

31.-(354) Un kilogramo de aire $T_1= 523$ K, presión $P_1=1$ atm, densidad $d_1=0,675$ kg/m³, describe el siguiente ciclo termodinámico: 1.2 Compresión adiabática hasta 25 atm. 2.3 Isoterma recibiendo 400 kJ de energía calorífica. 3.4. Expansión adiabática hasta la presión inicial. 4.1 Transformación isobárica hasta el estado inicial.

a) Determinar las coordenadas termodinámicas de 1, 2, 3 y 4.

b) Calcular la variación de entropía en las cuatro transformaciones de que consta el ciclo.

c) Calcular la variación de energía interna en los cuatro tramos del ciclo.

d) Trabajo total del ciclo.

e) Representación del ciclo en los diagramas P-V y T- S

Datos. El aire se considera como gas perfecto con $C_p = 29$ J/mol*K. Las transformaciones efectuadas en el ciclo son procesos reversibles.

a) Calculamos el volumen de aire:
$$V = \frac{m}{d_1} = \frac{1 \text{ kg}}{0,675 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 1,48 \text{ m}^3$$

Calculamos los moles de aire:
$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 1,48 \cdot 10^3 \text{ L}}{0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 523 \text{ K}} = 34,5 \text{ mol}$$

Coordenadas termodinámicas de 1: $P_1 = 1$ atm, $V_1=1,48$ L , $T_1 = 523$ K

Transformación adiabática de 1 a 2.

Calculamos C_v y γ . $C_v=C_p-R=29-8,3=20,7$ J/mol K ; $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{29}{20,7} = 1,40$

$$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma \Rightarrow 1 \cdot 1,48^{1,4} = 25 \cdot V_2^{1,4} \Rightarrow V_2 = \frac{1,48}{25^{1/1,4}} \Rightarrow V_2 = 0,149 \text{ m}^3$$

Para calcular T_2 , utilizamos la ecuación de los gases perfectos.

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{n R} = \frac{25 \cdot 0,149 \cdot 10^3}{34,5 \cdot 0,082} = 1317 \text{ K}$$

Coordenadas termodinámicas de 2: $P_2 = 25$ atm, $V_1=0,149$ m³ , $T_1 = 1317$ K

Calentamiento isotérmico de 2 a 3.

Primer principio de la termodinámica. $\Delta U = Q + W$ (criterio de signos, calor y trabajo realizado desde el exterior sobre el sistema positivo y si lo realiza el sistema hacia el exterior negativo).

$$W = - \int_{0,149}^{V_3} P dV = - \int_{0,149}^{V_3} \frac{nRT_2}{V} dV = -34,5 \cdot 8,31 \cdot 1317 \cdot \ln \frac{V_3}{0,149}$$

En una transformación isoterma de un gas perfecto $\Delta U=0$

$$Q = -W \Rightarrow 400 \cdot 10^3 = 3,78 \cdot 10^5 \cdot \ln \frac{V_3}{0,149} \Rightarrow 1,058 = \ln \frac{V_3}{0,149} \Rightarrow \frac{V_3}{0,149} = e^{1,058} \Rightarrow V_3 = 0,43 \text{ m}^3$$

Para calcular P_3 , utilizamos la ecuación de los gases perfectos.

$$P_3 = \frac{n R T_3}{V_3} = \frac{34,5 \cdot 0,082 \cdot 1317}{0,43 \cdot 10^3} = 8,7 \text{ atm}$$

Coordenadas termodinámicas de 3: $P_3 = 8,7 \text{ atm}$, $V_3=0,43 \text{ m}^3$, $T_3 = 1317 \text{ K}$

Expansión adiabática de 3 a 4.

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma \Rightarrow 8,7 \cdot 0,43^{1,4} = 1 \cdot V_4^{1,4} \Rightarrow V_4 = 8,7^{\frac{1}{1,4}} \cdot 0,43 \Rightarrow V_4 = 2,01 \text{ m}^3$$

Para calcular T_4 , utilizamos la ecuación de los gases perfectos.

$$T_4 = \frac{P_4 V_4}{n R} = \frac{1 \cdot 2,01 \cdot 10^3}{34,5 \cdot 0,082} = 710 \text{ K}$$

Coordenadas termodinámicas de 4: $P_4 = 1,0 \text{ atm}$, $V_4=2,01 \text{ m}^3$, $T_4 = 710 \text{ K}$

b) El cambio de entropía entre dos estados es: $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$, en las transformaciones adiabáticas $\Delta Q = 0$, por tanto, $\Delta S = 0$.

En el calentamiento isotérmico de 2 a 3, el sistema recibe +400 kJ de energía calorífica y la temperatura en el proceso se mantiene a 1317 K

$$\Delta S_{2-3} = \frac{+400 \cdot 10^3}{1317} = +304 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

En la transformación isobárica de 4 a 1 se cierra el ciclo. En un ciclo termodinámico la variación de entropía es cero, por tanto, en la transformación isobárica de este ciclo.

$$\Delta S_{\text{ciclo}} = 0 = +304 + \Delta S_{4-1} \Rightarrow \Delta S_{4-1} = -304 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Podemos calcular la variación de entropía en la transformación isobárica mediante la ecuación

$$\Delta S_{4-1} = n C_p \ln \frac{T_1}{T_4} = 34,5 \cdot 29 \cdot \ln \frac{523}{710} = -306 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

La diferencia entre los valores anteriores se debe al redondeo que hacemos a lo largo de las distintas operaciones matemáticas con los números.

c) Adiabática 1-2

$$\Delta U_{1-2} = nC_v(T_2 - T_1) = 34,5 \cdot 20,7 \cdot (1317 - 523) = 567 \text{ kJ}$$

Isoterma 2-3

$$\Delta U_{2-3} = 0$$

Adiabática 3-4

$$\Delta U_{3-4} = nC_v(T_4 - T_3) = 34,5 \cdot 20,7 \cdot (710 - 1317) = -433 \text{ kJ}$$

Isobara 4-1

$$\Delta U_{4-1} = nC_v(T_4 - T_1) = 34,5 \cdot 20,7 \cdot (523 - 710) = -132 \text{ kJ}$$

Al completar el ciclo $\Delta U_{\text{ciclo}} = 0$.

d)

Adiabática 1-2

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U_{1-2} = W = +567 \text{ kJ}$$

Trabajo realizado desde el exterior sobre el sistema.

Isoterma 2-3

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 0 = Q + W \Rightarrow W = -Q_{2-3} = -400 \text{ kJ}$$

Trabajo realizado por el sistema hacia el exterior.

Adiabática 3-4

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow \Delta U_{3-4} = W = -433 \text{ kJ}$$

Trabajo realizado por el sistema hacia el exterior

Isobara 4-1

$$W = -P(V_1 - V_4) = -101325 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (1,48 - 2,01) \text{m}^3 = 5,37 \cdot 10^4 \text{ J} = 53,7 \text{ kJ}$$

$$W_{\text{ciclo}} = +567 - 400 - 433 + 53,7 = -212,3 \text{ kJ}$$

El signo negativo indica que es un trabajo realizado por el sistema hacia el exterior.

e) Para hacer el diagrama P-V obtendremos valores de la presión y del volumen en cada una de las transformaciones del ciclo

Adiabática 1-2. P inicial = 1 atm, V inicial = 1,48 m³

P final = 25 atm, V final = 0,149 m³

Ecuación

$$P V^\gamma = 1 \cdot 1,48^\gamma \Rightarrow V = \frac{1,48}{P^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{1,48}{P^{0,714}} \quad (1)$$

Dando valores a P entre 1 y 25 atm obtenemos los correspondientes de V y así construimos el tramo 1-2

Isoterma 2-3 P inicial = 25 atm , V inicial = 0,149 m³

P final = 8,6 atm , V final = 0,43 m³

Ecuación

$$P V = 25 \cdot 0,149 = 3,725 \Rightarrow V = \frac{3,725}{P} \quad (2)$$

Dando valores a P entre 25 y 8,6 atm obtenemos los correspondientes de V y así construimos el tramo 2-3

