

51.- (529).- Una estación espacial de masa 10^4 kg contiene aire a la presión $p_0 = 10^5$ Pa , $T=293$ K y volumen 40 m³. De forma repentina se produce un agujero de área $S = 1$ mm² en la pared de la estación, debido a ello parte del aire escapa al exterior de modo que al cabo del tiempo la presión del aire se ha reducido a la mitad. Se supone que la descompresión de la estación es un proceso isotérmico Considerar al aire como gas perfecto.

a) Calcular el tiempo en que se produce la disminución de la presión
b) Calcular la velocidad de retroceso de la estación, en el supuesto de que el agujero no provoca rotación de la misma.

Nota., La presión exterior puede considerarse despreciable frente a la presión interior. Dato. Masa molar promedio del aire 29 g/mol

a) Calculamos la velocidad de salida del gas por aplicación del teorema de Bernoulli

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

El primer punto de aplicación es en el interior de la nave a presión p_0 y el segundo en el centro del agujero con presión exterior p_{ext} , que en este caso consideramos despreciable frente a la interior, además el segundo término, presión debida a la altura, es el mismo en los dos miembros. La velocidad de desplazamiento del aire dentro de la nave v_1 puede considerarse tendiendo a cero frente a la velocidad de salida por el orificio v_2 .

$$p_0 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$$

Según la ecuación de los gases perfectos

$$p_0 = \frac{m}{V \cdot M_A} RT = \frac{\rho RT}{M_A} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2RT}{M_A}}$$

ρ es la densidad del aire y M_A la masa molar promedio del aire.

El gasto volumétrico es el volumen de aire que sale en la unidad de tiempo

$$G = \frac{dV}{dt} = S v_2$$

dV es el volumen de aire que estaba en la estación y que ha salido fuera en el tiempo dt . Consideramos un tiempo después de que haya empezado a salir aire, la presión en la estación es p , menor que p_0 y mayor que $p_0/2$

$$V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow dV = \frac{RT}{p} dn$$

dn es el número de moles que salen en el tiempo dt , y también dV su volumen

$$\frac{RT}{p} \frac{dn}{dt} = -S v_2 \Rightarrow dn = -\frac{Sp}{RT} \sqrt{\frac{2RT}{M_A}} dt \quad (1)$$

El signo negativo es porque dn/dt disminuye con el tiempo

La disminución del número de moles conlleva una disminución de la presión

$$dp = dn \frac{RT}{V}$$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{dp}{RT} = -\frac{S}{RT} \sqrt{\frac{2RT}{M_A}} dt \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{S}{V} \sqrt{\frac{2RT}{M_A}} dt \Rightarrow \int_{p_0}^{\frac{p_0}{2}} \frac{dp}{p} = -\frac{S}{V} \sqrt{\frac{2RT}{M_A}} \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{p_0}{2} - \ln p_0 = -\ln 2 = -\frac{S}{V} \sqrt{\frac{2RT}{M_A}} t \Rightarrow t = \frac{\ln 2 \cdot V}{S} \sqrt{\frac{M_A}{2RT}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{0,693 \cdot 40 \text{ m}^3}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} \sqrt{\frac{29 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{2 \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 293 \text{ K}}} = 6,76 \cdot 10^4 \text{ s} = 18,8 \text{ horas}$$

b) La variación de velocidad de la nave depende del tiempo ya que a medida que sale el aire disminuye la masa del conjunto estación más aire que hay en su interior, pero la masa de aire que sale es la mitad de la inicial

$$p_0 V = \frac{m(\text{aire inicial})}{M_A} RT \Rightarrow m(\text{aire inicial}) = \frac{p_0 V M_A}{RT} = \frac{10^5 \cdot 40 \cdot 29 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 293} = 47,6 \text{ kg}$$

$$\text{Masa de aire expulsado} = 47,6 / 2 = 28,3 \text{ kg}$$

y es despreciable frente a la masa de la estación, hacemos el cálculo aplicando el principio de la conservación del movimiento considerando que la masa de la estación no varía

$$M \Delta v = \text{masa aire expulsado} \cdot v \Rightarrow \Delta v = \frac{28,3 \cdot \sqrt{\frac{2RT}{M_A}}}{10^4} = \frac{28,3}{10^4} \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 293}{29 \cdot 10^{-3}}} = 0,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

