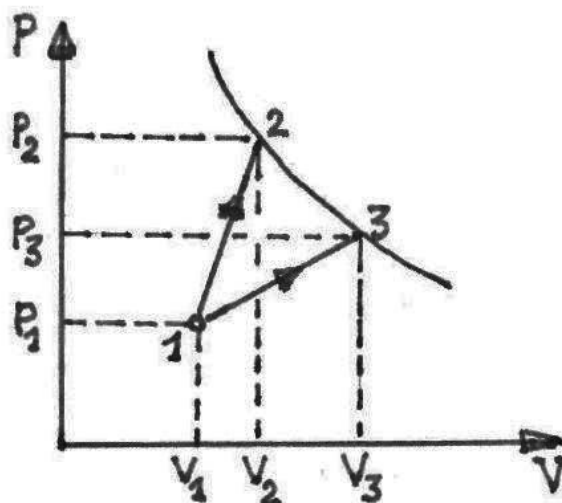


41. (443.)- *Un mol de un gas ideal inicialmente en el punto 1 de la gráfica inferior, efectúa la transformación 1-2. Ese mismo gas ahora realiza la transformación 1-3. Los puntos 2 y 3 pertenecen a una isoterma de temperatura T. a) Determinar qué proceso de los dos se verifica con mayor aporte de calor.*



Olimpiadas de Moscú

a) Las coordenadas termodinámicas de los puntos 1, 2 y 3 las designamos :

$$(P_1, V_1, T) ; (P_2, V_2, T) ; (P_3, V_3, T)$$

La primera ley de la termodinámica se expresa mediante la ecuación

$$\Delta U = C_v (T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}}) = Q + W$$

El primer miembro de la ecuación anterior es igual para el proceso 1-2 que 1-3, por tanto, la diferencia de los calores viene medida por la diferencia de los trabajos.

Los trabajos están medidos por los valores numéricos de las áreas de los trapecios $V_1, 2, V_2$ y $V_1, 3, V_3$.

$$W_{13} = \left(\frac{P_1 + P_3}{2} \right) \cdot (V_3 - V_1) ; \quad W_{12} = \left(\frac{P_1 + P_2}{2} \right) \cdot (V_2 - V_1)$$

$$W_{13} - W_{12} = \frac{P_1 V_3}{2} - \frac{P_1 V_1}{2} + \frac{P_3 V_3}{2} - \frac{P_3 V_1}{2} - \frac{P_1 V_2}{2} + \frac{P_1 V_1}{2} - \frac{P_2 V_2}{2} + \frac{P_2 V_1}{2}$$

Teniendo en cuenta que 2 y 3 se encuentran en la isoterma de temperatura T.

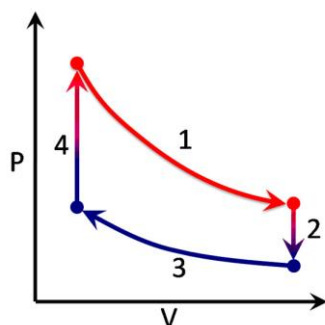
$$P_2 V_2 = P_3 V_3$$

Simplificando en la ecuación resulta:

$$\begin{aligned} W_{13} - W_{12} &= \frac{P_1 V_3}{2} - \frac{P_3 V_1}{2} - \frac{P_1 V_2}{2} + \frac{P_2 V_1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow W_{13} - W_{12} &= \frac{P_1}{2} (V_3 - V_2) + \frac{V_1}{2} (P_2 - P_3) \end{aligned}$$

En la ecuación anterior P_1 es + ; $V_3 - V_2$ es + ; V_1 es + y $P_2 - P_3$ es +, por consiguiente, la diferencia $W_{13} - W_{12}$ es +, esto es, $Q_{13} > Q_{12}$.

42. (448)- *El ciclo representado en la figura se denomina ideal de Sterling y consta de dos isotermas y dos isocoras.*



Calcular el rendimiento del mencionado ciclo. El ciclo lo realiza un mol de gas ideal.

La temperatura de la isoterma 1 la designamos con T_C , esto es, la temperatura del foco caliente. La temperatura de la isoterma 3 se designa con T_F , temperatura del foco frío. Las presiones y volúmenes son:

$$(P_1, V_1) ; (P_2, V_2) ; (P_3, V_3) ; (P_4, V_4)$$

Transformación isoterma (1) $\Delta U = Q + W \Rightarrow 0 = Q + W \Rightarrow W = -Q$

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_C}{V} dV = -R T_C \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Como $V_2 > V_1$, el trabajo es negativo es realizado por el gas contra el ambiente

El calor $Q_1 = R T_C \ln \frac{V_2}{V_1}$ es positivo luego lo absorbe el sistema desde la fuente caliente.

Transformación isocora (2) $\Delta U = Q + W \Rightarrow W = 0; \Delta U = Q$

El trabajo es nulo . El calor $Q_2 = C_V(T_F - T_C)$ como $T_F < T_C$, Q_2 es negativo, el gas cede calor al ambiente.

Transformación isoterma (3) $\Delta U = Q + W \Rightarrow 0 = Q + W \Rightarrow W = -Q$

$$W = - \int_{V_3}^{V_4} P dV = - \int_{V_3}^{V_4} \frac{RT_F}{V} dV = -R T_F \ln \frac{V_4}{V_3} = R T_F \ln \frac{V_3}{V_4}$$

Como $V_4 < V_3$, el trabajo es positivo y es realizado por el exterior sobre el gas.

