

21.-0,1 mol de un gas ideal realiza los dos ciclos siguientes: ABCA y BDCB. Las coordenadas termodinámicas de los puntos A B C y D son las siguientes:

A (P_A , 1 L, 280 K) ; B (P_B , 1 L, T_B)

C (P_C , 1,5 L, T_B) ; D (P_D , 1,5 L, 629 K)

Los puntos B y D en el diagrama V-T se encuentran sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas.

a) Dibujar los diagramas V-T y P-V de las dos transformaciones.

b) Calcular el trabajo que ejecuta el gas en cada transformación.

Calculamos P_A y P_D aplicando la ecuación de los gases perfectos.

$$P_A \cdot 1 = 0,1 \cdot 0,082 \cdot 280 \Rightarrow P_A = 2,30 \text{ atm}$$

$$P_D \cdot 1,5 = 0,1 \cdot 0,082 \cdot 629 \Rightarrow P_D = 3,44 \text{ atm}$$

Teniendo en cuenta que B y D se encuentran en una recta que pasa por el origen de coordenadas en el diagrama V-T, designamos con α el ángulo que forma la recta con el eje de abscisas.

$$\text{tag } \alpha = \frac{V_D}{T_D} = \frac{V_B}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{V_B T_D}{V_D} = \frac{1 \cdot 629}{1,5} = 419 \text{ K}$$

Haciendo uso de la ecuación de los gas perfectos

$$P_B \cdot 1 = 0,1 \cdot 0,082 \cdot 419 = 3,44 \text{ atm}$$

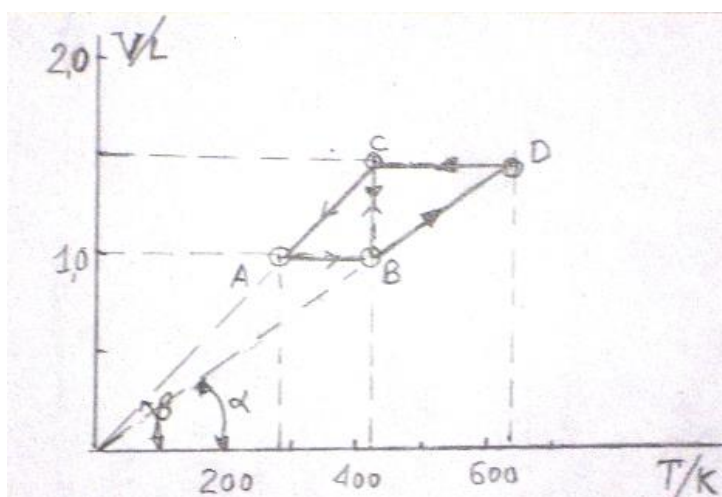
$$P_B V_B = P_C V_C \Rightarrow P_C = \frac{P_B V_B}{V_C} = \frac{3,44 \cdot 1}{1,5} = 2,30 \text{ atm}$$

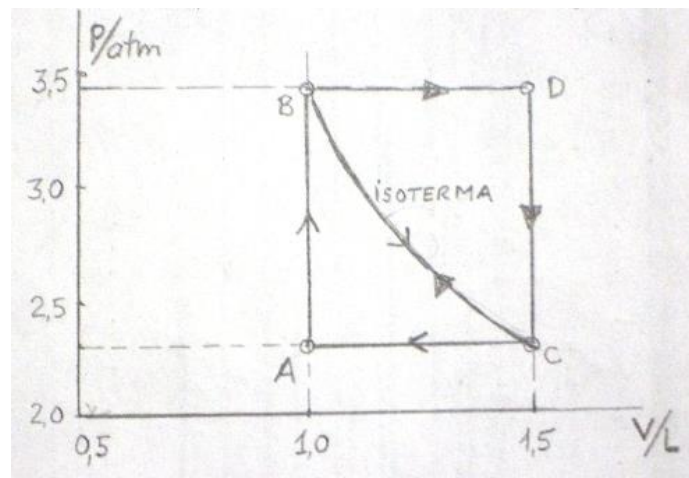
Los puntos C y A están también sobre una recta que pasa por el origen de coordenadas ya que

$$\text{tag } \beta = \frac{V_C}{T_C} = \frac{V_A}{T_A} = \frac{1,5}{419} = \frac{1}{280}$$

Los puntos B y C están unidos por una isoterma.

Los diagramas V-T y P-V son los siguientes





Trabajo del ciclo ACBA

$$W_{AB} = - \int_{v_A}^{v_B} P dV = 0 ;$$

$$W_{BC} = - \int_{v_B}^{v_C} P dV = - \int_{v_B}^{v_C} \frac{nRT}{V} dV = -nRT \ln \frac{V_C}{V_B} = -0,1 \cdot 8,31 \cdot 419 \cdot \ln \frac{1,5}{1,0} = -141 \text{ J}$$

$$W_{CA} = - \int_{v_C}^{v_A} P dV = -P(v_A - v_C) = -2,3 \cdot (1 - 1,5) = 1,15 \text{ atm} \cdot \text{L} =$$

$$= 1,15 \text{ atm} \cdot \text{L} \cdot \frac{101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{\text{atm}} \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{L}} = 116,5 \text{ J}$$

$$W_{\text{ciclo}} = -141 + 116,5 = -24,5 \text{ J}$$

Trabajo del ciclo BDCB

$$W_{BD} = - \int_{V_B}^{V_D} P dV = -P(V_D - V_B) = -3,44 \text{ atm}(1,5 - 1)L = -1,72 \text{ atm} \cdot L =$$

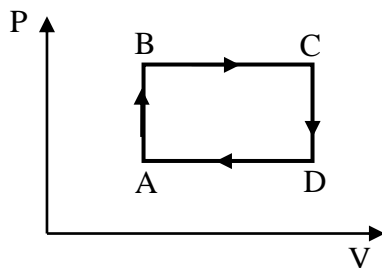
$$= -1,72 \text{ atm} \cdot L \frac{101325 \frac{\text{M}}{\text{m}^2}}{\text{atm}} \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{L}} = -174,2 \text{ J}$$

$$W_{DC} = - \int_{V_A}^{V_B} P dV = 0$$

$$W_{CB} = -W_{BC} = 141 \text{ J}$$

$$W_{\text{ciclo}} = 141 - 174,2 = -33,2 \text{ J}$$

22.- Un gas ideal realiza el ciclo indicado en la figura inferior.



La presión $P_B=2P_A$, $V_D=2V_A$. El coeficiente adiabático del gas es: $\gamma=7/5$.

a) Calcular el rendimiento del ciclo. b) Calcular el calor evacuado durante el ciclo.

a) El rendimiento del ciclo es el cociente entre el trabajo efectuado y el calor suministrado

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_s|}$$

El trabajo efectuado corresponde numéricamente al área encerrada por el ciclo

$$W = (V_D - V_A) \cdot (P_B - P_A) = V_A P_A = nRT_A$$

Con el convenio de signos empleado (calor y trabajo positivos los recibe el sistema, calor y trabajo negativos los cede el sistema) ese trabajo debe ir precedido de signo negativo.