52,- (530).- *Un balón esférico de goma inflado con aire tiene un radio de $r_1 = 0,1$ m, una presión $p_1 = 1,10 \cdot 10^5$ Pa y una temperatura $T_o = 300$ K.*

a) *¿Cuál será la presión si se añade más aire al balón hasta que su radio sea $r_2 = 3/2 r_1$? La energía elástica de la goma del balón es $E_s = \frac{1}{2} \alpha S^2$,*

siendo α una constante y S la superficie del balón. La presión del aire circundante al balón es $P_o = 1,10 \cdot 10^5$ Pa. Se supone que la temperatura no varía. El aire se comporta como un gas perfecto siendo $C_v = 5/2 R$.

b) *Cuando el balón tiene un radio r_2 se sumerge en agua de forma lenta y cuidadosa hasta una profundidad en la que el radio del balón es $r_3 = r_1 = 0,1$ m. Calcular la profundidad y la temperatura y presión del aire del balón. Se supone que en el proceso no hay pérdida ni ganancia de calor.*

Densidad del agua $\rho_w = 1000$ kg/m³. Se considera despreciable la densidad del aire frente a la del agua.

c) *Calcular el trabajo necesario para realizar el proceso anterior.*

a) Al aumentar el tamaño del balón aumenta la superficie del mismo y eso supone aumentar su energía elástica. Esa energía proviene del trabajo que se ha de realizar para la expansión del balón.

Sea r el radio del balón en un momento del inflado y posteriormente sea $r+dr$ y p la presión del gas. El trabajo de expansión es.

$$dW = (p - p_o) dV = (p - p_o) \left[\frac{4}{3} \pi (r + dr)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \right]$$

$$dW = (p - p_o) \left[\frac{4}{3} \pi (r^3 + 3r^2 dr + 3r dr^2 + dr^3) - \frac{4}{3} \pi r^3 \right] \Rightarrow dW = (p - p_o) 4 \pi r^2 dr$$

Las diferenciales de segundo y tercer orden pueden considerarse despreciables.

El aumento de energía elástica es:

$$E_i = \frac{1}{2} \alpha S_i^2 = \frac{1}{2} \alpha (4 \pi r^2)^2 = 8 \alpha \pi^2 r^4 \quad ; \quad E_f = \frac{1}{2} \alpha [4 \pi (r + dr)^2]^2 \Rightarrow$$

$$E_f = \frac{1}{2} \alpha [4 \pi (r^2 + 2rdr)]^2 = 8 \pi^2 \alpha (r^4 + 4r^3 dr) = 8 \pi^2 \alpha r^4 + 32 \pi^2 \alpha r^3 dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dE_E = E_f - E_i = +32 \pi^2 \alpha r^3 dr - 8 \pi^2 \alpha r^4 = 32 \pi^2 \alpha r^3 dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p - p_o) 4 \pi r^2 dr = 32 \pi^2 \alpha r^3 dr \Rightarrow p - p_o = 8 \pi \alpha r \quad (1)$$

Nótese que el trabajo de expansión del gas se transfiere como energía elástica, razón por la que se igualan. Además al ser el radio del balón menor que la unidad el término en r^4 menor que r^3 puede despreciarse

Aplicando la ecuación (1) a los radios del balón inicial y final

$$p_1 - p_o = 8\pi\alpha r_1 \quad ; \quad p_2 - p_o = 8\pi\alpha r_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 - p_o}{p_1 - p_o} = \frac{r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_o + \frac{r_2}{r_1}(p_1 - p_o)$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$p_2 = 1,00 \cdot 10^5 + \frac{\frac{3}{2}r_1}{r_1}(1,10 \cdot 10^5 - 1,00 \cdot 10^5) = 1,15 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

b) Según el enunciado el proceso es adiabático $PV^\gamma = \text{Cte}$

$$\begin{aligned} p_2 V_2^\gamma &= p_3 V_3^\gamma = p_2 V_1^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_2 \left(\frac{4}{3} \pi r_2^3 \right)^\gamma = p_3 \left(\frac{4}{3} \pi r_1^3 \right)^\gamma \quad \Rightarrow \quad p_2 r_2^{3\gamma} = p_3 r_1^{3\gamma} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow p_3 &= p_2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{3\gamma} \quad ; \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}R + R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1,4 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow p_3 &= 1,15 \cdot 10^5 \left(\frac{\frac{3}{2}r_1}{r_1} \right)^{3 \cdot 1,4} = 6,31 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Aplicamos la ecuación (1) y tengamos en cuenta que por estar sumergido el balón a una profundidad h , actúa sobre su superficie una presión hidrostática $\rho g h$.