El calor $Q_3 = -R T_F \ln \frac{V_3}{V_4}$ es negativo luego lo cede el sistema

Transformación isocora (4) $\Delta U = Q + W \Rightarrow W = 0; \Delta U = Q$

El trabajo es nulo. El calor $Q_4 = C_v(T_C - T_F)$ como $T_C > T_F$, Q_4 es positivo, el gas absorbe calor.

El rendimiento es el trabajo efectuado dividido por el calor absorbido en el ciclo

$$\eta = \frac{\left| -R T_C \ln \frac{V_2}{V_1} + R T_F \ln \frac{V_3}{V_4} \right|}{R T_C \ln \frac{V_2}{V_1} + C_v(T_C - T_F)}$$

El volumen máximo en el proceso es $V_2 = V_3 = V_M$ y el volumen mínimo $V_4 = V_1 = V_m$. El rendimiento se expresa

$$\eta = \frac{\left| -R T_C \ln \frac{V_M}{V_m} + R T_F \ln \frac{V_M}{V_m} \right|}{R T_C \ln \frac{V_M}{V_m} + C_v(T_C - T_F)} = \frac{R \ln \frac{V_M}{V_m} (T_C - T_F)}{R T_C \ln \frac{V_M}{V_m} + C_v(T_C - T_F)}$$

El rendimiento del ciclo se mejora si parte del calor que se emite en la isocora 2 se recupera y se añade al calor que se suministra en la isocora 4.

Designamos con f el factor de recuperación del calor de la isocora 2, siendo $f < 1$

$$\text{Calor recuperado} = Q' = f Q_2 = f \cdot C_v(T_F - T_C)$$

El término del paréntesis es negativo porque significaba calor emitido por el sistema, pero ahora vamos a aportarlo al sistema y por tanto debemos darle signo positivo

$$\text{Calor aportado al sistema} \quad Q_1 = f \cdot C_v(T_C - T_F)$$

Calor suministrado en la isocora 4 $Q_4 = C_v(T_C - T_F)$, como recuperamos una cierta cantidad de calor Q_1 debemos suministrar menos que si no se recuperase

$$Q_4 = C_v(T_C - T_F) = \text{recuperado} + \text{aportado} = f \cdot C_v(T_F - T_C) + Q' \Rightarrow$$

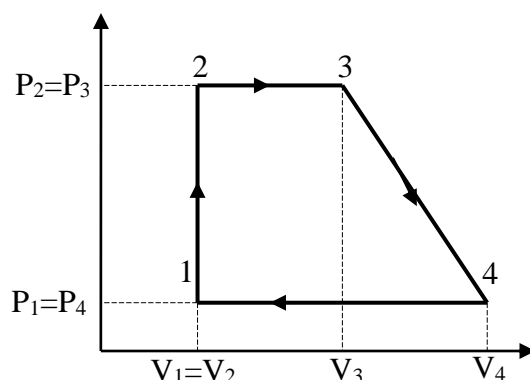
$$\Rightarrow Q' = (1 - f) C_v(T_C - T_F)$$

Si f es cero, lo que significa que no se recupera nada de calor entonces Q'' es igual a Q_4 , pero si f es un número positivo se aporta menos calor y se mejora el rendimiento

$$\eta = \frac{R \ln \frac{V_M}{V_m} (T_C - T_F)}{R T_C \ln \frac{V_M}{V_m} + (1-f) C_v (T_C - T_F)}$$

A medida que f se acerca al valor unidad, esto es, se recupera casi íntegramente el calor de la isocora 2, el rendimiento se acerca al del ciclo de Carnot.

43. (459)- El ciclo de la figura lo realizan n moles de un gas ideal. La temperatura del punto 2 es igual a la del punto 4. Se pide el trabajo que realiza el gas en función de las temperaturas y del número de moles.



Olimpiadas de Moscú

El trabajo corresponde al área englobada por el ciclo. El área de un trapecio es semisuma de las bases por la altura.

$$A = \frac{(V_4 - V_1) + (V_3 - V_1)}{2} \cdot (P_2 - P_1) \quad (1)$$

Las coordenadas termodinámicas de los vértices del trapecio son:

$$(1) P_1 V_1 T_1 ; \quad (2) P_2 V_1 T_2 ; \quad (3) P_2 V_3 T_3 ; \quad (4) P_1 V_4 T_2$$

Relación entre los volúmenes V_1 y V_4

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_1 V_4}{T_2} \Rightarrow V_4 = V_1 \frac{T_2}{T_1} \quad (2)$$

Relación entre los volúmenes V_2 y V_3

$$\frac{P_2 V_1}{T_2} = \frac{P_2 V_3}{T_3} \Rightarrow V_3 = V_1 \frac{T_3}{T_2} \quad (3)$$

Sustituimos (2) y (3) en (1)

$$A = \frac{\left(V_1 \frac{T_2}{T_1} - V_1 \right) + \left(V_1 \frac{T_3}{T_2} - V_1 \right)}{2} \cdot (P_2 - P_1) = \frac{V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right)}{2} (P_2 - P_1) \quad (4)$$

Relación entre las presiones P_1 y P_2

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_1}{T_2} \Rightarrow P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1} \quad (5)$$

Sustituimos (5) en (4)

$$A = \frac{V_1}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) \cdot \left(P_1 \frac{T_2}{T_1} - P_1 \right) = \frac{P_1 V_1}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1} \right)$$

Según la ecuación de los gases perfectos $P_1 V_1 = nRT_1$

$$A = \frac{nRT_1}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 + \frac{T_3}{T_2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{T_2 - T_1}{T_1} \right) = \frac{nRT_1}{2} \left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 2 \right) \cdot (T_2 - T_1)$$

44. (466)- *Un ciclo Joule-Brayton reversible está formado por las siguientes etapas*

I. Una expansión a presión constante P_2 II. Una expansión adiabática hasta la presión P_1 III. Una compresión a presión constante P_1 IV. Una compresión adiabática hasta alcanzar la presión P_2 y cerrar el ciclo.