Calculamos las temperaturas en A, B, C, y D.

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{P_B V_B}{P_A V_A} T_A = \frac{2P_A V_A}{P_A V_A} T_A = 2T_A$$

$$\frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_C}{T_C} \Rightarrow T_C = \frac{P_C V_C}{P_B V_B} T_B = \frac{2V_A}{V_A} 2T_A = 4T_A$$

$$\frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_D V_D}{T_D} \Rightarrow T_D = \frac{P_D V_D}{P_C V_C} T_C = \frac{P_A V_A}{P_A V_A} 2T_A = 2T_A$$

Observando las temperaturas se deduce que el calor absorbido se hace de A a B y de B a C.

$$Q_S = n C_V (T_B - T_A) + n C_P (T_C - T_B) = n C_V T_A + n C_P 2 T_A$$

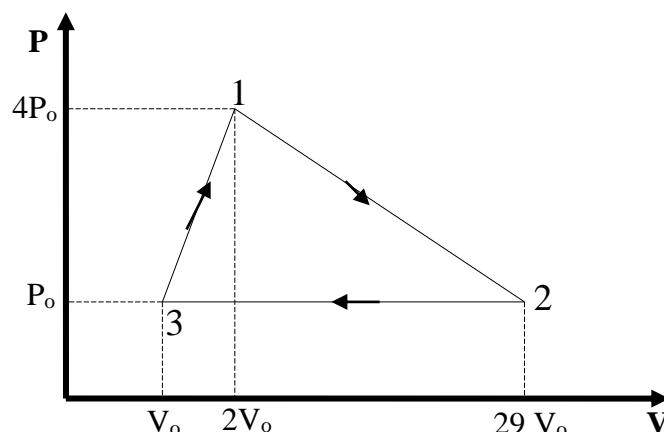
$$\eta = \left| \frac{W}{Q_S} \right| = \frac{n R T_A}{n T_A (C_V + 2 C_P)} = \frac{R}{C_V + 2 C_P} = \frac{C_P - C_V}{C_V + 2 C_P} = \frac{\frac{C_P}{C_V} - 1}{1 + 2 \frac{C_P}{C_V}} = \frac{\gamma - 1}{1 + 2 \gamma} = \frac{2}{19}$$

b) El calor cedido se verifica desde C a D y de D a A.

$$Q_E = n C_V (T_D - T_C) + n C_P (T_A - T_D) = -n C_V \cdot 2 T_A - n C_P T_A = -n T_A (C_P + 2 C_V)$$

El signo negativo indica que el calor sale del sistema.

23.- Un mol de un gas ideal realiza reversiblemente, el ciclo indicado en la figura.



$P_0 = 1 \text{ atm}$; $V_0 = 1 \text{ L}$; $R = 0,082 \text{ atm L/(mol K)}$

a) Construir los diagramas $T-V$ y $T-P$. b) Determinar las coordenadas termodinámicas correspondientes al punto de máxima temperatura.

a)

Transformación 1-2

Hallamos la ecuación que relaciona la presión con el volumen. Aplicamos la ecuación de una recta que pasa por dos puntos

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Rightarrow P - 4 = \frac{1 - 4}{29 - 2} (V - 2) \Rightarrow P - 4 = -\frac{V}{9} + \frac{2}{9} \Rightarrow P = -\frac{V}{9} + \frac{38}{9} \quad (1)$$

Dado que el gas es perfecto, podemos deducir la relación entre T y V .

$$PV = nRT \Rightarrow \left(\frac{38 - V}{9} \right) \cdot V = RT \Rightarrow T = \frac{38V - V^2}{9R} \quad (2)$$

La ecuación que relaciona T con P es la siguiente:

$$-\frac{V}{9} = P - \frac{38}{9} \Rightarrow V = 38 - 9P \Rightarrow P \cdot (38 - 9P) = RT \Rightarrow T = \frac{38P - 9P^2}{R} \quad (3)$$

Transformación 2-3

La transformación es una isóbara. Si P y V representan la presión y el volumen en cualquier punto de la recta 2-3

$$\frac{V}{T} = \frac{V_2}{T_2} = \frac{29}{T_2} ; 1.29 = RT_2 \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{29}{\frac{RT_2}{R}} \Rightarrow T = \frac{V}{R} \quad (4) ; \quad P = \text{Cte} = 1 \text{ atm}$$

Transformación 3-1

Hallamos la ecuación que relaciona la presión con el volumen. Aplicamos la ecuación de una recta que pasa por dos puntos

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Rightarrow P - 1 = \frac{4 - 1}{2 - 1} (V - 1) \Rightarrow P - 1 = 3V - 3 \Rightarrow P = 3V - 2 \quad (5)$$

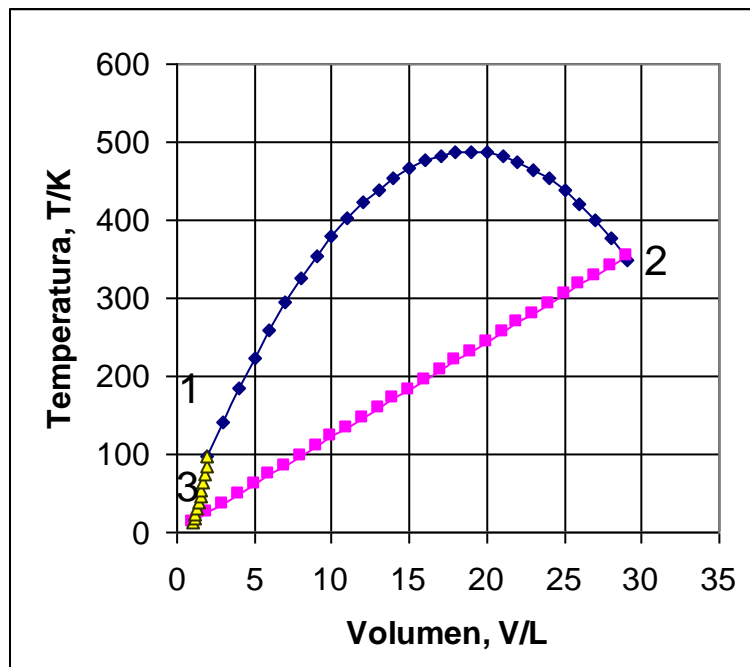
Dado que el gas es perfecto, podemos deducir la relación entre T y V.