Adiabática 3-4 P inicial = 8,6 atm , V inicial = 0,43 m³

P final = 1,0 atm , V final = 2,01 m³

Ecuación

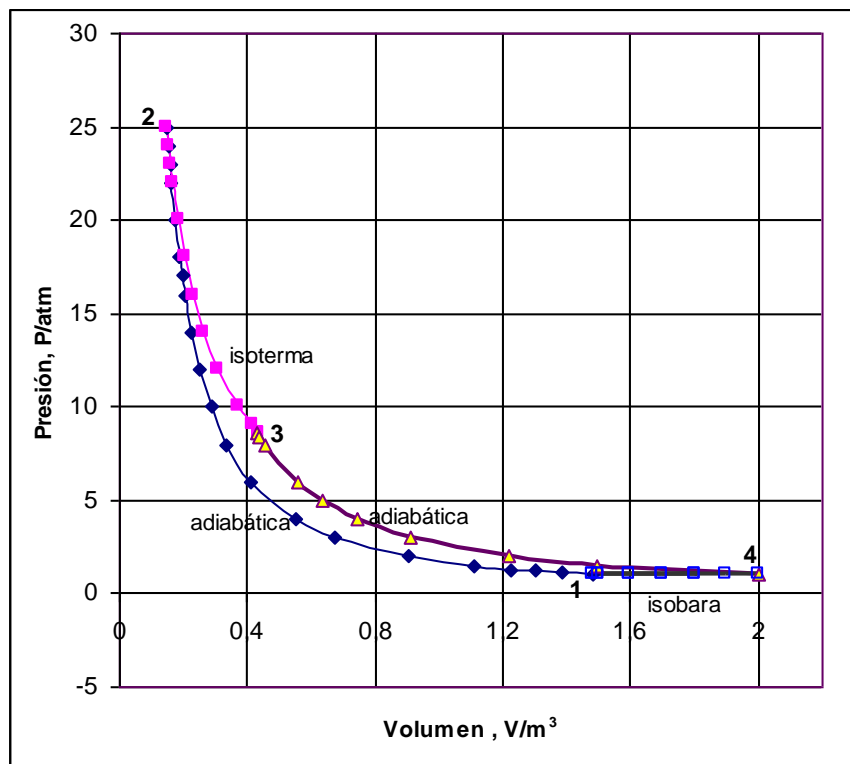
$$P V^\gamma = 8,6 \cdot 0,43^\gamma \Rightarrow V = \frac{8,6^{\frac{1}{\gamma}} \cdot 0,43}{P^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{2,0}{P^{0,714}} \quad (3)$$

Dando valores a P entre 8,6 y 1,0 atm obtenemos los correspondientes de V y así construimos el tramo 3-4.

Isobara 3-4

Basta dar valores al volumen entre 2,01 y 1,48, pues a cada valor del volumen la presión es siempre 1 atmósfera.

La gráfica P-V construida tal como se ha dicho y utilizando una hoja de cálculo es la siguiente:



La temperatura es una magnitud termodinámica de medida directa en un sistema, no lo es la entropía ya que en la termodinámica clásica solamente se miden diferencias de entropías entre dos estados, esto significa que en el diagrama T-S lo correcto es pedir el diagrama T- ΔS y por ello nosotros partimos de la ecuación

$$S = C_v \ln T + R \ln V + s_0$$

En la anterior ecuación s_0 es una constante que no se puede determinar por métodos puramente termodinámicos clásicos, por ello nosotros representaremos T frente a $S-s_0$. Calculamos $S-s_0$ en cada uno de los tramos del ciclo.

Tramo 1-2

$$S_1 - s_0 = 20,7 \cdot \ln 523 + 8,31 \cdot \ln 1,48 = 132,8$$

$$S_2 - s_0 = 20,7 \cdot \ln 1317 + 8,31 \cdot \ln 0,149 = 132,8$$

En el tramo 1-2 no hay variación de entropía, puesto que la transformación es adiabática. La temperatura aumenta desde 523 a 1317, la gráfica es una línea vertical entre ambas temperaturas

Tramo 2-3

$$S_3 - s_0 = 20,7 \cdot \ln 1317 + 8,31 \cdot \ln 0,43 = 141,7$$

El tramo 2-3 es una isoterma luego T es constante y la variación de entropía $S-s_0$ aumenta de 132,8 a 141,7 J/kg. La gráfica es una línea horizontal.

Tramo 3-4

$$S_3 - s_o = 20,7 \cdot \ln 710 + 8,31 \cdot \ln 2,01 = 141,7$$

La entropía es la misma en 3 que en 4 al ser una transformación adiabática, pero la temperatura disminuye desde 1317 a 710. La gráfica es una línea vertical.

Tramo 4-1

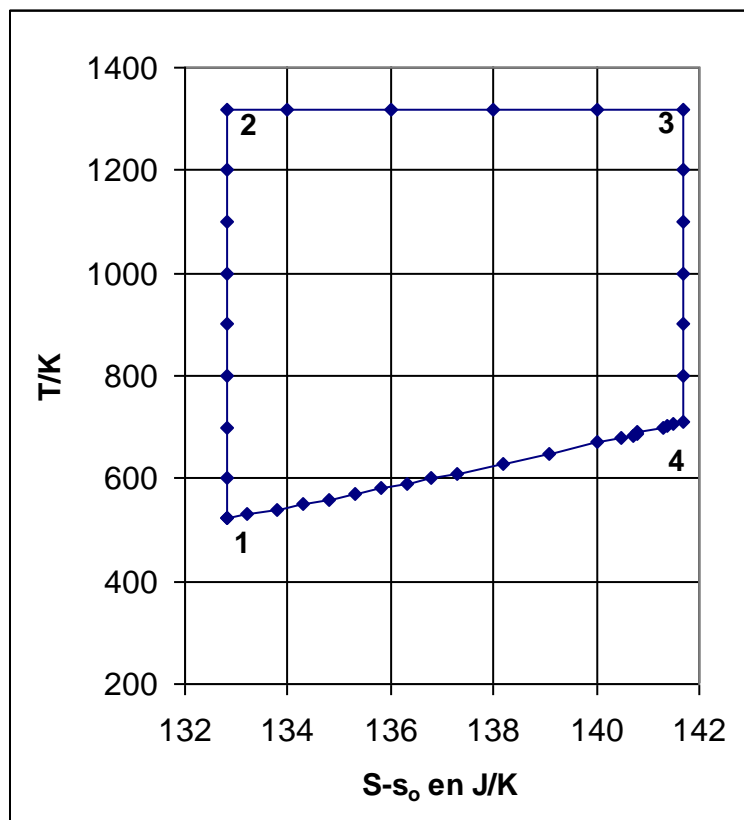
La entropía disminuye desde 141,7 a 132,8 a lo largo de una isobara. La temperatura disminuye desde 710 a 523 K. La forma de operar es elegir una temperatura intermedia, por ejemplo 680 K, determinar el volumen ya que

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'} \Rightarrow \frac{2,01}{710} = \frac{V'}{680} \Rightarrow V' = 1,93 \text{ m}^3$$

Aplicamos la ecuación

$$S - s_o = 20,7 \ln 680 + 8,31 \ln 1,93 = 140,5 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

La operación anterior se puede repetir con otras temperaturas y así se obtiene la curva que enlaza el estado 4 con el 1.



32.-(374). Un mol de un gas ideal que se encuentra a la temperatura T_o , se comprime adiabáticamente hasta que su presión se hace k veces mayor. Calcular a) la temperatura del gas después de la compresión, b) el trabajo realizado sobre el gas, c) la variación de entalpía

a) Designamos con P_o la presión inicial del gas y con V_o su volumen. Después de la compresión su volumen es V_f y su presión $k P_o$. Entre los dos estados aplicamos la ecuación de los gases perfectos y la ecuación de la adiabática.

$$P_o V_o = RT_o ; kP_o V_f = RT_f \Rightarrow \frac{k V_f}{V_o} = \frac{T_f}{T_o} \Rightarrow \frac{V_f}{V_o} = \frac{T_f}{k T_o}$$

$$P_o V_o^\gamma = kP_o V_f^\gamma \Rightarrow \left(\frac{V_f}{V_o}\right)^\gamma = \frac{1}{k} \Rightarrow \left(\frac{T_f}{k T_o}\right)^\gamma = \frac{1}{k} \Rightarrow \left(\frac{T_f}{T_o}\right)^\gamma = k^{\gamma-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_f = T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

b) De acuerdo con el primer principio de la termodinámica y dado que el proceso adiabático supone que $Q=0$, luego

$$\Delta U = W = C_v (T_f - T_o) = C_v \left(T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_o \right) = C_v T_o \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Para un gas ideal

$$C_p - C_v = R ; \frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow \gamma C_v - C_v = R \Rightarrow C_v = \frac{R}{\gamma-1}$$

Finalmente

$$W = C_v T_o \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) = \frac{R T_o}{\gamma-1} \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right)$$

c) La función de estado entalpía se define como $H = U + PV$. Aplicamos dicha ecuación a los estados inicial y final

$$H_i = U_i + P_o V_i ; H_f = U_f + k P_o V_f \Rightarrow \Delta H = H_f - H_i = \Delta U + P_o (k V_f - V_i)$$

Sustituimos los volúmenes en función de la ecuación de los gases perfectos

$$\Delta H = \frac{R T_o}{\gamma - 1} \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + P_o \left(k \frac{R T_f}{k P_o} - \frac{R T_o}{P_o} \right) = \frac{R T_o}{\gamma - 1} \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + R (T_f - T_o) \Rightarrow$$

$$\Delta H = \frac{R T_o}{\gamma - 1} \left(k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) + R \left(T_o k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - T_o \right) = R T_o \left(\frac{k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\gamma - 1} + k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right) \Rightarrow$$