Comprobar que el rendimiento del ciclo, siendo un mol de gas ideal la sustancia operante, está dado por la expresión

$$\frac{W}{Q} = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{C_P - C_V}{C_P}}$$

Q es el calor tomado en la etapa I.

En la figura 1 está representado el ciclo de Joule.

- 1 → 2) Compresión adiabática.
- 2 → 3) Calentamiento isobárico.
- 3 → 4) Expansión adiabática.
- 4 → 1) Enfriamiento isobárico.

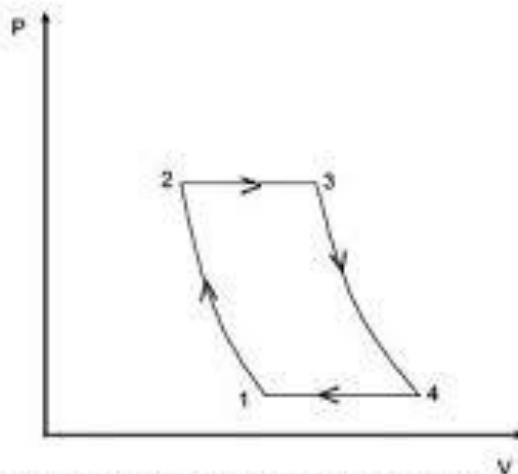


Figura 2. Diagrama P-V de un ciclo Brayton

Etapa I: de 2 a 3 ; Etapa 2: de 3 a 4
Etapa III : de 4 a 1 ; Etapa IV : de 1 a 2

Fig 1

Las coordenadas termodinámicas de los puntos indicados en la figura 1 son las siguientes

$$2 (P_2, V_2, T_2) ; \quad 3 (P_2, V_3, T_3) \quad , \quad 4 (P_1, V_4, T_4) \quad , \quad 1 (P_1, V_1, T_1)$$

Calculamos el trabajo del ciclo por partes

Trabajo de 2-3 (isóbara)

$$W_{2-3} = -\int p dV = -P_2 (V_3 - V_2) = -P_2 \left(\frac{RT_3}{P_2} - \frac{RT_2}{P_2} \right) = R (T_2 - T_3)$$

Trabajo de 3 a 4 (adiabática). Al ser un proceso adiabático el trabajo es igual a la variación de energía interna

$$W_{3-4} = C_v (T_4 - T_3)$$

Trabajo de 4-1 (isóbara)

$$W_{4-1} = -\int p dV = -P_1 (V_1 - V_4) = -P_1 \left(\frac{RT_1}{P_1} - \frac{RT_4}{P_1} \right) = R (T_4 - T_1)$$

Trabajo de 1 a 2 (adiabática)

$$W_{1-2} = C_v (T_2 - T_1)$$

El trabajo total es:

$$W = W_{2-3} + W_{3-4} + W_{4-1} + W_{1-2} = R(T_2 - T_3) + C_v(T_4 - T_3) + R(T_4 - T_1) + C_v(T_2 - T_1)$$

$$W = R(T_2 - T_3 + T_4 - T_1) + C_v(T_4 - T_3 + T_2 - T_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = (R + C_v)(T_2 - T_1) + (R + C_v)(T_4 - T_3)$$

Las temperatura de 3 y 4 están relacionadas por una adiabática y lo mismo le ocurre a 1 y 2.

$$PV^\gamma = \text{Cte} \quad ; \quad V = \frac{RT}{P} \quad \Rightarrow \quad P \left(\frac{RT}{P} \right)^\gamma = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Cte} \quad \Rightarrow \quad P^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot T = \text{Cte} \Rightarrow$$

$$\text{hacemos } \frac{1-\gamma}{\gamma} = k \quad \Rightarrow \quad P^k T = \text{Cte}$$

Aplicamos la última ecuación anterior entre T_2 y T_1 : $P_1^k T_1 = P_2^k T_2$

$$(R + C_v) \left[T_2 - T_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k \right] = (R + C_v) T_2 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k \right]$$

Operamos igual que antes pero entre las temperaturas T_4 y T_3 . $P_1^k T_4 = P_2^k T_3$

$$(\mathbf{R} + C_v) \left[T_3 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k - T_3 \right] = (\mathbf{R} + C_v) T_3 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k - 1 \right]$$

Sustituyendo en W

$$\begin{aligned} W &= (\mathbf{R} + C_v) T_2 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k \right] + (\mathbf{R} + C_v) T_3 \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k - 1 \right] = \\ &= (\mathbf{R} + C_v) T_2 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k \right] - (\mathbf{R} + C_v) T_3 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow W = (\mathbf{R} + C_v) \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k \right] \cdot [T_2 - T_3] \end{aligned}$$