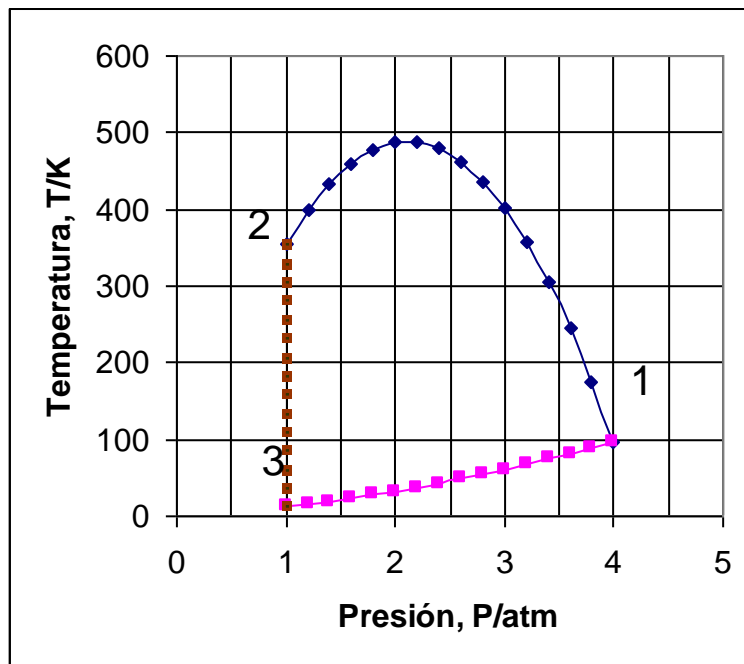
$$PV = RT \Rightarrow (3V - 2) \cdot V = RT \Rightarrow T = \frac{3V^2 - 2V}{R} \quad (6)$$

La ecuación que relaciona T con P es la siguiente:

$$V = \frac{P + 2}{3} \Rightarrow P \cdot \left(\frac{P + 2}{3} \right) = RT \Rightarrow T = \frac{P^2 + 2P}{3R} \quad (7)$$

Los cálculos están hechos con Excel. Se dan valores a V o a P en las ecuaciones según que estas magnitudes aparezcan en las fórmulas como variables independientes. Así en las ecuaciones (1), (2), (4), (5), (6) la variable independiente es el volumen, y en las ecuaciones (3) y (7) es la presión.





b) Elegimos la ecuación (2) $T = \frac{38V - V^2}{9R}$, Derivamos respecto a la variable V e igualamos a cero

$$\frac{dT}{dV} = \frac{38 - 2V}{9R} = 0 \Rightarrow V = 19L$$

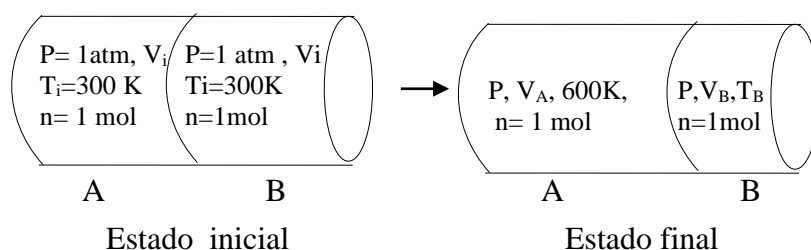
La máxima temperatura se produce cuando el volumen es 19 L y la temperatura

$$T = \frac{38 \cdot 19 - 19^2}{9 \cdot 0,082} = 489K$$

24.- Un cilindro rígido de paredes adiabáticas tiene un pistón, también adiabático, que se desplaza sin rozamiento dentro del cilindro. Inicialmente el pistón divide al cilindro en dos volúmenes iguales A y B que contienen cada uno de ellos un mol de gas ideal de $C_v=20,9 \text{ J/mol K}$, a la presión de 1 atmósfera y a 300 K de temperatura. En A existe un calentador que suministra energía de manera muy lenta al gas de A, hasta que su temperatura se eleva a 600 K. Se desprecian las capacidades caloríficas del pistón y del cilindro y se pide:

- Presiones, volúmenes y temperaturas finales de ambos gases
- Energía eléctrica suministrada
- Variación de entropía en el proceso.

a) En la figura inferior se representan los estados inicial y final. Cuando se alcance un equilibrio las presiones en los compartimientos A y B son iguales.



Calculamos el valor numérico del volumen inicial, aplicando la ecuación de los gases perfectos

$$1 \text{ atm} \cdot V_i = 1 \cdot 0,082 \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K} \Rightarrow V_i = 24,6 \text{ L}$$

Cuando en el compartimiento A se suministra energía el gas de ese lugar aumenta lentamente su temperatura y presión al mismo tiempo que el émbolo móvil se desplaza hacia la derecha comprimiendo al gas de B. El gas de B sufre un proceso adiabático ya que no intercambia calor con el exterior.

Aplicamos para ese gas entre los estados inicial y final la ecuación de una adiabática

$$300 \cdot 24,6^{\gamma-1} = T_B \cdot V_B^{\gamma-1}$$

De la ecuación de los gases perfectos aplicada a ambos, resulta:

$$\frac{1 \cdot 24,6}{300} = \frac{P \cdot V_A}{600} ; \frac{1 \cdot 24,6}{300} = \frac{P \cdot V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{600}{T_B}$$

Como el cilindro es de paredes rígidas

$$V_A + V_B = 2 V_i = 49,2 \text{ L} \Rightarrow V_A = 49,2 - V_B$$

Operando con estas tres ecuaciones

$$\frac{49,2 - V_B}{V_B} = \frac{600}{T_B} \Rightarrow T_B = \frac{600 V_B}{49,2 - V_B} \Rightarrow 300 \cdot 24,6^{\gamma-1} = \frac{600 V_B}{49,2 - V_B} V_B^{\gamma-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 300 \cdot 24,6^{\gamma-1} = \frac{600 V_B^{\gamma}}{49,2 - V_B} \quad (1)$$

El valor numérico del coeficiente adiabático lo calculamos a partir del dato del problema C_v .