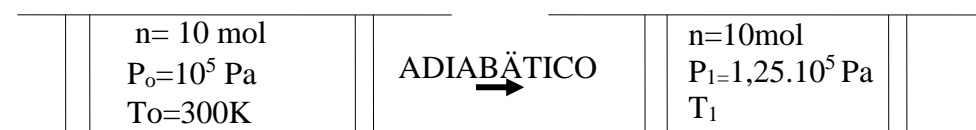
$$\Delta H = R T_o \left(\frac{k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + (\gamma - 1) k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\gamma - 1} \right) = R T_o \left(\frac{(\gamma - 1) k^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\gamma - 1} \right)$$

33.-(386)-Un cilindro consta de dos émbolos de sección unidad que pueden moverse. Entre ambos émbolos hay 10 moles de un gas perfecto cuyo coeficiente $\gamma = 1,4$ y que se encuentra a la presión de 10^5 Pa y a la temperatura de 300 K. El émbolo situado a la izquierda se desplaza sin rozamiento, el situado a la derecha tiene un rozamiento equivalente a una presión de $0,25 \cdot 10^5$ Pa, (esto debe interpretarse que si la presión alcanza $1,25 \cdot 10^5$ Pa, el émbolo comienza a desplazarse). Las paredes del cilindro y los émbolos son adiabáticos. La presión exterior es 10^5 Pa.

a) Se comprime muy lentamente el gas moviendo de izquierda a derecha el émbolo de la izquierda hasta que la presión del gas alcanza $1,25 \cdot 10^5$ Pa que es cuando puede desplazarse el émbolo de la derecha. Al llegar a esta situación se pide: la presión, temperatura y volumen del gas y el trabajo realizado.

b) A partir del instante anterior se desplaza de manera muy lenta el émbolo de la izquierda desplazándolo una distancia de 0,5 m. Se pide: la presión, temperatura y volumen del gas y el trabajo realizado.

a) En la figura inferior se ha hecho un esquema del proceso



Calculamos el volumen del gas en el estado inicial

$$P_o V_o = nRT_o \Rightarrow V_o = \frac{10 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K}}{10^5 \text{ Pa}} = 0,2494 \text{ m}^3$$

Al ser el proceso adiabático, aplicamos su ecuación

$$P_o V_o^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow V_1^\gamma = \frac{P_o V_o^\gamma}{P_1} \Rightarrow V_1 = \left(\frac{P_o}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_o = \left(\frac{1}{1,25} \right)^{\frac{1}{1,4}} 0,2494 = 0,2127 \text{ m}^3$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos al estado 1.

$$P_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{1,25 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 0,2127 \text{ m}^3}{10 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = 319,8 \text{ K}$$

Otra manera de calcular la temperatura es aplicar el hecho de que la transformación entre los dos estados es isoentrópica.

$$\Delta S = 0 = C_p \ln \frac{T_1}{T_0} - R \ln \frac{P_1}{P_0} = C_p \ln \frac{T_1}{300} - 8,314 \ln \frac{1,25 \cdot 10^5}{10^5} = C_p \ln \frac{T_1}{300} - 1,855 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T_1}{300} = \frac{1,855}{C_p} \Rightarrow T_1 = 300 \cdot e^{\frac{1,855}{C_p}}$$

Calculamos C_p a partir del dato del problema, $\gamma = 1,4$.

$$1,4 = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow C_v = \frac{C_p}{1,4}; \quad C_p - C_v = R \Rightarrow C_p - \frac{C_p}{1,4} = R \Rightarrow C_p = \frac{R}{1 - \frac{1}{1,4}} = 29 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$$

Sustituyendo en T_1 .

$$T_1 = 300 \cdot e^{\frac{1,855}{29}} = 319,8 \text{ K}$$

La variación de energía interna es:

$$\Delta U = n C_v (T_1 - T_0) = 10 \text{ mol} \cdot \frac{29 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}}{1,4} \cdot (319,8 - 300) \text{ K} = 2,10 \cdot 10^3 \text{ J}$$

b) A partir del estado 1 se empieza a desplazar el embolo de la derecha. Si se desplaza una longitud ΔL_1 muy pequeña, la presión del gas aumenta ΔP también muy pequeño, pero como el proceso es lento el émbolo de la derecha se desplaza una longitud ΔL de modo que la presión del gas no varía. Los dos émbolos se mueven hacia la derecha de tal modo que la presión del gas se mantiene constante, el proceso es **isobárico**.

El émbolo de la izquierda se desplaza hacia la derecha un volumen $A \cdot 0,5$ metros y el de la derecha se desplaza hacia su derecha un volumen $A \cdot L$. El volumen final del gas es:

$$V_2 = V_1 - 0,5A + AL = 0,2127 - 0,5 + L = -0,2873 + L$$

El trabajo ejercido por el émbolo de la izquierda se realiza contra la presión de $1,25 \cdot 10^5$ Pa :

$$W_1 = -P \Delta V = -1,25 \cdot 10^5 \cdot (-0,5) = 0,625 \cdot 10^5 \text{ J}$$

El trabajo ejercido por el émbolo de la derecha se realiza contra la presión exterior $1,00 \cdot 10^5$ Pa :

$$W_2 = -P \Delta V = -1,00 \cdot 10^5 \cdot (+L) = -10^5 \cdot L \text{ J}$$

El trabajo total es:

$$W_T = 0,625 \cdot 10^5 - 10^5 L = 10^5 (0,625 - L) = n C_v (T_2 - T_1) \Rightarrow$$

$$10^5 (0,625 - L) = 10 \cdot \frac{29}{1,4} (T_2 - 319,8)$$

Aplicamos la ecuación de los gases entre los estados 1 y 2, ligados por una transformación a presión constante.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{0,2127}{319,8} = \frac{-0,2873 + L}{T_2} \Rightarrow 6,651 \cdot 10^{-4} T_2 = L - 0,2873 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = 6,651 \cdot 10^{-4} T_2 + 0,2873$$

Sustituyendo

$$10^5 (0,625 - 6,651 \cdot 10^{-4} T_2 - 0,2873) = 207,14 (T_2 - 319,8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,3377 \cdot 10^5 - 66,51 T_2 = 207,14 T_2 - 6,624 \cdot 10^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{10^5 (0,3377 + 0,6624)}{207,14 + 66,51} = 365,5 \text{ K}$$

El valor de L es

$$: L = 6,651 \cdot 10^{-4} \cdot 365,5 + 0,2873 = 0,53 \text{ m} \Rightarrow V_2 = 1 \text{ m}^2 \cdot 0,53 \text{ m} = 0,53 \text{ m}^3$$

El valor numérico del trabajo es:

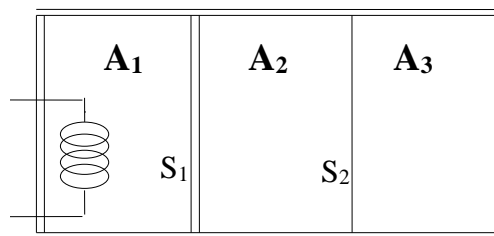
$$W_T = 0625 \cdot 10^5 - 10^5 \cdot 0,53 = 9,5 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Como el trabajo es positivo, éste se ha realizado desde el exterior sobre el sistema.

34. (388)-Considerar un cilindro cerrado cuyas paredes son adiabáticas. El cilindro está colocado horizontalmente y está dividido en tres compartimentos (A_1, A_2, A_3) separados por dos pistones S_1 y S_2 . Ambos pueden desplazarse a lo largo del cilindro sin rozamiento. El pistón S_1 es adiabático y el S_2 conductor del calor, Cada uno de los compartimentos contiene un mol de gas ideal a P_o, V_o y T_o siendo $C_V = 3/2 R$ y $C_p = 5/2 R$, $\gamma=5/3$.

En el compartimento A_1 existe un dispositivo que comunica calor al gas de manera muy lenta con lo que se consigue que el gas del compartimento A_3 adquiera una temperatura de $9T_o/4$.

- Determinar las coordenadas termodinámicas de cada gas.
- El trabajo y el calor realizado durante el proceso
- Los cambios de entropía



Propuesto en las Olimpiadas de India

a) Cuando se suministra calor al gas de A_1 de forma extraordinariamente lenta, el proceso es reversible termodinámicamente. Se suministra una cantidad de calor infinitamente pequeña y el gas de A_1 cambia de la misma manera sus variables termodinámicas, el ligero aumento de la presión desplaza el embolo S_1 a la derecha y a su vez S_2 se desplaza a la derecha. De forma reversible se ejerce trabajo del gas de A_1 al de A_2 y éste al de A_3 . En consecuencia el gas de A_1 cambia, en un proceso infinitamente lento sus variables termodinámicas a $P_1 = P_2, V_1$ y T_1 , y el gas dos a P_2, V_2 y $T_2 = 9T_o/4$, que a su vez adquiere esas variables el gas de A_3 .

A efectos de resolver el problema el pistón S_2 se limita a separar los gases los cuales se encuentran siempre en equilibrio termodinámico (tienen la misma presión, el mismo volumen y la misma temperatura), En definitiva consideramos que A_1 es un volumen inicial V_o , con un mol de gas, inicialmente a la presión P_o y temperatura T_o y al final a la presión P_2, V_2 y temperatura $9T_o/4$.