El calor suministrado al sistema en la etapa I se realiza a presión constante

$$Q = C_p (T_3 - T_2)$$

Q es un calor que recibe el sistema luego Q es positivo y así es puesto que $T_3 > T_2$
El trabajo realizado por el ciclo debe ser negativo pues lo realiza el sistema sobre el exterior. El rendimiento es un número positivo

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(\mathbf{R} + C_v) \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k \right] \cdot [T_3 - T_2]}{C_p [T_3 - T_2]} = 1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^k = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{-k} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \eta = 1 - \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Rightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{\frac{C_p}{C_v} - 1}{\frac{C_p}{C_v}} = \frac{C_p - C_v}{C_p} \end{aligned}$$

45. (480)- *Un recipiente cilíndrico lleva incorporado un pistón móvil y contiene 2,00 moles de aire, siendo su volumen V_0 . En principio el aire se encuentra a la presión atmosférica $p_a=1,01 \cdot 10^5$ Pa y a la temperatura $T_0= 298$ K. El aire sufre los siguientes procesos A) compresión a temperatura constante hasta que el volumen es $\frac{1}{4} V_0$. B) expansión adiabática hasta un volumen de 15,0 L, C) a temperatura constante expansión hasta alcanzar el volumen V_0 D) a volumen constante el aire vuelve a la temperatura inicial T_0 . Considerar al aire como un gas diatómico y perfecto.*

1) *Dibujar el diagrama PV del ciclo*

2) *Calcular el trabajo durante el proceso A.*

American Association of Physics Teachers

Calculamos las coordenadas termodinámicas de los estados iniciales y finales del ciclo

Estado inicial

$$1,01 \cdot 10^5 \cdot V_0 = nR \cdot 298 \Rightarrow V_0 = \frac{2 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 298 \text{ K}}{1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = 0,049 \text{ m}^3 = 49 \text{ L}$$

$$\text{Estado inicial } 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad 0,049 \text{ m}^3 \quad T_0 = 298 \text{ K}$$

Transformación A) Compresión isotérmica

$$1,01 \cdot 10^5 \cdot 0,049 = p_A \cdot \frac{0,049}{4} \quad p_A = 4,04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Estado A) } 4,04 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; 0,01225 \text{ m}^3 ; T_0 = 298 \text{ K}$$

Transformación B) Adiabática

Al ser un gas diatómico $\gamma = 1,4$

$$PV^\lambda = \text{Cte} \Rightarrow 4,04 \cdot 10^5 \cdot 0,01225^{1,4} = p_B \cdot 0,015^{1,4} \Rightarrow p_B = 0,2548 \cdot 10^5 \Rightarrow p_B = 3,04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Calculamos la temperatura

$$3,04 \cdot 10^5 \cdot 0,015 = 2 \cdot 8,31 \cdot T_B \Rightarrow T_B = 274 \text{ K}$$

$$\text{Estado B) } 3,04 \cdot 10^5 \text{ Pa} ; 0,015 \text{ m}^3 ; T_0 = 274 \text{ K}$$

Transformación C) Expansión isotérmica

$$3,04 \cdot 10^5 \cdot 0,015 = p_C \cdot 0,049 \Rightarrow p_C = 0,93 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

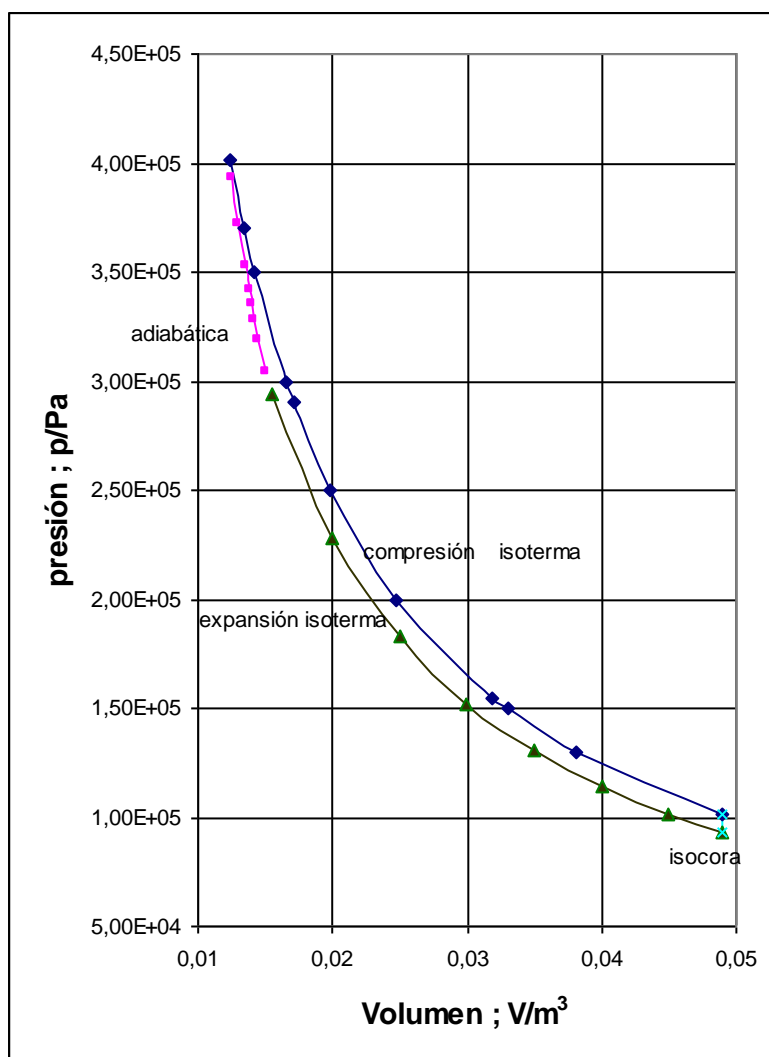
Estado C) $0,93 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $0,049 \text{ m}^3$; $T_o = 274 \text{ K}$