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{R + C_v}{C_v} = \frac{8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} + 20,9 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}}{20,9 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = 1,40$$

Si en la ecuación (1) sustituimos el valor de γ .

$$24,6^{0,40} = \frac{2 V_B^{1,40}}{49,2 - V_B} \Rightarrow 1,80 = \frac{V_B^{1,40}}{49,2 - V_B}$$

La ecuación la resolvemos por tanteo

Si $V_B=17$ L el segundo miembro vale 1,64

Si $V_B=18$ L el segundo miembro vale 1,83

Si $V_B=17,8$ L el segundo miembro vale 1,79

Tomando como solución de la ecuación el valor aproximado de 17,8 L resulta que:

$$V_A = 49,2 - 17,8 = 31,4 \text{ L} ; \frac{V_A}{V_B} = \frac{31,4}{17,8} = \frac{600}{T_B} \Rightarrow T_B = 340 \text{ K}$$

$$P \cdot 17,8 = 1 \cdot 0,082 \cdot 340 \Rightarrow P = 1,57 \text{ atm}$$

b) Escogemos como sistema termodinámico todo el cilindro y aplicamos el primer principio de la Termodinámica. Como el cilindro es de paredes rígidas no se ejerce trabajo sobre el exterior y por consiguiente:

$$\Delta U = Q \Rightarrow \Delta U_A + \Delta U_B = C_v(600 - 300) + C_v(340 - 300) = 7,11 \cdot 10^3 \text{ J}$$

c) La variación de entropía de un gas perfecto esta dada por la ecuación

$$\Delta S = n C_v \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i}$$

Aplicamos la citada ecuación para los dos gases

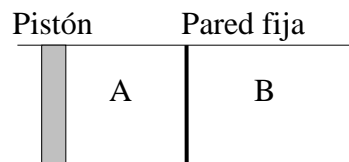
$$\Delta S_A = 1 \cdot 20,9 \cdot \ln \frac{600}{300} + 1 \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{31,4}{24,6} = 16,5 \frac{\text{J}}{\text{K}};$$

$$\Delta S_B = 1 \cdot 20,9 \cdot \ln \frac{340}{300} + 1 \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{17,8}{24,6} = -0,07 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

La variación de entropía es:

$$\Delta S_T = \Delta S_A + \Delta S_B = 16,4 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

25.- Un cilindro está cerrado por uno de sus bases y la otra es un pistón que puede deslizarse por el cilindro sin rozamiento. El interior del cilindro contiene una pared fija, tal como se muestra en la figura. Las paredes del cilindro y el pistón son adiabáticas y sus capacidades caloríficas despreciables.

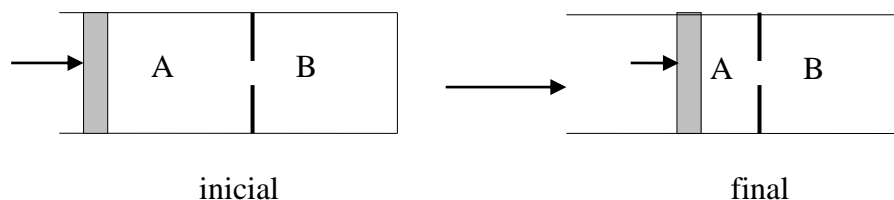


Por la parte exterior del pistón actúa una presión P_o que se supone constante. El compartimento A, de volumen V_A , contiene n moles de un gas perfecto y el B, de volumen V_B , está vacío. Inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio.

Se practica un orificio en la pared fija y se alcanza el equilibrio quedando gas en los dos compartimentos. 1) Determinar la presión, volumen y temperatura finales. Dar el resultado en función de n , P_o , V_A , V_B , y R . Calcular la variación de entropía en el proceso.

2) Suponer ahora que todo el gas abandona el compartimento A con lo que el pistón móvil está finalmente pegado a la pared fija. Calcular el valor umbral de V_B para que todo el gas pase del compartimento A al B. Determinar la presión, volumen y temperatura finales, si V_B es mayor que el valor umbral. Dar el resultado en función de n , P_o , V_A , V_B , y R . Calcular la variación de entropía en el proceso.

1) En la figura1 se representa el estado inicial y final del proceso



En el estado inicial, al existir equilibrio, la presión de gas en A es igual a la presión atmosférica y su temperatura es:

$$P_o V_A = nRT_o \Rightarrow T_o = \frac{P_o V_A}{nR}$$

Al abrir el agujero el gas comienza a pasar al compartimento B. El proceso cesa cuando la presión en todo el conjunto es la misma P_o .

Designamos con V_F al volumen final entre A y B y con T_F la temperatura del conjunto. Durante el proceso se ha producido un aumento de la energía interna del sistema debido al trabajo exterior realizado por la fuerza debida a la presión atmosférica.

$$\Delta U = nC_v(T_F - T_o) = nC_v \left(\frac{P_o V_F}{nR} - \frac{P_o V_A}{nR} \right) = \frac{C_v P_o}{R} (V_F - V_A)$$

Recordemos que:

$$C_p - C_v = R \quad ; \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow C_v(\gamma - 1) = R \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

La expresión final de ΔU es:

$$\Delta U = \frac{\frac{R}{\gamma - 1} P_o}{R} (V_F - V_A) = \frac{P_o}{\gamma - 1} (V_F - V_A)$$

El aumento de energía interna se debe al trabajo realizado desde el exterior sobre el sistema

$$W = -\int P dV = -P_o \cdot \Delta V = -P_o (V_F - V_A - V_B) = P_o (V_A + V_B - V_F)$$

Igualando la variación de energía interna con el trabajo puesto que el proceso es adiabático.

$$V_F - V_A = (\gamma - 1)(V_A + V_B - V_F) \Rightarrow V_F - V_A = \gamma(V_A + V_B) - \gamma V_F - V_A - V_B + V_F \Rightarrow$$

$$0 = \gamma(V_A + V_B) - \gamma V_F - V_B \Rightarrow \gamma V_F = \gamma V_A + V_B(\gamma - 1) \Rightarrow V_F = V_A + V_B \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \quad (1)$$

Para calcular la temperatura T_F hacemos uso de la ecuación de los gases perfectos:

$$P_o V_F = nRT_F \Rightarrow T_F = \frac{P_o V_F}{nR} = \frac{P_o \left[V_A + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) V_B \right]}{nR} = \frac{T_o}{V_A} \left[V_A + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) V_B \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_F = T_o \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right]$$

Para calcular la variación de entropía en el proceso, utilizamos la relación termodinámica que relaciona los estados 1 y 2, para un mol de gas

$$\begin{aligned}\Delta S &= \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = C_v \ln \frac{T_o \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right]}{T_o} + R \ln \frac{V_A + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) V_B}{V_A} = \\ &= (C_p - R) \ln \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right] + R \ln \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right] = C_p \ln \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right]\end{aligned}$$

Como son n moles

$$\Delta S_n = n \Delta S = n C_p \ln \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \frac{V_B}{V_A} \right]$$

2) El valor del volumen umbral de B, ocurrirá cuando en la ecuación (1) hagamos $V_F=V_B$

$$V_B = V_A + V_B \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \Rightarrow V_B = V_A + V_B - \frac{V_B}{\gamma} \Rightarrow V_B = \gamma V_A$$

Designamos con P_2 a la presión en el recinto B y con T_2 a la temperatura, siendo el volumen $V_2=V_B$. Aplicamos la ecuación de los gases perfectos.

