

b) El trabajo de expansión del gas es:

$$W = - \int_{V_0}^{V_1} P dV = - \int_{V_0}^{\eta V_0} P dV = - \int_{V_0}^{\eta V_0} aV dV = \left[-\frac{aV^2}{2} \right]_{V_0}^{\eta V_0} = \frac{aV_0^2}{2} - \frac{a\eta^2 V_0^2}{2} = \frac{aV_0^2}{2}(1 - \eta^2)$$

c) Aplicando el primer principio de la Termodinámica

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow Q = \Delta U - W = C(T_1 - T_0) \Rightarrow$$

$$C = \frac{\Delta U - W}{T_1 - T_0} = \frac{\frac{1}{\gamma-1} aV_0^2 (\eta^2 - 1) - \frac{aV_0^2}{2} (1 - \eta^2)}{\eta^2 \frac{aV_0^2}{R} - \frac{aV_0^2}{R}} = \frac{\frac{1}{\gamma-1} (\eta^2 - 1) + \frac{\eta^2 - 1}{2}}{\frac{1}{R} (\eta^2 - 1)} = \frac{\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{R}} \Rightarrow$$

$$C = \frac{\frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}}{\frac{1}{R}} = R \frac{1+\gamma}{2(\gamma-1)}$$