Transformación D) Isocora

$$\frac{0,93 \cdot 10^5}{274} = \frac{p_D}{298} \Rightarrow p_D = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Estado D) $1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $0,049 \text{ m}^3$; $T_o = 298 \text{ K}$

El estado D es el inicial. por tanto se ha verificado un ciclo completo.
La grafica se ha realizado con ayuda de la hoja de cálculo.



2) El proceso A es una isoterma

$$W = - \int_{V_o}^{V_A} PdV = - \int_{V_o}^{V_A} nRT_o \frac{dV}{V} = -nRT_o \ln \frac{V_A}{V_o} = -2 \cdot 8,31 \cdot 298 \cdot \ln \frac{0,01225}{0,049} = 6865 \text{ J}$$

El signo positivo nos indica que el sistema recibe trabajo desde el exterior

46.- (497).-Dos cuerpos de la misma masa m y la misma capacidad calorífica c , uno a la temperatura T_1 y el otro a T_2 siendo $T_1 > T_2$ se ponen en contacto aislados del medio exterior, una vez alcanzado el equilibrio determinar cómo varía de entropía del proceso.

Designamos con T la temperatura de equilibrio .El calor ganado por el de menor temperatura es igual al perdido por el de mayor temperatura

$$mc(T_1 - T) = mc(T - T_2) \Rightarrow T_1 + T_2 = 2T \Rightarrow T = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

La variación de entropía es

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{T_1}^T \frac{dQ_1}{T} + \int_{T_2}^T \frac{dQ_2}{T} = \int_{T_1}^T \frac{mcdT}{T} + \int_{T_2}^T \frac{mcdT}{T} = mc \ln T \Big|_{T_1}^T + mc \ln T \Big|_{T_2}^T \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta S &= mc \ln \frac{T}{T_1} + mc \ln \frac{T}{T_2} = mc(\ln T - \ln T_1 + \ln T - \ln T_2) = \\ &= mc[2 \ln T - (\ln T_1 + \ln T_2)] = mc \left(\ln \frac{T^2}{T_1 T_2} \right) = mc \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} \end{aligned}$$

Son positivos m y c , por tanto, la variación de entropía está condicionada por el valor del logaritmo. Si

$$\frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} > 1$$

El logaritmo es positivo y por consiguiente $\Delta S > 0$, la entropía aumenta en el proceso

$$\frac{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2}{4 T_1 T_2} > 1 \Rightarrow T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2 > 4 T_1 T_2 \Rightarrow T_1^2 + T_2^2 - 2T_1 T_2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (T_1 - T_2)^2 > 0 \Rightarrow T_1 - T_2 > 0 \Rightarrow T_1 > T_2$$

De acuerdo con el enunciado $T_1 > T_2$, luego ΔS es positivo, esto es, el proceso transcurre con aumento de entropía.

47.- (500)-Calcular la variación de entropía que se produce cuando dos moles de helio y tres moles de oxígeno (considerados gases ideales) ambos gases medidos en condiciones normales, que inicialmente están separados se unen entre sí formando un volumen único.

Calculamos los volúmenes de los dos gases cuando están separados. Aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$PV_{\text{He}} = n_{\text{He}}RT \Rightarrow V_{\text{He}} = \frac{2 \cdot 8,31 \cdot 273}{101325} = 0,0448 \text{ m}^3$$

$$PV_{\text{O}_2} = n_{\text{O}_2}RT \Rightarrow V_{\text{O}_2} = \frac{3 \cdot 8,31 \cdot 273}{101325} = 0,0672 \text{ m}^3$$

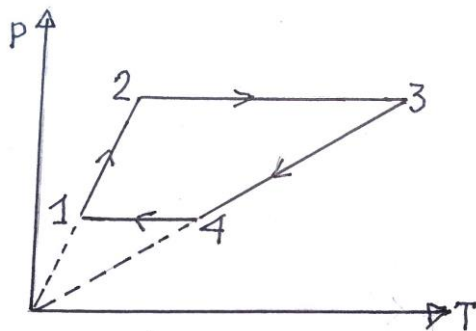
Al mezclar los dos gases ideales el volumen es: $V=0,0448+0,0672= 0,112\text{m}^3$ y la temperatura es la misma que la de los gases. Por tanto, para cada gas al mezclarlo cambia su volumen, pues ocupa ahora el volumen total y permanece su temperatura. El cambio de entropía de cada gas es

$$\Delta S = n \ln \frac{T_f}{T_i} + n R \ln \frac{V_f}{V_i} \text{ como } T_i=T_f \Rightarrow \Delta S = n R \ln \frac{V_f}{V_i}$$

El cambio de entropía para los dos gases es:

$$\Delta S = \Delta S_{\text{He}} + \Delta S_{\text{O}_2} = 2 \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{0,112}{0,0448} + 3 \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{0,112}{0,0672} = +28 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