Dado que A_2 y A_3 se encuentran rodeadas de paredes adiabáticas, escribimos para el proceso de cambio de A_2 , la ecuación de la transformación adiabática $T V^{\gamma-1} = Cte$.

$$T_o V_o^{\gamma-1} = \frac{9T_o}{4} V_2^{\gamma-1} \Rightarrow V_2^{\gamma-1} = \frac{4}{9} \cdot V_o^{\gamma-1} \Rightarrow V_2 = V_o \left(\frac{4}{9} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_o \left(\frac{4}{9} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8 V_o}{27}$$

Aplicamos la ecuación de los gases ideales

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_2 \frac{8V_0}{27}}{\frac{9}{4} T_0} \Rightarrow P_2 = P_0 \frac{4}{8} = P_0 \frac{243}{32}$$

Si observamos la figura del enunciado cuando ocurre la transformación el volumen total no cambia

$$V_1 + 2V_2 = 3V_0 \Rightarrow V_1 = 3V_0 - 2 \frac{8V_0}{27} = V_0 \left(3 - \frac{16}{27} \right) = V_0 \frac{65}{27}$$

Aplicamos la ecuación de los gases al gas de A_1 .

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{\frac{243}{32} P_0 \cdot \frac{65 V_0}{27}}{T_1} \Rightarrow T_1 = T_0 \frac{243}{32} \cdot \frac{65}{27} = T_0 \frac{9 \cdot 65}{32} = T_0 \frac{585}{32}$$

b) Aplicamos la primera ley de la termodinámica a los gases de A_2 y A_3 .

$$\Delta U = 2 \cdot C_v \left(\frac{9T_0}{4} - T_0 \right) = W \Rightarrow W = 2 \cdot \frac{3}{2} R \frac{5T_0}{4} = \frac{15R T_0}{4} = \frac{15P_0 T_0}{4}$$

El trabajo es positivo ya que se suministra desde el exterior (esto es desde A_1)
Este trabajo lo hace el gas A_1 y, por tanto, su valor es negativo. Aplicamos la primera ley de la Termodinámica al gas A_1 .

$$\begin{aligned} \Delta U &= 1 \cdot C_v \left(\frac{585}{32} T_0 - T_0 \right) = Q + W = Q - \frac{15R T_0}{4} \Rightarrow Q = R T_0 \left(\frac{1755}{64} + \frac{15}{4} \right) \\ &\Rightarrow Q = R T_0 \left(\frac{1755 + 240}{64} \right) = \frac{1995}{64} P_0 V_0 \end{aligned}$$

c) Cambio de entropía para el gas A_1

$$\Delta S_1 = C_v \ln \frac{T_0 \frac{585}{32}}{T_0} + R \ln \frac{T_0 \frac{65}{27}}{T_0} = \frac{3}{2} 8,31 \cdot 2,906 + 8,31 \cdot 0,879 = 43,5 \frac{J}{K}$$

35. (393)-. *Admitimos que la atmósfera está formada por los gases diatómicos oxígeno y nitrógeno en la proporción de 21: 79. Suponemos además que la atmósfera es un gas ideal y que la aceleración de la gravedad g se mantiene constante y finalmente que el proceso en el aire es adiabático.*

Según estas suposiciones se puede demostrar que la presión se expresa mediante la siguiente ecuación.

$$p = p_0 \left(\frac{T_0 - \Gamma z}{T_0} \right)^\alpha$$

En esta ecuación p_0 y T_0 son la presión y la temperatura a nivel del mar ($z=0$), Γ se denomina tasa de retraso de la temperatura, esto significa, el cambio en la temperatura T con la altura z sobre la superficie terrestre siendo $\Gamma > 0$.

Datos : $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$, masas atómicas: $O = 16$ y $N = 14$

a) Obtener la relación entre el exponente α y γ ; y encontrar la ecuación que relaciona Γ en función de γ , g , R y μ (masa molecular promedio del aire).

b) Determinar la altura que alcanza la atmósfera. Tomar $p_0 = 1 \text{ atm}$ y $T_0 = 300 \text{ K}$

a) Teniendo en cuenta que el proceso es adiabático, y que el aire se comporta como un gas ideal, hallamos la relación entre la presión y la temperatura

$$\begin{aligned} pV^\gamma = \text{Cte} ; pV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{p} \Rightarrow p \left(\frac{RT}{p} \right)^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow \\ \Rightarrow p T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{Cte} \end{aligned}$$

Aplicamos la ecuación anterior al aire entre en la superficie terrestre y a una altura z

$$p_0 T_0^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p T_z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T_0}{T_z} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

En la ecuación del enunciado escribimos $T_z = T_0 - \Gamma z$; $p = p_0 \left(\frac{T_z}{T_0} \right)^\alpha$.

De las dos ecuaciones resulta:

$$\left(\frac{T_o}{T_z}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \left(\frac{T_z}{T_o}\right)^{\alpha} \Rightarrow \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln \frac{T_o}{T_z} = \alpha \ln \left(\frac{T_z}{T_o}\right) = -\alpha \ln \left(\frac{T_o}{T_z}\right) \Rightarrow -\alpha = \frac{\gamma}{1-\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{1,4}{0,4} = 3,5$$

La variación de la presión con la altura es. $dp = -\rho g dz$, el signo menos indica que la presión disminuye a medida que aumenta z .

Dado que el aire se considera como gas perfecto

$$p = \frac{\rho}{\mu} R T_z \Rightarrow \rho = \frac{p\mu}{R T_z} \Rightarrow dp = -\frac{p\mu}{R T_z} g dz \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{\mu g}{R T_z} dz = -\frac{\mu g}{R} \int \frac{dz}{T_o - \Gamma z} \quad (1)$$

Para resolver la integral del segundo miembro hacemos el cambio de variable $T_o - \Gamma z = x \Rightarrow -\Gamma dz = dx$

$$\int \frac{dz}{T_o - \Gamma z} = \int -\frac{dx}{\Gamma x} = -\frac{1}{\Gamma} \ln x = -\frac{1}{\Gamma} \ln (T_o - \Gamma z)$$

Volviendo a la ecuación (1) e integrando

$$\ln p = \frac{\mu g}{\Gamma R} \ln (T_o - \Gamma z) + Cte \Rightarrow \text{Cuando } z = 0, \ln p = \ln p_o \Rightarrow Cte = \ln p_o - \frac{\mu g}{\Gamma R} \ln T_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln p = \frac{\mu g}{\Gamma R} \ln (T_o - \Gamma z) + \ln p_o - \frac{\mu g}{\Gamma R} \ln T_o \Rightarrow \ln \frac{p}{p_o} = \frac{\mu g}{\Gamma R} \left[\ln \frac{T_o - \Gamma z}{T_o} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = p_o \left(\frac{T_o - \Gamma z}{T_o} \right)^{\frac{\mu g}{\Gamma R}} \quad (2)$$

Comparando la ecuación (2) con la del enunciado

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{\mu g}{\Gamma R} \Rightarrow \Gamma = \frac{\mu g}{R} \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

Para hallar el valor numérico de Γ debemos calcular el valor de μ .

$$\mu = \frac{21 \cdot 32 + 79 \cdot 28}{100} = 28,8 \frac{\text{g}}{\text{mol}} = 28,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Gamma = \frac{28,8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1,4-1}{1,4}}{8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}} = 9,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{K}}{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2} = 9,7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$$

b) La presión disminuye con la altura, por tanto llegara un momento en que la presión sea cero y hasta ese lugar existe atmósfera

$$0 = 101325 \left(\frac{300 - 9,7 \cdot 10^{-3} h}{300} \right)^{3,5} \Rightarrow \frac{300 - 9,7 \cdot 10^{-3} h}{300} = 0 \Rightarrow h = \frac{300}{9,7 \cdot 10^{-3}} = 3,09 \cdot 10^4 \text{ m}$$

36. (400)- *En un cilindro de paredes rígidas existe un pistón móvil sin rozamiento de masa $m=10$ kg, el cual está situado a la mitad de su altura. En la parte inferior existen $n=2$ moles de gas helio (considerado gas ideal) a la temperatura de 300 K. El pistón está unido a un muelle, en posición vertical, de constante elástica k , este muelle se encuentra unido a la base superior del cilindro y con su longitud natural (ni estirado ni comprimido). Ver la figura 1. La sección circular del pistón tiene un área $A = 500 \text{ cm}^2$.*

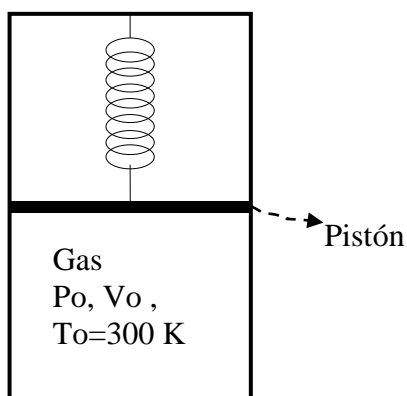


Fig.1

Se desprecian los calores específicos del pistón, cilindro y muelle, y la masa del muelle.