$$P_2 V_B = n R T_2$$

La variación de energía interna entre el estado inicial y final es:

$$\Delta U = n C_v (T_2 - T_o) = n C_v \left(\frac{P_2 V_B}{n R} - \frac{P_o V_A}{n R} \right) = \frac{P_2 V_B - P_o V_A}{\gamma - 1}$$

El trabajo es:

$$W = -\int P dV = -P_o \cdot \Delta V = -P_o (0 - V_A) = P_o V_A$$

Igualando el trabajo realizado sobre el sistema con la variación de su energía interna por tratarse de un proceso adiabático, resulta:

$$(\gamma - 1) P_o V_A = P_2 V_B - P_o V_A \Rightarrow P_o V_A (\gamma - 1 + 1) = P_2 V_B \Rightarrow P_2 = \frac{\gamma P_o V_A}{V_B}$$

La temperatura es:

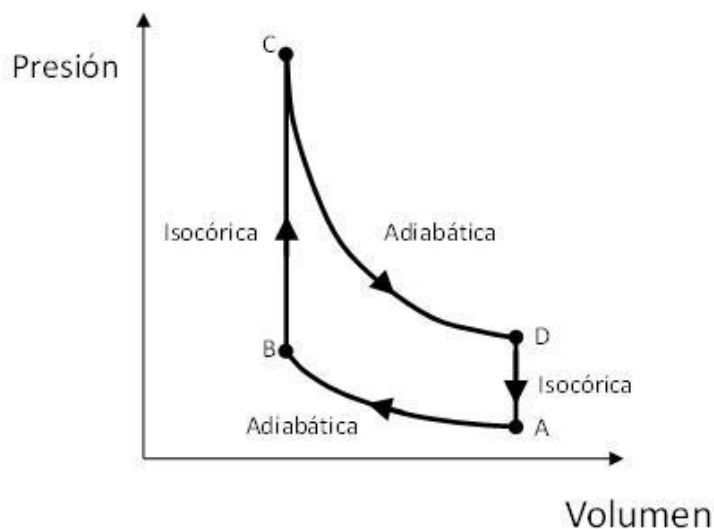
$$T_2 = \frac{P_2 V_B}{n R} = \frac{\frac{\gamma P_o V_A}{V_B} \cdot V_B}{n R} = \frac{\gamma P_o V_A}{n R} = \gamma T_o$$

Para calcular la variación de entropía en el proceso, utilizamos la relación termodinámica que relaciona los estados 1 y 2, para un mol de gas.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = C_v \ln \frac{\gamma T_o}{T_o} + R \ln \frac{V_B}{V_A} = C_v \ln \gamma + C_v (\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \\ &= C_v \left[\ln \gamma + (\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} \right] = C_v \left[\ln \gamma + \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma - 1} \right] = \frac{C_p}{\gamma} \ln \gamma \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma - 1} \end{aligned}$$

26.-El ciclo termodinámico denominado Otto consiste en una compresión adiabática seguida de una isocora, de una expansión adiabática y de otra isocora. Tal ciclo está representado en la figura y sirve como aproximación al comportamiento de un motor de explosión.

Sea un ciclo de Otto realizado por aire, el cual se comporta como un gas diatómico ideal, en el punto A, el aire se encuentra a la presión de una atmósfera y a la temperatura de 20°C. El ciclo se realiza en un cilindro de $V = 1,5$ litros y con una relación de compresión $V_A/V_B = 7$. El aire recibe una cantidad de calor de 21 kJ/mol.



- Calcular el rendimiento del ciclo
- Determinar las coordenadas termodinámicas de A, B, C y D
- Calcular el trabajo en las distintas partes del ciclo
- Calcular el calor evacuado al ambiente.

Inicialmente el aire es admitido en el cilindro a la presión de una atmósfera y a la temperatura de 20°C, por tanto, las coordenadas termodinámicas de A son: $P_A = 1$ atm, $V_A = 1,5$ L, $T_A = 293$ K.

Mediante la ecuación de los gases perfectos determinamos el número de moles de aire que penetran en el cilindro.

$$n = \frac{P_A V_A}{R T_A} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 1,5 \text{ L}}{0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol K}} \cdot 293 \text{ K}} = 0,062 \text{ mol}$$

a) El rendimiento de un ciclo es el cociente del trabajo obtenido dividido por el calor aportado. Calculamos el trabajo entre A y B, que al ser una adiabática y según el primer principio de la Termodinámica $Q=0$.

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow W_{AB} = n C_V (T_B - T_A)$$

El trabajo de B a C es nulo por no haber variación de volumen.

El trabajo de C a D que es una expansión adiabática vale

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow W_{CD} = nC_v(T_D - T_C)$$

El trabajo de D a A es nulo, por no haber variación de volumen..

El trabajo total es.

$$W_T = W_{AB} + W_{CD} = nC_v(T_B - T_A + T_D - T_C) \quad (1)$$

El calor suministrado en la isocora BC es:

$$Q_1 = nC_v(T_C - T_B) \quad (2)$$

Observando el ciclo deducimos:

$$\begin{aligned} \frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} &\Rightarrow T_C = T_B \frac{P_C}{P_B} ; \quad \text{como } P_C > P_B \Rightarrow T_C > T_B \\ \frac{P_D}{T_D} = \frac{P_A}{T_A} &\Rightarrow T_D = T_A \frac{P_D}{P_A} ; \quad \text{como } P_D > P_A \Rightarrow T_D > T_A \end{aligned}$$

Aplicamos la ecuación de la adiabática entre A y B y entre C y D.

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \text{como } V_A > V_B ; \text{ se deduce } T_B > T_A$$

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_D}{T_A} = \frac{T_C}{T_B} \Rightarrow \frac{T_D - T_A}{T_A} = \frac{T_C - T_B}{T_B} \Rightarrow \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Para efectuar la operación anterior, hemos supuesto que restábamos -1 a cada miembro del modo siguiente:

$$\frac{T_D}{T_A} = \frac{T_C}{T_B} \Rightarrow \frac{T_D}{T_A} - 1 = \frac{T_C}{T_B} - 1 \Rightarrow \frac{T_D - T_A}{T_A} = \frac{T_C - T_B}{T_B} \Rightarrow \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

El rendimiento es un valor positivo

$$\eta = \frac{|W_T|}{|Q_1|} = \frac{nC_v(T_B - T_A + T_D - T_C)}{nC_v(T_C - T_B)} = \left| -\frac{T_C - T_B}{T_C - T_B} + \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \right| = \left| -1 + \frac{T_A}{T_B} \right| = 1 - \frac{T_A}{T_B}$$

El rendimiento lo podemos expresar en la relación de volúmenes

$$\frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \eta = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}$$

b) El cálculo de la temperatura T_B lo hacemos a partir del rendimiento

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{1,4-1} = 0,54 = 1 - \frac{293}{T_B} \Rightarrow T_B = 637 \text{ K}$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre A y B