48.- (511).-En el ciclo de la figura realizado por una máquina térmica que opera con 3 moles de un gas ideal monoatómico se conocen las temperaturas de los cuatro vértices: $T_1=400\text{ K}$; $T_2=800\text{ K}$; $T_3=2400\text{ K}$ y $T_4=1200\text{ K}$. Calcular el trabajo mecánico realizado a lo largo de un ciclo



A partir del hecho de que se trata de un gas ideal y de las temperaturas establecemos relaciones entre los volúmenes. Designamos con P_1 a la presión en el vértice 1 que es la misma que en el vértice 4 y con P_2 a la presión en el vértice 2 que es la misma que en el vértice 3. Los volúmenes los designamos con V y de subíndice el número del vértice. Entre los vértices 2 y 3 aplicamos la ecuación de los gases perfectos.

$$P_2 V_2 = 3R \cdot 800 ; P_2 V_3 = 3R \cdot 2400 \Rightarrow \frac{V_2}{V_3} = \frac{800}{2400} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_3 = 3V_2$$

Entre los vértices 1 y 4 aplicamos la ecuación de los gases perfectos

$$P_1 V_1 = 3R \cdot 400 ; P_4 V_4 = 3R \cdot 1200 \Rightarrow \frac{V_1}{V_4} = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3} \Rightarrow V_4 = 3V_1$$

Al ángulo que forma la recta 3 4 con el eje T lo llamamos θ

$$\text{tag } \theta = \frac{P_2 - P_1}{T_3 - T_4} = \frac{P_1}{T_4} \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{1200} = \frac{P_1}{1200} \Rightarrow P_2 = 2P_1$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre 1 y 2

$$P_1 V_1 = 3R \cdot 400 ; P_2 V_2 = 3R \cdot 800 \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{400}{800} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{2P_1 V_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2 \quad (1)$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre 3 y 4

$$P_1 V_4 = 3R \cdot 1200 ; P_2 V_3 = 3R \cdot 2400 \Rightarrow \frac{P_1 V_4}{P_2 V_3} = \frac{1200}{2400} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{P_1 V_4}{2P_1 V_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_3 = V_4 \quad (2)$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre 3 y 4

$$P_1 V_1 = 3R \cdot 400 ; P_2 V_3 = 3R \cdot 2400 \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{P_2 V_3} = \frac{400}{2400} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{P_1 V_1}{2P_1 V_3} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_3 = 3V_1$$

La ecuación (1) nos dice que la transformación 1-2 es una isócara y la (2) que la transformación 3-4 también es una isócara. Se deduce que el ciclo representado en el enunciado pero en el diagrama P-V es el de la figura 2.

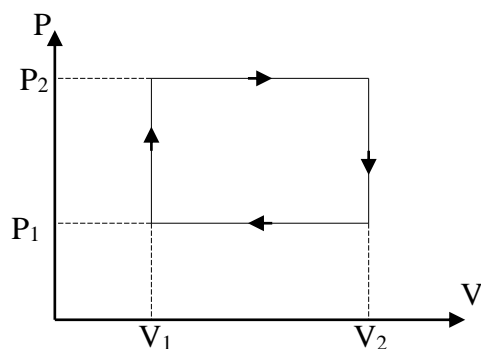


Fig.2

El trabajo se corresponde con el área abarcada en el ciclo.

$$\tau = (P_2 - P_1)(V_3 - V_1) = (2P_1 - P_1)(3V_1 - V_1) = 2P_1 V_1 = 2nR T_1 = 2 \cdot 3 \cdot 8,81 \cdot 400 = 20 \cdot 10^3 \text{ J}$$

49.- (512).-Dos cilindros A y B del mismo volumen V contienen el mismo gas ideal monoatómico a una temperatura T . La presión en A es $2P$ y en B es P . Una válvula conecta los dos cilindros. Ésta se abre un poco con la finalidad que pase gas de A a B. Durante el proceso, la presión en A se mantiene constante a $2P$ debido al empuje que ejerce un pistón sobre el gas A. El proceso concluye cuando el gas de B alcanza la presión $2P$. Existe un buen contacto térmico entre los cilindros pero están aislados de los alrededores. Determinar la temperatura final en función de T y el volumen final en función de V .

Universidad de Toronto

En la figura 1 se indica un esquema del proceso entre el estado inicial y el final.

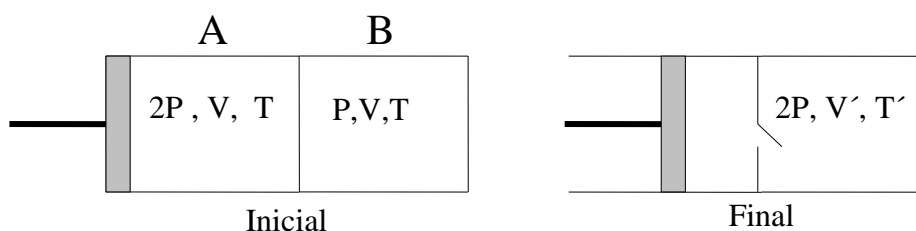


Fig.1

Designamos con n_1 a los moles del cilindro A y con n_2 a los del cilindro B. Aplicamos la ecuación de los gases perfectos en A y en B.

$$2PV = n_1RT \quad ; \quad PV = n_2RT \quad \Rightarrow \quad \frac{2PV}{PV} = \frac{n_1RT}{n_2RT} \quad \Rightarrow \quad n_1 = 2n_2$$

Los moles en el estado final son: $n_1 + n_2 = 2n_2 + n_2 = 3n_2$. Aplicamos al estado final la ecuación de los gases perfectos

$$2PV' = 3n_2RT'$$

La transformación indicada en la figura 1 transcurre sin intercambio de calor con el exterior por consiguiente la variación de energía interna es igual al trabajo.