a) *Calcular la frecuencia f de las pequeñas oscilaciones del pistón cuando éste se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio.*

b) *Luego el pistón se empuja hacia abajo hasta que el volumen del gas se reduce a la mitad, y a continuación se suelta el pistón sin velocidad inicial. Determinar el volumen del gas cuando la velocidad del pistón es:*

$$v = \sqrt{\frac{4gV_0}{5A}}.$$

Todos los procesos son adiabáticos.

$$\text{Datos. } g = 9,8 \text{ m/s}^2 ; k = \frac{mgA}{V_0} ; R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} ; \gamma = \frac{5}{3}$$

Propuesto en las Olimpiadas de Asia.

a) En la posición inicial el gas ejerce sobre el pistón una fuerza vertical y hacia arriba que es igual al peso del pistón que es una fuerza vertical y hacia abajo, luego

$$P_0 A = mg \Rightarrow P_0 = \frac{mg}{A} = \frac{10 \cdot 9,8}{500 \cdot 10^{-4}} = 1960 \text{ Pa}$$

Supongamos que el pistón se desplaza hacia abajo una distancia pequeña que designamos con x . El gas cambia a una presión P_1 , a un volumen V_1 y a una temperatura T_1 ; como este proceso se considera adiabático podemos escribir.

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma \dots; \quad V_1 = V_0 - Ax \Rightarrow P_0 V_0^\gamma = P_1 (V_0 - Ax)^\gamma \Rightarrow P_1 = \frac{P_0 V_0^\gamma}{(V_0 - Ax)^\gamma}$$

Ahora sobre el pistón actúan: vertical y hacia arriba la fuerza que ejerce el gas, en la misma dirección y sentido la fuerza con que el muelle tira del pistón y hacia abajo el peso del mismo, estas fuerzas dan lugar a una aceleración hacia arriba del pistón, esto es, llevándolo a su posición inicial.

$$\frac{P_0 V_0^\gamma}{(V_0 - Ax)^\gamma} \cdot A + kx - mg = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \frac{P_0 V_0^\gamma}{(V_0 - Ax)^\gamma} \cdot A + \frac{mg A}{V_0} x - mg = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Teniendo en cuenta que x es un valor pequeño, hacemos la siguiente aproximación

$$\frac{P_0 V_0^\gamma}{(V_0 - Ax)^\gamma} = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{Ax}{V_0}\right)^\gamma} \approx P_0 \left(1 + \gamma \frac{Ax}{V_0}\right) \Rightarrow P_0 \left(1 + \gamma \frac{Ax}{V_0}\right) A + \frac{mg A}{V_0} x - mg = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0 \left(1 + \gamma \frac{Ax}{V_0}\right) A + \frac{mg A}{V_0} x - P_0 A = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow P_0 \gamma \frac{A^2 x}{V_0} + \frac{mg A}{V_0} x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(P_0 \gamma \frac{A^2}{V_0} + \frac{mg A}{V_0} \right) \cdot x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow \left(P_0 \gamma \frac{\left(\frac{mg}{P_0}\right)^2}{V_0} + \frac{mg \frac{mg}{P_0}}{V_0} \right) \cdot x = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m^2 g^2 \left(\frac{1 + \gamma}{P_0 V_0} \right) = m \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow mg^2 \left(\frac{1 + \gamma}{n R T_0} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{mg^2 \left(\frac{1 + \gamma}{n R T_0} \right)}$$

Sustituyendo valores numéricos

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{10 \cdot 9,8^2 \left(\frac{1 + \frac{5}{3}}{2 \cdot 8,314 \cdot 300} \right)} = 0,114 \text{ Hz}$$

b) En la figura 2 se indican los tres estados por los que pasa el sistema. Hacemos un balance de energías, teniendo en cuenta que los procesos de cambio son adiabáticos tal como indica el enunciado del problema

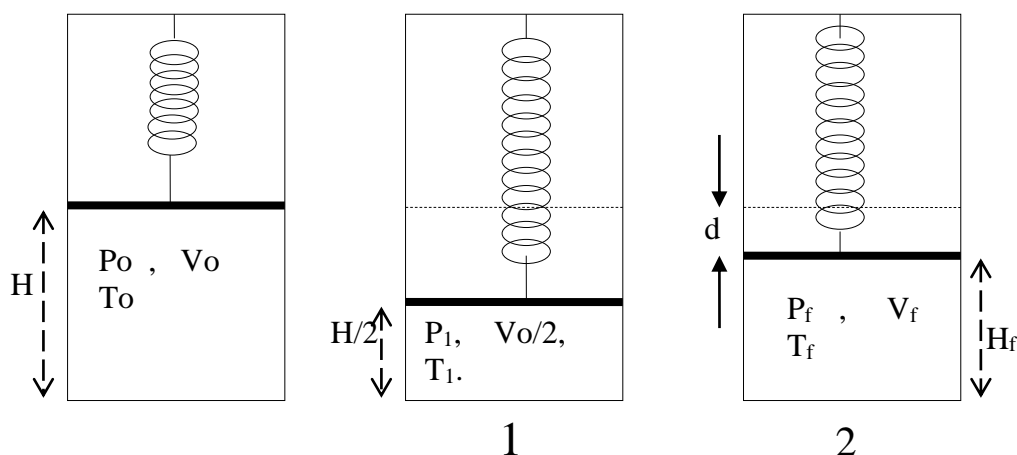


Fig. 2

Estado 1

Energía potencial del pistón: $mg \frac{H}{2}$, como $AH = V_o \Rightarrow mg \frac{V_o}{2A}$

Energía elástica del muelle: $\frac{1}{2}k \left(\frac{H}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}k \left(\frac{V_o}{2A} \right)^2$

Energía interna del gas: U_1

Estado 2

Energía potencial del pistón: $mg H_f$, como $AH_f = V_f \Rightarrow mg \frac{V_f}{A}$

Energía elástica del muelle: $\frac{1}{2}kd^2$, como $H_f + d = H \Rightarrow \frac{1}{2}k(H - H_f)^2 = \frac{1}{2}k \left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A} \right)^2$

Energía interna del gas: U_2

Energía cinética del gas: $\frac{1}{2}mv^2$

$$mg \frac{V_o}{2A} + \frac{1}{2}k \left(\frac{V_o}{2A} \right)^2 + U_1 = mg \frac{V_f}{A} + \frac{1}{2}k \left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A} \right)^2 + U_2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow$$

$$mg \frac{V_o}{2A} + \frac{1}{2}k \left(\frac{V_o}{2A} \right)^2 = mg \frac{V_f}{A} + \frac{1}{2}k \left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A} \right)^2 + (U_2 - U_1) + \frac{1}{2}mv^2 \quad (1)$$

Veamos el valor de $U_2 - U_1$

$$U_2 - U_1 = nC_v(T_f - T_1)$$

Entre el estado inicial y el estado 1 podemos escribir

$$P_o V_o = nRT_o; P_1 \frac{V_o}{2} = nRT_1 \Rightarrow \frac{P_o V_o}{P_1 \frac{V_o}{2}} = \frac{T_o}{T_1} \Rightarrow \frac{2P_o}{P_1} = \frac{T_o}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{P_1 T_o}{2P_o}$$

$$P_o V_o^\gamma = P_1 \left(\frac{V_o}{2}\right)^\gamma \Rightarrow P_1 = 2^\gamma P_o \quad T_1 = \frac{2^{\gamma-1} P_o T_o}{P_o} = 2^{\gamma-1} T_o$$

Entre el estado el estado 1 y el estado 2, podemos escribir

$$P_f V_f = nRT_f \Rightarrow T_f = \frac{P_f V_f}{nR} ; \frac{P_1 V_1^\gamma}{V_f^\gamma} = P_f \Rightarrow T_f = \frac{P_1 V_1^\gamma}{nR} = \frac{P_1 \left(\frac{V_o}{2}\right)^\gamma V_f^{1-\gamma}}{nR}$$

La diferencia de energías internas es:

$$U_2 - U_1 = nC_v \left[\frac{P_1 \left(\frac{V_o}{2}\right)^\gamma V_f^{1-\gamma}}{nR} - 2^{\gamma-1} T_o \right]$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$mg \frac{V_o}{2A} + \frac{1}{2} k \left(\frac{V_o}{2A}\right)^2 = mg \frac{V_f}{A} + \frac{1}{2} k \left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)^2 + nC_v \left[\frac{P_1 \left(\frac{V_o}{2}\right)^\gamma V_f^{1-\gamma}}{nR} - 2^{\gamma-1} T_o \right] + \frac{1}{2} mv^2$$