$$\begin{aligned} p_3 - p_w &= 8\pi\alpha r_3 = 8\pi\alpha r_1 \quad \Rightarrow \quad p_w = p_3 - 8\pi\alpha r_1 = p_3 - (p_1 - p_o) = p_o + \rho g h \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow h &= \frac{p_3 - (p_1 - p_o) - p_o}{\rho g} = \frac{6,31 \cdot 10^5 - 1,10 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9,8} = 53 \text{ m} \end{aligned}$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos al aire del balón en la superficie y sumergido.

$$\begin{aligned} p_2 V_2 &= nRT_o \quad ; \quad p_3 V_1 = nRT' \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 V_2}{p_3 V_1} = \frac{T_o}{T'} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_2 \left(\frac{4}{3} \pi r_2^3 \right)}{p_3 \left(\frac{4}{3} \pi r_1^3 \right)} = \frac{T_o}{T'} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow T' &= T_o \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^3 \cdot \frac{p_3}{p_2} = 300 \left(\frac{r_1}{\frac{3}{2}r_1} \right)^3 \cdot \frac{p_3}{p_2} = 300 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 \cdot \frac{6,31 \cdot 10^5}{1,15 \cdot 10^5} = 488 \text{ K} \end{aligned}$$

c) Se considera despreciable el peso del balón., para hundirlo aplicamos una fuerza vertical y hacia abajo que en todo momento es igual al empuje del agua sobre el balón.(empuje de Arquímedes).

La fuerza que hay que aplicar es igual y de sentido contrario al empuje. Si ρ_w es la densidad del agua resulta

$$F = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_w g$$

En la ecuación anterior r es variable y toma los valores extremos r_2 y r_1 . Si el balón se desplaza una distancia dz el trabajo vale

$$dW = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_w g dz$$

En esta ecuación hay dos variables r y z que hay que relacionar. Aplicamos la relación deducida en el apartado b)

$$p_z = p_2 \frac{r_2^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} \quad ; \quad p_z = p_o + \rho_w g z \quad \Rightarrow \quad p_o + \rho_w g z = p_2 \frac{r_2^{3\gamma}}{r^{3\gamma}} = p_2 r_2^{3\gamma} r^{-3\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_w g dz = p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma-1} dr \Rightarrow dz = \frac{p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma-1} dr}{\rho_w g} \Rightarrow$$

$$dW = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_w g \cdot \frac{p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma-1} dr}{\rho_w g} \Rightarrow dW = \frac{4}{3} \pi r^3 p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma-1} dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dW = \frac{4}{3} \pi p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma+2} dr$$

Par evaluar el trabajo integramos entre los límites r_2 y $r_3=r_1$

$$W = \int_{r_2}^{r_1} \frac{4}{3} \pi p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) r^{-3\gamma+2} dr = \left[r^{-3\gamma+3} \right]_{r_2}^{r_1} \Rightarrow \frac{4}{3} \pi p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) \left[\frac{1}{-3\gamma+3} \right] \left[r^{-3\gamma+3} \right]_{r_2}^{r_1}$$

$$\Rightarrow W = \frac{4}{3} \pi p_2 r_2^{3\gamma} \cdot (-3\gamma) \left[\frac{1}{-3\gamma+3} \right] \left[r_1^{-3\gamma+3} - r_2^{-3\gamma+3} \right]$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$W = \frac{4}{3} \pi \cdot 1,15 \cdot 10^5 \cdot 0,15^{4,2} \cdot \left(\frac{-3 \cdot 1,4}{-3 \cdot 1,4 + 3} \right) (0,1^{-1,2} - 0,15^{-1,2}) = 3,6 \cdot 10^3 \text{ J}$$