Variación de energía interna

$$\Delta U = 3n_2 C_v (T' - T) = 3n_2 \cdot \frac{3}{2} R (T' - T) = \frac{9}{2} n_2 R (T' - T)$$

Trabajo realizado

$$W = -2P \cdot (V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}) = -2P[(V' - V) - V] = 2P(2V - V') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} n_2 R (T' - T) = 4PV - 2PV' \Rightarrow \frac{9}{2} n_2 R (T' - T) = 4n_2RT - 3n_2RT' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{2} (T' - T) = 4T - 3T' \Rightarrow 9T' - 9T = 8T - 6T' \Rightarrow 15T' = 17T \Rightarrow T' = \frac{17T}{15}$$

$$2P V' = 3n_2 R T' \Rightarrow \frac{n_1 R T}{V} V' = 3n_2 R T' \Rightarrow \frac{2n_2 R T}{V} V' = 3n_2 R T' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2TV'}{V} = 3T' \Rightarrow V' = \frac{3T'V}{2T} = \frac{3}{2} V \frac{15}{T} = \frac{17V}{10}$$

50.- (518).-Un gas ideal verifica las siguientes transformaciones.

Estado I (inicial) P_0 ; V_0 ; T_0

El gas se calienta a volumen constante hasta que alcanza una presión αP_0 , $\alpha > 1$. El gas se expande adiabáticamente hasta que su presión es de nuevo P_0 . El gas se enfría a presión constante hasta que alcanza de nuevo el estado inicial,

a) Calcular el rendimiento del ciclo en función de α y el coeficiente adiabático γ .

b) Durante la transformación adiabática se mide la presión y temperatura del gas

P/atm	2,11	2,21	2,28	2,34	2,49
T/K	578	603	622	639	680

Determinar el coeficiente adiabático del gas.

a) En la figura 1 se ha representado el ciclo descrito por el gas ideal

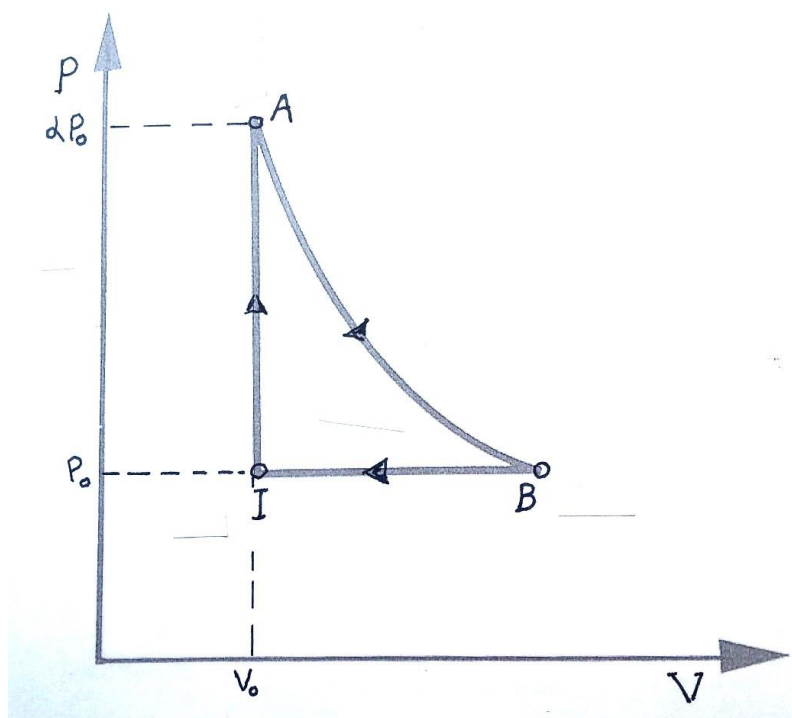


Fig 1

Las coordenadas termodinámicas del gas en el estado inicial son: P_0 ; V_0 ; T_0 . Haciendo uso de la ecuación de los gases perfectos y de la transformación adiabática relacionamos las coordenadas termodinámicas de A y B con respecto a las de I.

$$\frac{P_0}{T_0} = \frac{\alpha P_0}{T_A} \Rightarrow T_A = \alpha T_0 \quad ; \quad A(\alpha P_0 ; V_0 ; \alpha T_0)$$

$$\alpha P_o V_o^\gamma = P_o V_B^\gamma \Rightarrow V_B = V_o \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_o}{T_o} = \frac{V_B}{T_B} = \frac{V_o \alpha^{\frac{1}{\gamma}}}{T_B} \Rightarrow T_B = T_o \alpha^{\frac{1}{\gamma}}$$

Coordenadas de B $\left(P_o ; V_o \alpha^{\frac{1}{\gamma}} ; T_o \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \right)$

Analizamos el calor

El rendimiento es el cociente entre el trabajo total y el calor recibido desde el exterior..