Vamos a sustituir valores numéricos en la ecuación anterior

$$V_o = \frac{nRT_o}{P_o} = \frac{2 \cdot 8,314 \cdot 300}{1960} = 2,545 \text{ m}^3 ; k = \frac{mgA}{V_o} = \frac{10 \cdot 9,8 \cdot 500 \cdot 10^{-4}}{2,545} = 1,925 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$P_1 = 2^\gamma P_o = 2^{\frac{5}{3}} \cdot 1960 = 6222,6 \text{ N} \quad mg \frac{V_o}{2A} = 10 \cdot 9,8 \frac{2,545}{2 \cdot 500 \cdot 10^{-4}} = 2494,1 \text{ J} ;$$

$$\frac{1}{2} k \left(\frac{V_o}{2A}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,925 \left(\frac{2,545}{2 \cdot 500 \cdot 10^{-4}}\right)^2 = 623,4 \text{ J}$$

$$mg \frac{V_f}{A} = \frac{10 \cdot 9,8}{2 \cdot 500 \cdot 10^{-4}} V_f = 1960 V_f ; \quad \frac{1}{2} k \left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,925}{(500 \cdot 10^{-4})^2} (2,545 - V_f)^2$$

$$\frac{1}{2} k \left(\frac{V_o}{A} - \frac{V_f}{A}\right)^2 = 385 (2,545 - V_f)^2$$

$$nCv \left[\frac{P_1 \left(\frac{V_o}{2} \right)^\gamma V_f^{1-\gamma}}{nR} - 2^{\gamma-1} T_o \right] = nCv \left[\frac{6222,6 \cdot \left(\frac{2,545}{2} \right)^{\frac{5}{3}}}{2 \cdot 8,314} V_f^{1-\gamma} - 2^{\frac{2}{3}} \cdot 300 \right] =$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,314 (559,2 V_f^{1-\gamma} - 476,2) \Rightarrow 13947,6 V_f^{1-\gamma} - 11877,4$$

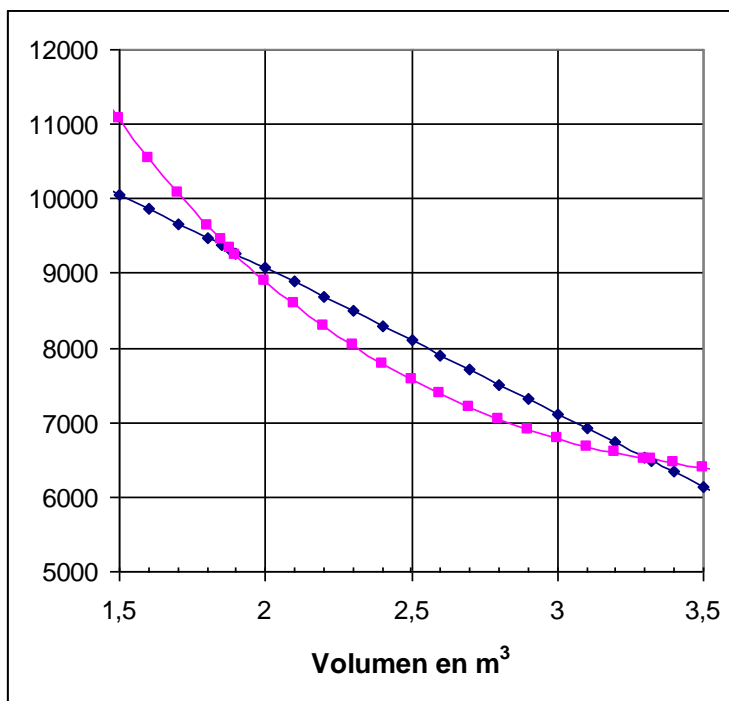
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{4gV_o}{5A} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot 2,545}{5 \cdot 500 \cdot 10^{-4}} = 1995,3 \text{ J}$$

La ecuación escrita con sus valores numéricos es:

$$2494,1 + 623,4 = 980 V_f + 385 (2,545 - V_f)^2 + 13947,6 V_f^{-\frac{2}{3}} - 11877,4 + 1995,3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12999,6 - 1960 V_f = 385 (2,545 - V_f)^2 + 13947,6 V_f^{-\frac{2}{3}}$$

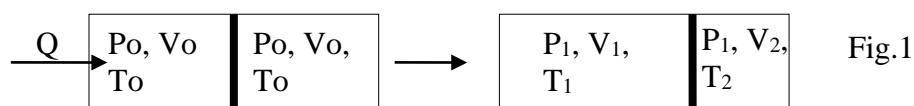
La ecuación anterior hay que resolverla por tanteo. Lo mejor es representar los dos miembros de la ecuación en una sola gráfica, como el primer miembro es una recta cortará a la representación del segundo miembro que es una curva y en ese punto o puntos de corte está la solución.



Hay dos soluciones una a $1,88 \text{ m}^3$ y otra a $3,32 \text{ m}^3$

37. (421)-Un cilindro aislado térmicamente del exterior está dividido en dos compartimentos del mismo volumen por medio de un pistón móvil que carece de masa y de rozamiento y que no es conductor el calor. En cada compartimento existe un mol del mismo gas ideal a la misma presión y temperatura. Por medio de una resistencia se comunica calor al sistema de dos maneras diferentes. 1) El calor Q aportado se transmite al gas de uno de los compartimentos 2) La mitad de Q se transmite al gas de un compartimento y la otra mitad al otro. Determinar en qué caso se produce mayor aumento de la presión.

1) Designamos con P_o y V_o , T_o a las variables termodinámicas de los gases. El proceso 1 se escenifica en la figura 1.



El calor Q recibido por el gas situado a la izquierda se emplea en aumentar la energía interna del gas y en realizar un trabajo comprimiendo al gas de la derecha. El gas de la derecha se comprime, recibe una cierta cantidad de trabajo el cual determina que su volumen disminuya y su temperatura aumente. Las presiones de los gases serán iguales cuando el sistema alcance el equilibrio.

Las variaciones de energía interna de los gases son:

$$\Delta U_1 = C_v(T_1 - T_o) \quad ; \quad \Delta U_2 = C_v(T_2 - T_o)$$

Como el gas de la derecha no recibe calor y está aislado la variación de energía interna U_2 mide el trabajo realizado por el gas de la izquierda. El calor Q es igual a:

$$Q = C_v(T_1 - T_o) + C_v(T_2 - T_o) = C_v(T_1 + T_2 - 2T_o)$$

Según la ecuación de los gases perfectos

$$T = \frac{PV}{R} \Rightarrow T_o = \frac{P_o V_o}{R} \quad ; \quad T_1 = \frac{P_1 V_1}{R} \quad ; \quad T_2 = \frac{P_1 V_2}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = C_v \left(\frac{P_1 V_1}{R} + \frac{P_1 V_2}{R} - 2 \frac{P_o V_o}{R} \right) = \frac{C_v}{R} [P_1 (V_1 + V_2) - P_o \cdot 2V_o]$$

Si designamos con V_T al volumen del cilindro se cumple que:

$$Q = \frac{C_v V_T}{R} (P_1 - P_o) \Rightarrow \quad P_1 = P_o + \frac{QR}{C_v V_T} \quad (1)$$

2) Cuando se suministra la mitad de Q a cada gas, la presión de cada gas es siempre igual y por consiguiente el pistón no se mueve, no hay trabajo de expansión, el volumen se mantiene constante, varía la presión y la temperatura. Designamos con P' la presión final de cada gas y con T' la temperatura final.

El calor suministrado al gas de la izquierda es $Q/2$ y su efecto es aumentar su energía interna

$$\frac{Q}{2} = C_v (T' - T_0) = C_v \left(\frac{P' V_0}{R} - \frac{P_0 V_0}{R} \right) = \frac{C_v V_0}{R} (P' - P_0) \Rightarrow Q = \frac{C_v 2 V_0}{R} (P' - P_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = \frac{C_v V_T}{R} (P' - P_0) \Rightarrow P' = P_0 + \frac{QR}{C_v V_T} \quad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2) se deduce que $P = P'$, esto es, la presión es la misma.

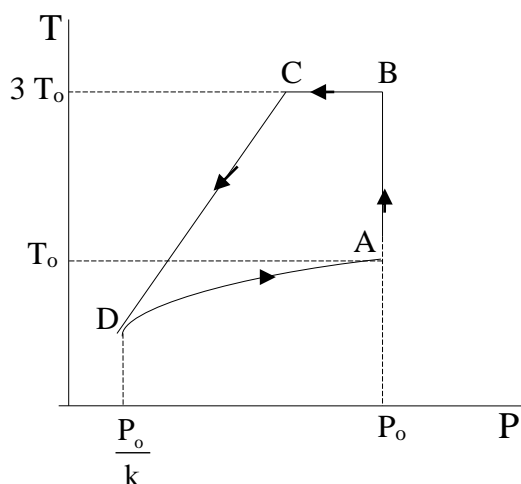
38. (429).-Se tienen n moles de un gas ideal monoatómico de constante $\gamma=5/3$ que evoluciona según el ciclo reversible ABCDA de la figura inferior.

Entre C y D el gas evoluciona a volumen constante hasta D donde la presión es P_0/k , siendo k una constante $k \geq 10$. El ciclo se cierra por un proceso adiabático entre D y A.