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} \Rightarrow P_B = \frac{P_A \frac{V_A}{V_B} T_B}{T_A} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 637}{293} = 15,2 \text{ atm}$$

$$V_B = \frac{1,5}{7} = 0,21 \text{ L}$$

Para calcular la temperatura en C aplicamos la ecuación (1)

$$21 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{mol}} = 20,9 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (T_C - 637) \Rightarrow T_C - 637 = 1005 \text{ K} \Rightarrow T_C = 1642 \text{ K}$$

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C} \Rightarrow P_C = \frac{15,2 \cdot 1642}{637} = 39 \text{ atm}$$

Aplicamos la ecuación de una adiabática entre C y D

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = 1642 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{0,4} = 754 \text{ K}$$

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_D}{T_D} \Rightarrow P_D = \frac{1 \cdot 754}{293} = 2,6 \text{ atm}$$

c)

$$W_{AB} = n C_V (T_B - T_A) = 0,062 \cdot 20,9 \cdot (637 - 293) = +446 \text{ J}$$

El trabajo es positivo puesto que se le suministra al sistema desde el exterior.

$$W_{CD} = n C_V (T_D - T_C) = 0,062 \cdot 20,9 \cdot (754 - 1642) = -1151 \text{ J}$$

El trabajo es negativo ya que lo suministra el sistema al exterior.

El trabajo total vale:

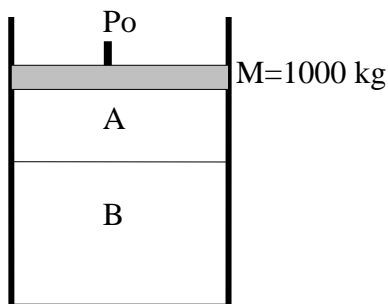
$$W_T = W_{AB} + W_{CD} = +446 - 1151 = -705 \text{ J}$$

d) El calor evacuado al ambiente lo podemos calcular a partir de

$$\Delta U = Q_2 + W_{DA} \Rightarrow Q_2 = n C_V (T_A - T_D) = 0,062 \cdot 20,9 \cdot (293 - 754) = -597 \text{ J}$$

El calor evacuado es negativo pues sale del sistema al exterior.

27-.Un cilindro adiabático, de sección $S = 1 \text{ m}^2$, dotado de un émbolo adiabático de masa $M = 1000 \text{ kg}$, capacidad calorífica despreciable y que puede desplazarse sin rozamiento, está dividido en dos cámaras por un tabique diatérmico (que deja pasar el calor con facilidad) rígido y fijo, (ver la figura).



La presión exterior que actúa sobre el émbolo es $P_o = 10^5 \text{ Pa}$. El compartimento A contiene 10 moles de un gas ideal con $C_v = 21 \text{ J/mol K}$, a la temperatura de $T_o = 300 \text{ K}$. El compartimento B, 100 moles del mismo gas, a la misma temperatura y presión 10^6 Pa . En estas condiciones se comunica al gas del compartimento B, 1000 kJ de calor y luego se rompe el tabique, el sistema evoluciona hasta una situación de equilibrio. Calcular: a) el desplazamiento vertical del émbolo, b) la temperatura final y c) la variación de entropía.

a, b). Calculamos los volúmenes de los compartimentos A y B, por aplicación de la ley de los gases ideales. La presión que soporta el gas de A es P_o más la que ejerce el émbolo de masa M.

$$V_A = \frac{n_A R T_o}{P_o + \frac{Mg}{S}} = \frac{10 \cdot 8,31 \cdot 300}{10^5 + \frac{1000 \cdot 9,8}{1}} = 0,227 \text{ m}^3; \quad V_B = \frac{n_B R T_o}{10^6} = \frac{100 \cdot 8,31 \cdot 300}{10^6} = 0,249 \text{ m}^3$$

Podemos suponer que rompemos el tabique y justamente la situación es: una temperatura de 300 K y un número de moles 110 de una mezcla de gases ideales. Ahora le comunicamos los 1000 kJ de energía calorífica y el émbolo se eleva aumentando el volumen y la temperatura. El proceso termina cuando la presión interior de la mezcla de gases es igual a la que soporta el émbolo desde el exterior.

Aplicamos el primer principio de la Termodinámica:

$$\Delta U = n C_v (T_F - 300) = Q + W = 10^6 - \int PdV = 10^6 - (109800) \cdot [V_F - (0,227 + 0,249)] \Rightarrow \\ \Rightarrow 110 \cdot 21 \cdot (T_F - 300) = 10^6 - 109800 \cdot (V_F - 0,476) \quad (1)$$

La ecuación de los gases perfectos aplicada cuando se ha alcanzado el equilibrio, nos permite escribir:

$$109800 \cdot V_F = 110 \cdot 8,31 \cdot T_F \Rightarrow V_F = 8,33 \cdot 10^{-3} T_F \quad (2)$$

Combinando (2) y (1)

$$2310T_F - 693000 = 10^6 - 109800 \cdot (8,33 \cdot 10^{-3} T_F - 0,476) \Rightarrow T_F = 541 \text{ K}$$

$$\Rightarrow V_F = 8,33 \cdot 10^{-3} \cdot 541 = 4,51 \text{ m}^3 \Rightarrow \Delta V = \Delta x S \Rightarrow \Delta x = \frac{4,51 - 0,476}{1} = 4,03 \text{ m}$$

Cuando un gas ideal cambia su temperatura de T_1 a T_2 y su volumen de V_1 a V_2 , el cambio de entropía está dado por la ecuación.

$$\Delta S = n \left(C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right)$$

Aplicamos la ecuación anterior a los gases contenidos en A y al B

$$\Delta S_A = 10 \left(21 \cdot \ln \frac{541}{300} + 8,31 \ln \frac{4,51}{0,227} \right) = 253 \frac{\text{J}}{\text{K}};$$

$$\Delta S_B = 100 \left(21 \cdot \ln \frac{541}{300} + 8,31 \ln \frac{4,51}{0,249} \right) = 3645 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 253 + 3645 = 3898 \frac{\text{J}}{\text{K}} = 3,9 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$$

28.- Un pistón móvil de masa y rozamiento despreciables, separa un recipiente rígido en dos partes inicialmente a la misma presión p_i . El recipiente está aislado del exterior. Una parte contiene 3,00 gramos de hidrógeno molecular a la temperatura de 300 K y la otra 16,00 g de oxígeno molecular a la temperatura de 400 K. El pistón conduce suavemente el calor entre el oxígeno y el hidrógeno, por lo que la temperatura de ambos gases se iguala. Todos los procesos son cuasiestáticos. Calcular.

a) La temperatura final del sistema

b) La relación entre la presión final p_f y la inicial p_i .

c) La cantidad de calor Q transferida desde el oxígeno al hidrógeno

Datos: Masa molar del hidrógeno 2,00g/mol, Masa molar del oxígeno 32,00 g/mol, $R=8,31 \text{ J}/(\text{mol K})$.

Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física

a) Inicialmente el sistema no está en equilibrio porque existe un gradiente de temperatura entre sus partes. En consecuencia pasa energía calorífica desde el oxígeno al hidrógeno hasta alcanzar el equilibrio mecánico, lo cual implica que exista uniformidad de temperatura y presión.

Designamos con T la temperatura de los gases en el equilibrio, V_H el volumen inicial del hidrógeno y V_O el volumen inicial del oxígeno, V_{H1} el volumen final del hidrógeno, V_{O1} el volumen final del oxígeno, y con p_i la presión inicial y p_f la final.

Consideramos como sistema el recipiente, que está aislado del exterior, lo que supone que no pueda intercambiar ni calor ni trabajo y por ello la variación de energía interna del sistema es cero. Ahora bien, dentro del sistema hay un aumento de energía interna por parte del hidrógeno y una disminución por parte del oxígeno, ambas variaciones deben sumar cero. La variación de energía interna es $\Delta U = nC_v(T - T_i)$ y $C_v = 5R/2$ por tratarse de un gas diatómico.

$$\Delta U_H = \frac{3,00}{2,00} C_v (T - 300) \quad ; \quad \Delta U_O = \frac{16,00}{32,00} C_v (T - 400) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U_{\text{sistema}} = 0 = \frac{3,00}{2,00} C_v (T - 300) + \frac{16,00}{32,00} C_v (T - 400) \Rightarrow T = 325 \text{ K}$$

b) Aplicamos a los gases la ecuación de los gases perfectos antes y después del proceso

$$V_H = \frac{1,5R \cdot 300}{p_i} \quad ; \quad V_{H1} = \frac{1,5R \cdot 325}{p_f} \quad ; \quad V_O = \frac{0,5R \cdot 400}{p_i} \quad ; \quad V_{O1} = \frac{0,5R \cdot 325}{p_f}$$

Dado que el recipiente es rígido la suma de volúmenes antes y después del proceso es el mismo

$$V_H + V_O = V_{H1} + V_{O1} \Rightarrow \frac{1,5R \cdot 300}{p_i} + \frac{0,5R \cdot 400}{p_i} = \frac{1,5R \cdot 325}{p_f} + \frac{0,5R \cdot 325}{p_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{450}{p_i} + \frac{200}{p_i} = \frac{487,5}{p_f} + \frac{162,5}{p_f} \Rightarrow \frac{650}{p_i} = \frac{650}{p_f} \Rightarrow p_i = p_f$$

c) Aplicamos el primer principio de la termodinámica al oxígeno: $\Delta U_O = Q_O + W_O$, siendo Q_O el calor perdido por el oxígeno y que es transferido al hidrógeno y W_O es el trabajo recibido por el oxígeno y suministrado por el hidrógeno.

$$\Delta U_O = 0,5C_v(325 - 400) = -0,5 \cdot \frac{5}{2}R \cdot 75 = -779 \text{ J}$$

Calculamos el trabajo realizado por el hidrógeno y tenemos en cuenta que el proceso es cuasiestático, lo cual implica que en todo el proceso se puede sustituir la presión exterior, esto es, p_o por la del hidrógeno

$$W_H = -\int p_O dV = -\int p_H dV = -\int_{300}^{325} 1,5R dT = -1,5R(325 - 300) = -1,5 \cdot 8,31 \cdot 25 = -312 \text{ J}$$

El signo menos indica que es un trabajo perdido por el hidrógeno y que es ganado por el oxígeno, luego $W_O = +312 \text{ J}$

$$Q_O = \Delta U_O - W_O = -779 - 312 = -1091 \text{ J}$$

El signo menos indica que es un calor perdido por el oxígeno y que ha ganado el hidrógeno.

29.-(343) Comprobar que para un gas perfecto que realiza un proceso adiabático se cumple la siguiente ecuación

$$H_2 - H_1 = \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

El subíndice 2 señala el estado final y el 1 el inicial.

Para un gas perfecto, que efectúa un proceso adiabático reversible entre los estados termodinámicos 1 y 2, se cumplen las siguientes ecuaciones.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} ; P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

Para un proceso adiabático $H_2 - H_1 = C_p(T_2 - T_1)$ (1)

Observando la ecuación del enunciado vamos a eliminar T_2 , ya que no aparece en la ecuación del enunciado, utilizando las ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} = \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} ; \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} &\Rightarrow \frac{P_2 T_1}{P_1 T_2} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot T_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_2 = T_1 \frac{P_2^{1-\frac{1}{\gamma}}}{P_1^{1-\frac{1}{\gamma}}} = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2) \end{aligned}$$

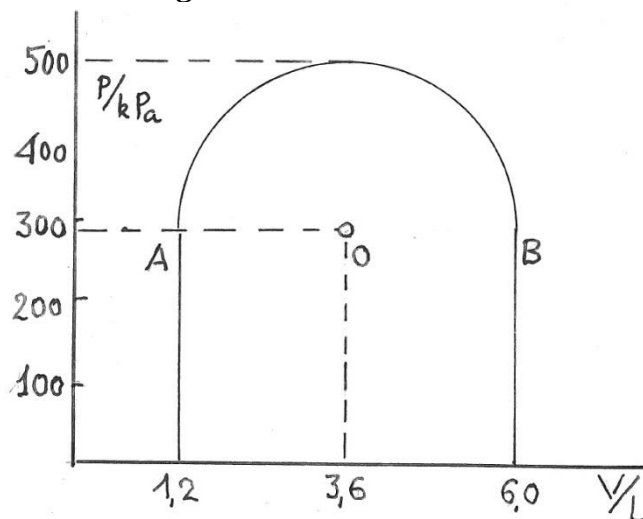
Ahora relacionamos C_p con γ .

$$C_p - C_v = R ; \frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow C_v = \frac{C_p}{\gamma} \Rightarrow C_p - \frac{C_p}{\gamma} = R \Rightarrow C_p = \frac{R}{1 - \frac{1}{\gamma}} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (3)$$

Sustituyendo en (1), las ecuaciones (2) y (3) resulta:

$$H_2 - H_1 = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left[T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_1 \right] = \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

30.-(350) *Un gas ideal se encuentra confinado en un cilindro vertical dotado de un pistón. Se le suministran al gas 5,79 kJ de energía con el fin de aumentar su temperatura. El peso del pistón se ajusta de tal modo que el estado termodinámico del gas cambia del punto A al punto B a lo largo del semicírculo mostrado en la figura. Determinar el cambio de energía interna del gas.*



Propuesto Olimpiadas de Física (Universidad de Toronto)

La variación de energía interna del gas viene dado por la ecuación

$$\Delta U = Q + W$$

El W es positivo si se le suministra al gas y negativo si es el gas el que lo hace contra el exterior.