Para la transformación IA aplicamos el primer principio según el cual $W=0$

$$\Delta U = Q + W = Q \quad Q_{IA} = n C_v (T_A - T_I) = n C_v (\alpha T_o - T_o) = n C_v T_o (\alpha - 1) \quad (1)$$

Como $\alpha > 1$, Q_{IA} es positivo y por tanto lo recibe el sistema

En la transformación AB no hay intercambio de calor

En la transformación BI el calor es

$$Q_{BI} = n C_p (T_I - T_B) = n C_p \left(T_o - T_o \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \right) = n C_p T_o \left(1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \right)$$

Al ser $\alpha > 1$, el paréntesis es negativo. y por consiguiente Q_{BI} es negativo, lo cual implica que es un calor que cede el sistema al exterior

Analizamos el trabajo

En la transformación IA el trabajo es nulo.

En la transformación AB aplicamos el primer principio

$$\Delta U = Q + W; \quad W_{AB} = n C_v (T_B - T_A) = n C_v \left(T_o \alpha^{\frac{1}{\gamma}} - \alpha T_o \right) = n C_v T_o \left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}} - \alpha \right) \quad (2)$$

Dado que el término del paréntesis es negativo lo es el trabajo y según el criterio de signos ese trabajo lo realiza el sistema hacia el exterior

En la transformación BI el trabajo vale

$$W_{BA} = - \int_{V_B}^{V_A} P dV = -P_o (V_A - V_B) = P_o (V_B - V_A) = P_o \left(V_o \alpha^{\frac{1}{\gamma}} - V_o \right) = P_o V_o \left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)$$

Este trabajo es positivo se realiza desde el exterior al sistema

El rendimiento es

$$\eta = \frac{\text{Trabajo realizado}}{\text{calor recibido desde el exterior}} = \frac{n C_v T_o \left(\alpha - \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \right) - P_o V_o \left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)}{n C_v T_o (\alpha - 1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{n C_v T_o \left(\alpha - \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \right) - n R T_o \left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)}{n C_v T_o (\alpha - 1)} \quad (3)$$

Hemos cambiado el signo de los trabajos porque el rendimiento es un número positivo

Recordemos que

$$C_p - C_v = R \quad \text{y} \quad \frac{C_p}{C_v} = \gamma \Rightarrow \gamma C_v - C_v = R$$

Sustituyendo en (3)

$$\eta = \frac{n C_v T_o \left(\alpha - \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \right) - n C_v T_o (\gamma - 1) \left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)}{n C_v T_o (\alpha - 1)} = \frac{\alpha - \alpha^{\frac{1}{\gamma}} - \gamma \alpha^{\frac{1}{\gamma}} + \gamma + \alpha^{\frac{1}{\gamma}} - 1}{\alpha - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\alpha - 1 + \gamma \left(1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \right)}{\alpha - 1} = 1 + \gamma \frac{\left(1 - \alpha^{\frac{1}{\gamma}} \right)}{\alpha - 1} = 1 - \gamma \frac{\left(\alpha^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right)}{\alpha - 1}$$

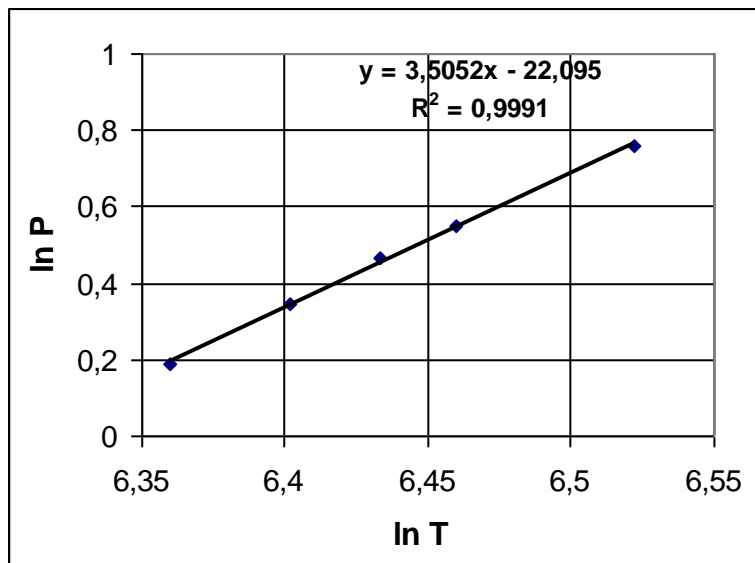
b) La relación entre presión y temperatura en una adiabática es

$$PV^\gamma = \text{Cte} ; PV = RT \Rightarrow P \left(\frac{RT}{P} \right)^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow PT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{Cte} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln P + \frac{\gamma}{1-\gamma} \ln T = \ln \text{Cte} \Rightarrow \ln P = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \ln T + \ln \text{Cte} \Rightarrow \ln P = +\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln T + \ln \text{Cte}$$

La representación de $\ln P$ (eje de ordenadas) frente al $\ln T$ (eje de abscisas) es una línea recta de pendiente $\frac{\gamma}{\gamma-1}$.

Con los valores del enunciado obtenemos la siguiente gráfica



$$\frac{\gamma}{\gamma-1} = 3,5 \Rightarrow \gamma - 3,5\gamma = -3,5 \Rightarrow \gamma = \frac{-3,5}{-2,5} = 1,4$$