Calcular

- La temperatura en D.
- La presión en C y el volumen en D en función de k y el volumen V_A .
- Los trabajos en los procesos AB y BC.
- Los trabajos en los procesos CD y DA.
- Variación de entalpía en el proceso AB
- Calores implicado en los procesos BC y CD.
- Variación de entalpía en el ciclo
- Variación de entropía en el proceso AB.
- Variación de entropía en los procesos BC y CD
- Rendimiento de un ciclo de Carnot operando entre las temperaturas T_A y T_C .

Propuesto en examen de la Escuela de Ingeniería Aeronáutica de Madrid



- a) La ecuación de una adiabática es: $PV^\gamma = \text{Cte}$ y la de los gases perfectos $PV = nRT$. Combinado las dos ecuaciones

$$V = \frac{nRT}{P} \Rightarrow P \left(\frac{nRT}{P} \right)^\gamma = P^{1-\gamma} n^\gamma R^\gamma T^\gamma = \text{Cte}$$

Aplicando la ecuación anterior entre los estados A y D

$$P_0^{1-\gamma} n^\gamma R^\gamma T_0^\gamma = \left(\frac{P_0}{k} \right)^{1-\gamma} n^\gamma R^\gamma T_D^\gamma \Rightarrow P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma = \frac{P_0^{1-\gamma}}{k^{1-\gamma}} T_D^\gamma \Rightarrow T_D = T_0 k^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0 k^{\frac{2}{5}}$$

b) Aplicamos ley de los gases perfectos entre los estados A y B y a continuación entre B y C

$$\frac{P_o V_A}{T_o} = \frac{P_o V_B}{3T_o} \Rightarrow V_B = 3V_A ; \quad \frac{P_o 3V_A}{3T_o} = \frac{P_C V_C}{3T_o} \Rightarrow P_C V_C = 3P_o V_A$$

Aplicamos ley de los gases perfectos entre los estados C y D

$$\frac{P_C V_C}{3T_o} = \frac{\frac{P_o}{k} V_D}{T_D}; V_C = V_D \Rightarrow \frac{P_C}{3T_o} = \frac{\frac{P_o}{k}}{T_D} = \frac{\frac{P_o}{k}}{T_o k^{\frac{2}{5}}} \Rightarrow P_C = 3P_o k^{-\frac{3}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{3P_o V_A}{3P_o k^{-\frac{3}{5}}} = k^{\frac{3}{5}} V_A$$

Aplicamos ley de los gases perfectos entre los estados D y A.

$$\frac{\frac{P_o}{k} V_D}{T_o k^{\frac{2}{5}}} = \frac{P_o V_A}{T_o} \Rightarrow \frac{V_D}{k^{\frac{3}{5}}} = V_A \Rightarrow V_D = k^{\frac{3}{5}} V_A$$

Las coordenadas termodinámicas de A, B, C y D son:

$$\mathbf{A}(P_o, V_A, T_o) ; \quad \mathbf{B}(P_o, 3V_A, 3T_o) ; \quad \mathbf{C}\left(3P_o k^{-\frac{3}{5}}, V_A k^{\frac{3}{5}}, 3T_o\right) ;$$

$$\mathbf{D}\left(\frac{P_o}{k}, V_A k^{\frac{3}{5}}, T_o k^{\frac{2}{5}}\right)$$

c)

$$W_{AB} = P_o (V_B - V_A) = P_o (3V_A - V_A) = 2P_o V_A = 2nR T_o$$

$$W_{BC} = \int p dV = \int \frac{nR 3T_o}{V} dV = 3nR T_o \cdot \ln V \Big|_{V_B}^{V_C} = 3nR T_o \cdot \ln \frac{V_A k^{\frac{3}{5}}}{3V_A} = 3nR T_o \ln \left(\frac{k^{\frac{3}{5}}}{3} \right)$$

d)

$$W_{CD} = p \Delta V = 0$$

$$\Delta U_{DA} = W_{DA} = nC_V (T_A - T_D) = nC_V \left(T_0 - T_0 k^{-\frac{2}{5}} \right)$$

$$C_P - C_V = R ; \frac{C_P}{C_V} = \gamma \Rightarrow \gamma C_V - C_V = R \Rightarrow C_V = \frac{R}{\gamma - 1} = \frac{3}{2} R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{DA} = n \frac{R}{\gamma - 1} \left(T_0 - T_0 k^{-\frac{2}{5}} \right) = \frac{3}{2} n R T_0 \left(1 - k^{-\frac{2}{5}} \right)$$

e)

$$\Delta H_{AB} = nC_P (T_B - T_A) = nC_P (3T_0 - T_0)$$

$$C_P - C_V = R ; \frac{C_P}{C_V} = \gamma \Rightarrow C_P - \frac{C_P}{\gamma} = R \Rightarrow C_P = \frac{R}{1 - \frac{1}{\gamma}} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1} = \frac{5}{2} R$$

$$\Delta H_{AB} = n \frac{5}{2} R \cdot 2T_0 = 5nRT_0$$

f)

$$\Delta U_{BC} = Q_{BC} + W_{BC} \Rightarrow 0 = Q_{BC} + W_{BC} \Rightarrow Q_{BC} = -W_{BC} = -3nRT_0 \ln \left(\frac{k^{\frac{3}{5}}}{3} \right)$$

El calor entre los estados B y C es negativo, esto significa que es evacuado desde el sistema hacia el exterior.

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} + W_{CD} \Rightarrow \Delta U_{CD} = Q_{CD} = nC_V (T_D - T_C) = n \frac{R}{\gamma - 1} \left(T_0 k^{-\frac{2}{5}} - 3T_0 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_{CD} = \frac{3}{2} n R T_0 \left(k^{-\frac{2}{5}} - 3 \right)$$

Q_{CD} es negativo ya que el término del paréntesis es negativo para $k \geq 10$, por consiguiente el sistema cede calor al medio.

g) La entalpía es función de estado lo que implica que sus valores solo dependen del estado de partida y el de llegada y es independiente del modo en que realice la transformación, como es un ciclo y el punto de partida es igual al de llegada la variación de entalpía es cero.

h) La variación de entropía entre dos estados 1 y 2 está dada por la ecuación:

$$\Delta S = n C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Aplicamos la ecuación anterior a los estados AB

$$\Delta S_{AB} = n C_v \ln \frac{T_B}{T_A} + n R \ln \frac{V_B}{V_A} = n \frac{3}{2} R \ln \frac{3T_0}{T_0} + n R \ln \frac{3V_A}{V_A} = \frac{5}{2} n R \ln 3$$

i)

$$\Delta S_{BC} = n C_v \ln \frac{T_B}{T_C} + n R \ln \frac{V_B}{V_C} = n \frac{3}{2} R \ln 1 + n R \ln \frac{3V_A}{V_A k^3} = n R \ln 3 k^{-\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{CD} &= n C_v \ln \frac{T_D}{T_C} + n R \ln \frac{V_D}{V_C} = n \frac{3}{2} R \ln \frac{T_0 k^{\frac{2}{5}}}{3T_0} + n R \ln \frac{V_A k^{\frac{3}{5}}}{V_A k^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta S_{CD} = \frac{3}{2} n R \ln \frac{k^{-\frac{2}{5}}}{3} + n R \ln k^{-\frac{1}{15}} \end{aligned}$$

j) El foco caliente $T_C=3T_0$; el foco frío $T_A= T_0$

$$\eta = \frac{3T_0 - T_0}{3T_0} = \frac{2}{3}$$

39. (438)-Un cilindro adiabático A de sección 1 m^2 provisto de un émbolo adiabático, de masa despreciable y que puede deslizarse sin rozamiento, está situado inicialmente a una altura de 2 metros, contiene en su interior un depósito rígido diatérmico (que permite con facilidad el paso del calor) B, de capacidad 50 L que contiene 25 moles de un gas ideal de $C_v = 2,5R$ a 300 K. El resto del cilindro está ocupado por el mismo gas a 10^5 Pa de presión y 300 K.

A partir de este estado se comprime el gas de forma cuasiestática hasta que el émbolo disminuye su altura a 1,5 metros. En este instante y con el émbolo inmovilizado se produce la rotura del depósito B, alcanzándose un nuevo equilibrio.

A continuación el gas se expande contra una presión exterior de $1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ hasta alcanzar el equilibrio con el entorno

a. Determinar la temperatura y presión de los gases contenidos en A y B, justamente antes de romperse el depósito B.

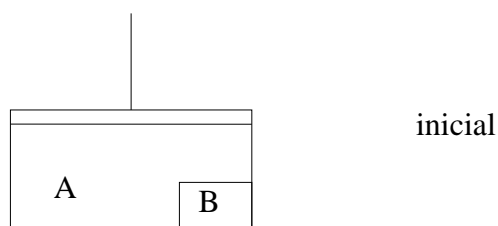
b. Temperatura y presión del gas del cilindro después de la rotura y de llegar al equilibrio.

c. Temperatura y presión del gas del cilindro cuando se ha alcanzado el equilibrio con el entorno

d. Variación de la entropía del sistema.