Si nos fijamos en la gráfica el trabajo viene determinado por el área comprendida entre la transformación y el eje del volumen. Basta medir esa área para saber el valor del trabajo.

La citada área se compone de un rectángulo y de un círculo. El cálculo del área del rectángulo es inmediato

$$\begin{aligned} A_r &= P \cdot \Delta V = P_A \cdot (V_B - V_A) = 300 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (6,0 - 1,2) \text{L} = 300 \cdot 10^3 \cdot 4,8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{L} \Rightarrow \\ &\Rightarrow A_r = 300 \cdot 10^3 \cdot 4,8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-3} \text{m}^3 = 1440 \text{J} \end{aligned}$$

Aparentemente en la figura aparece un semicírculo pero en la realidad esto no es así ya que las escalas de los ejes son distintas. Lo que existe es una semi-elipse cuyos semiejes son respectivamente (6,0-3,6) medido en L y (500-300) medido en kPa.

El área de una elipse es: $A_E = \pi a b$, por tanto, el área de la semi-elipse es:

$$A_{SE} = \frac{\pi ab}{2} = \frac{\pi \cdot (6,0 - 3,6) \text{L} \cdot (500 - 300) \text{kPa}}{2} = 754 \text{kPa} \cdot \text{L} = 754 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-3} \text{m}^3 = 754 \text{J}$$

Este trabajo es negativo ya que lo realiza el sistema. Obsérvese que aumenta el volumen.

$$\Delta U = 5790 - (1440 + 754) = 3596 \text{ J}$$

Al ser la figura una elipse es posible encontrar una ecuación explícita, pero si la curva fuese tal que no se encontrase una ecuación de la misma, el problema solamente se podría resolver por un método numérico de aproximación. Vamos a aplicar este método al caso que nos ocupa y veremos que se puede cometer un error tan pequeño como deseemos.

Imaginemos un área que tenga por altura la Presión y por base un incremento de volumen ΔV , su área es $P \cdot \Delta V$. El procedimiento es dividir la superficie en rectángulos y sumar las áreas de esos rectángulos.

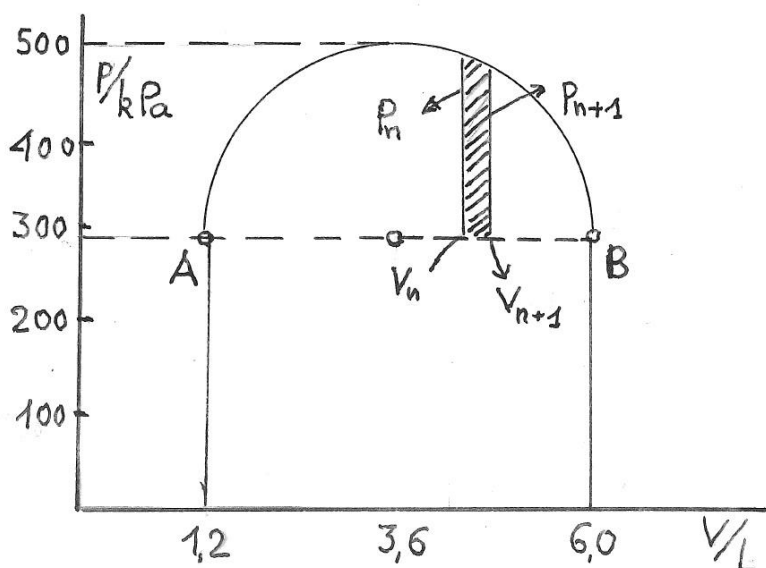


Fig.2

En la figura 2 hemos tomado dentro del semicírculo una banda de superficie limitada por las presiones P_n y P_{n+1} y los volúmenes V_n y V_{n+1} . Calculamos P_n y P_{n+1} hallamos la media aritmética

$$P_m = \frac{P_n + P_{n+1}}{2}$$

A continuación calculamos V_n y V_{n+1} y hallamos $\Delta V = V_{n+1} - V_n$

El producto $P_m \cdot \Delta V$ nos da el área de la banda elegida. Operamos con el resto de las bandas y sumamos todos los términos con lo que obtenemos la mitad del área.

Primero vamos a determinar los valores de la presión y sus correspondientes volúmenes.

Observemos la figura 3, AB es el radio de la circunferencia, pero su valor depende de la escala de los ejes. Si nos referimos al eje de los volúmenes, entonces $AB = 6,0 - 3,6$ L, pero si nos referimos al eje de las presiones $AB = 500 - 300$ kPa.

Para un ángulo cualquiera representado en θ , el volumen es:

$$AB \cdot \cos \theta = (6,0 - 3,6) \cos \theta$$

Para ese mismo ángulo y referido a las presiones:

$$AB \cdot \sin \theta = (500 - 300) \sin \theta$$

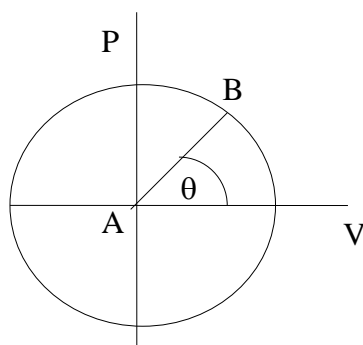


Fig.3

Escogemos intervalos de ángulos de 10° en 10° y el valor del volumen es, tal como se ha explicado, $(6,0-3,6) \cdot \cos(\text{ángulo})$ y la presión es. $(500-300) \cdot \sin(\text{ángulo})$. Los valores los agrupamos en una tabla

ángulo	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Volumen/L	2,4	2,36	2,26	2,08	1,84	1,54	1,2	0,82	0,42	0
Presión/kPa	0	34,7	68,4	100	128,6	153,2	173,2	187,9	197	200
ΔV		0,04	0,10	0,18	0,24	0,3	0,34	0,38	0,40	0,42
P_{medio}		17,35	51,55	84,2	114,3	140,9	163,2	180,6	192,5	198,5
$P_{\text{medio}} \cdot \Delta V$		0,69	5,16	14,3	27,4	42,3	55,5	68,6	77	83,4

La suma de los términos de la última fila es 374,4 kPa.L. Como es la mitad del círculo $A_c = 748,7$ kJ.L.

El error cometido es:

$$\frac{754 - 748,7}{754} \cdot 100 = 0,7\%$$

Si en lugar de escoger intervalos de 10° en 10° los escogemos de 5° en 5° y hacemos el mismo procedimiento el resultado es: 753 kJ.

El error cometido es:

$$\frac{754 - 753}{754} \cdot 100 = 0,13\%$$