53.-(543).-En un proceso de expansión las magnitudes presión y volumen de un gas perfecto están ligadas por la ecuación

$$Pv^k = Cte \quad , \quad k = 1,4$$

Comprobar que el trabajo de expansión desde P_1V_1 a P_2V_2 se determina por la ecuación

$$W = (P_1v_1 - P_2v_2) \frac{1}{1-k}$$

y calcularlo si $p_1 = 12 \text{ bar}$, $v_1 = 0,1 \text{ m}^3/\text{kg}$; $p_2 = 2 \text{ bar}$, $v_2 = 0,360 \text{ m}^3/\text{kg}$

El trabajo de expansión es:

$$W = - \int_{v_1}^{v_2} P dv = - \int_{v_1}^{v_2} \frac{Cte}{v^k} dv = -Cte \left(v^{-k+1} \frac{1}{1-k} \right)_{v_1}^{v_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \left(-Cte \cdot v_2^{1-k} + Cte \cdot v_1^{1-k} \right) \frac{1}{1-k} = \left(P_1 v_1^k \cdot v_1^{1-k} - P_2 v_2^k \cdot v_2^{1-k} \right) \frac{1}{1-k}$$

$$\Rightarrow W = (P_1 v_1 - P_2 v_2) \frac{1}{1-k}$$

$$W = \left(12 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,1 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} - 2 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,360 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right) \cdot \frac{1}{1-1,4} = -1,20 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

El signo menos del trabajo indica que el sistema realiza un trabajo al exterior.

54.- (563).- Un gas ideal monoatómico está formado por N partículas. Inicialmente el gas ocupa un volumen V_1 , a una temperatura T_1 y a una presión P_1 . El gas se expande a presión constante hasta un volumen V_2 y una temperatura T_2 . Finalmente se deja expandir isotérmicamente hasta un volumen V_3 y una presión P_3 .

1) Calcular la variación de entropía entre los estados 1 y 2

2) Calcular la variación de entropía entre los estados 2 y 3

3) A partir de los valores anteriores determinar la variación de entropía entre los estados 1 y 3.

4) Determinar de forma directa la variación de entropía entre los estados 1 y 3.

Las variaciones de entropía se expresarán en función de las temperaturas, volúmenes, N y la constante de Boltzmann, k .

Recordatorio. La variación de entropía por mol de gas ideal entre dos

estados inicial y final es: $\Delta S = C_p \ln \frac{T_f}{T_i} - R \ln \frac{P_f}{P_i}$.

1) El número de moles de gas es $\frac{N}{N_A}$, siendo N_A el número de Avogadro, C_p para un mol

de gas monoatómico es; $C_p = \frac{5}{2}R$

Aplicamos la ecuación del enunciado entre los estados 1 y 2 y utilizamos que $k = \frac{R}{N_A}$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{N}{N_A} \left[\frac{5}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{P_2}{P_1} \right] = \frac{5}{2} k N \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (1)$$

Por ser este proceso a presión constante $p_2 = p_1$ y $\ln 1 = 0$

2) En la transformación del sistema 2 al 3 la temperatura es constante y $T_3 = T_2$

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = -\frac{N}{N_A} (C_p - C_v) \ln \frac{P_3}{P_2} = -\frac{N}{N_A} \left(\frac{5}{2} R - \frac{3}{2} R \right) \ln \frac{P_3}{P_2} = -k N \ln \frac{P_3}{P_2} = k N \ln \frac{P_2}{P_3}$$

3)

$$\Delta S_{1 \rightarrow 3} = \Delta S_{1 \rightarrow 2} + \Delta S_{2 \rightarrow 3} = \frac{5}{2} k N \ln \frac{T_2}{T_1} + k N \ln \frac{P_2}{P_3}$$

Aplicando la ecuación de Boyle-Mariotte y Gay-Lussac

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{V_3}{V_2} \quad ; \quad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_2}{P_3} = \frac{V_3}{\frac{V_1 T_2}{T_1}} = \frac{V_3 T_1}{V_1 T_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S_{1 \rightarrow 3} = \frac{5}{2} k N \ln \frac{T_2}{T_1} + k N \ln \frac{V_3 T_1}{V_1 T_2} = k N \left(\ln \frac{T_2^{\frac{5}{2}}}{T_1^{\frac{5}{2}}} + \ln \frac{V_3 T_1}{V_1 T_2} \right) = k N \ln \left(\frac{T_2^{\frac{5}{2}}}{T_1^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{V_3 T_1}{V_1 T_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 3} = k N \ln \frac{T_2^{\frac{3}{2}} V_3}{T_1^{\frac{3}{2}} V_1}$$