Examen. Escuela de Ingenieros Industriales. Madrid.

d) Calculamos el número de moles en A y la presión inicial en B, aplicando la ecuación de los gases perfectos.



$$V_A = 2 - 50 \cdot 10^{-3} = 1,95 \text{ m}^3$$

$$10^5 \cdot (2 - 50 \cdot 10^{-3}) = n \cdot 8,31 \cdot 300 \Rightarrow n = 78,2 \text{ mol} ;$$

$$P_B \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 25 \cdot 8,31 \cdot 300 \Rightarrow P_B = 1,247 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

El gas se comprime hasta que el émbolo queda a una altura de 1,5 metros

Calculamos el volumen y la presión en A, suponiendo que el proceso ocurre en dos etapas

. Primero se comprime el gas de A y segundo el gas de B se calienta y cambia su presión

El proceso de compresión de A es adiabático, lo que conlleva que la variación de entropía es cero

Esta etapa la denominamos 1.

$$V_{A1} = 1,5 - 50 \cdot 10^{-3} = 1,45 \text{ m}^3$$

$$P_{A1} \cdot 1,45 = 78,2 \cdot 8,31 \cdot T_{A1}$$

$$\Delta S = 0 = n \left(C_v \ln \frac{T_{A1}}{300} + R \ln \frac{1,45}{1,95} \right) = 78,2 \cdot 2,5 \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{T_{A1}}{300} = -78,2 \cdot 8,31 \cdot (-0,2963) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{T_{A1}}{300} = 0,1185 \Rightarrow \frac{T_{A1}}{300} = e^{0,1185} \Rightarrow T_{A1} = 337,7 \text{ K}$$

La segunda etapa es que parte de la energía de A se transmite al gas B hasta que se igualan las temperaturas.

Teniendo en cuenta que el cilindro está aislado la energía se conserva. Aplicamos el principio de compartición de la energía

$$n_A \frac{3}{2} RT_A + n_B \frac{3}{2} RT_B = (n_A + n_B) \frac{3}{2} RT \Rightarrow T = \frac{n_A T_A + n_B T_B}{n_A + n_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{78,2 \cdot 337,7 + 25 \cdot 300}{78,2 + 25} = 328,6 \text{ K}$$

La presión del gas en el recipiente B la deducimos aplicando La ley de los gases perfectos

$$P_{B1} = \frac{n_B R T}{V_B} = \frac{25 \cdot 8,31 \cdot 328,6}{50 \cdot 10^{-3}} = 1,37 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

En resumen el gas A se encuentra ocupando un volumen de $1,45 \text{ m}^3$, a una temperatura de $328,6 \text{ K}$, siendo su presión

$$P_{A1} = \frac{n_{A1} R T}{V_{A1}} = \frac{78,2 \cdot 8,31 \cdot 328,6}{1,45} = 1,47 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

El gas en B está también a $328,6 \text{ K}$, ocupa el volumen de 50 litros y su presión es $1,37 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

b)Etapa 2.

Al romperse el recipiente B los gases se mezclan ocupando todo el volumen que es $1,5 \text{ m}^3$, la temperatura es la misma anterior $328,6 \text{ K}$ y el numero de moles $n = 78,2 + 25 = 103,2$.

Calculamos la nueva presión aplicando la ley de los gases perfectos

$$P_2 = \frac{(n_A + n_B)RT}{V} = \frac{103,2 \cdot 8,31 \cdot 328,6}{1,5} = 1,88 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

c) Etapa 3

Expansión del gas contra la presión exterior de $1,5 \cdot 10^5$ Pa. El proceso finaliza cuando se igualen las presiones, esto es, cuando el gas del cilindro a tenga una presión de $1,5 \cdot 10^5$ Pa.

Ahora el gas ejerce un trabajo contra el entorno. Aplicamos el primer principio de la Termodinámica. En este caso $Q=0$ ya que no se intercambia calor con el exterior

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow n C_v (T_3 - 328,6) = W$$

El criterio de signos empleado es que un trabajo hecho por el sistema contra el entorno es negativo

$$W = -P_{\text{exterior}} \Delta V = -1,5 \cdot 10^5 (V_3 - 1,5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 103,2 \cdot 2,5 \cdot 8,31 (T_3 - 328,6) = -1,5 \cdot 10^5 (V_3 - 1,5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_3 - 328,6 = -69,96 (V_3 - 1,5) \Rightarrow T_3 = 328,6 + 104,94 - 69,96 V_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_3 = \frac{433,54 - T_3}{69,96}$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre los dos estados

$$\frac{1,88 \cdot 10^5 \cdot 1,5}{328,6} = \frac{1,5 \cdot 10^5 \cdot V_3}{T_3} \Rightarrow T_3 = \frac{328,6 \cdot 1,5 \cdot 10^5}{1,88 \cdot 10^5 \cdot 1,5} V_3 = 174,78 V_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_3 = \frac{433,54 - 174,78 V_3}{69,96} \Rightarrow 69,96 V_3 = 433,54 - 174,78 V_3 \Rightarrow V_3 = 1,77 \text{ m}^3$$

$$69,96 \cdot 1,77 = 433,54 - T_3 \Rightarrow T_3 = 309,7 \text{ K}$$

d) La primera variación de entropía ocurre cuando el recipiente de 50 L se rompe y los gases se mezclan.

El primer estado es el gas A (78,2 mol, $1,47 \cdot 10^5$ Pa; $1,45 \text{ m}^3$; 328,6 K) y el gas B (25 mol; $1,37 \cdot 10^6$ Pa; $50 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$; 328,6 K) y el sistema evoluciona ($103,2 \text{ mol}$, $1,88 \cdot 10^5$ Pa; $1,5 \text{ m}^3$, 328,6 K)

Cambio de entropía

$$\Delta S_1 = 78,2 \cdot \left(8,31 \cdot \ln \frac{1,5}{1,45} \right) + 25 \left(8,31 \cdot \ln \frac{1,5}{50 \cdot 10^{-3}} \right) = 22,03 + 706,60 = 728,6 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

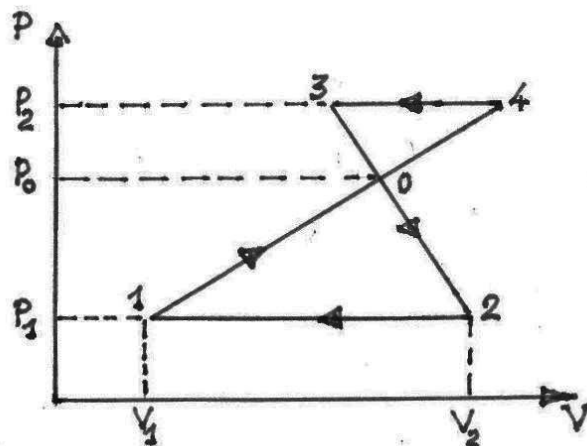
El segundo es el cambio de (103,2 mol; $1,88 \cdot 10^5$ Pa, $1,5 \text{ m}^3$; 328,6 K) a (103,2 mol; $1,5 \cdot 10^5$ Pa, $1,77 \text{ m}^3$; 309,7 K)

$$\Delta S_2 = 103,2 \left(2,5 \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{309,7}{328,6} + 8,31 \cdot \ln \frac{1,77}{1,5} \right) = 14,94 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

40. (442).-por un mol de gas ideal 1-4; 4-3 ; 3-2 ; 2-1, con los siguientes valores:

$$P_1=10^5 \text{ Pa} ; P_0=3 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; P_2=4 \cdot 10^5 \text{ Pa}; V_2-V_1 = 10 \text{ L.}$$

Calcular el trabajo realizado en el ciclo completo.



Olimpiadas de Moscú

El área del ciclo representa el trabajo pedido. El área del triángulo 102 representa un trabajo que sale del sistema al exterior. El valor numérico del área del triángulo O43 representa un trabajo que desde el exterior se realiza sobre el sistema. Para hallar el trabajo debemos calcular ambas áreas.

Los dos triángulos son semejantes ya que tiene los tres ángulos internos iguales.

Área del triángulo 102

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{(V_2 - V_1)}{2} \cdot (P_0 - P_1) = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot (3 \cdot 10^5 - 10^5) = 10^3$$

El trabajo realizado por el sistema es: -10^3 J . El signo negativo indica que según el criterio que hemos adoptado en esta web es un trabajo realizado por el sistema sobre el exterior.

Área del triángulo O43

Desconocemos los volúmenes correspondientes a 4 y 3 y los designamos con V_4 y V_3 respectivamente. Dado que los triángulos son semejantes

$$\frac{V_4 - V_3}{V_2 - V_1} = \frac{P_2 - P_0}{P_0 - P_1} \Rightarrow V_4 - V_3 = 10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \frac{4 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5 - 10^5} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{(V_4 - V_3)}{2} \cdot (P_2 - P_0) = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot (4 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5) = +250 \text{ J}$$

Área total = -750 J