4)

$$\Delta S_{1 \rightarrow 3} = \frac{N}{N_A} \left[C_P \ln \frac{T_3}{T_1} - (C_P - C_V) \ln \frac{P_3}{P_1} \right]$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre los estados 1 y 3.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \Rightarrow \frac{P_3}{P_1} = \frac{V_1 T_3}{V_3 T_1}$$

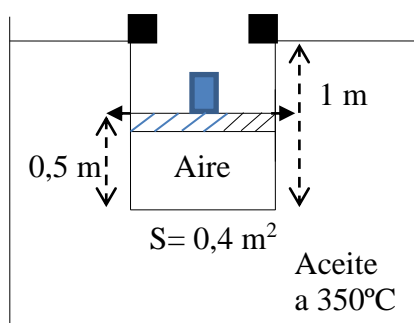
Sustituyendo en la ecuación anterior

$$\Delta S_{1 \rightarrow 3} = \frac{N}{N_A} \left[C_P \ln \frac{T_3}{T_1} - (C_P - C_V) \ln \frac{V_1 T_3}{V_3 T_1} \right] = \frac{5}{2} k N \left(\ln \frac{T_3}{T_1} - \ln \frac{V_1 T_3}{V_3 T_1} \right) + \frac{3}{2} k N \ln \frac{V_1 T_3}{V_3 T_1}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 3} = \frac{5}{2} k N \ln \frac{T_3 V_3 T_1}{T_1 V_1 T_3} + \frac{3}{2} k N \ln \frac{V_1 T_3}{V_3 T_1} = k N \left(\ln \frac{V_3^{\frac{5}{2}}}{V_1^{\frac{5}{2}}} + \ln \frac{V_1^{\frac{3}{2}} T_3^{\frac{3}{2}}}{V_3^{\frac{3}{2}} T_1^{\frac{3}{2}}} \right) = k N \ln \frac{V_3^{\frac{5}{2}} V_1^{\frac{3}{2}} T_3^{\frac{3}{2}}}{V_1^{\frac{5}{2}} V_3^{\frac{3}{2}} T_1^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S_{1 \rightarrow 3} = k N \ln \frac{V_3^{\frac{3}{2}} T_3^{\frac{3}{2}}}{V_1 T_1^{\frac{3}{2}}}$$

55.- (567.)- *El conjunto cilindro pistón de la figura, contiene aire (gas perfecto $\gamma = 1,4$; Masa molar, $M = 29 \text{ g/mol}$) a la temperatura de 350°C y a la presión de 8 MPa . El pistón está inmovilizado por una fijación, siendo su masa y tara 12 toneladas . La presión atmosférica es $P_0 = 100 \text{ kPa}$. El cilindro tiene unos topes a 1 metro de altura por seguridad para que no se salga el pistón en el caso de que alcance esa altura. El cilindro de paredes diatérmicas, se encuentra sumergido en un baño termostático de aceite a 350°C . Se suelta la fijación y tras un cierto tiempo, el pistón se sitúa en una posición de equilibrio*



a) Determinar la altura que alcanza el pistón b) Temperatura, presión y densidad final del aire c) Calor intercambiado entre el baño y el aire y sentido de esa interacción d) Entropía generada en el proceso e) Representar el proceso del aire en diagramas P-V y T-S

Examen Escuela de Ingenieros de Navarra.

a) La presión atmosférica más la que ejerce el pistón con su tara vale:

$$P_E = P_0 + \frac{mg}{S} = 100 \cdot 10^3 + \frac{12000 \cdot 9,8}{0,4} = 3,94 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Como la presión que ejerce el gas vale $8 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, y es mayor que el valor anterior, al quitar la fijación el gas se expansionará.

El gas al ir expansionándose, a temperatura constante, su presión disminuye progresivamente y si no hubiese obstáculos podría llegar a una presión de $3,94 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; calculamos el volumen que tendría el gas

$$V = \frac{nRT}{P}$$

Para calcular V en la ecuación anterior debemos conocer n, para ello aplicamos la ecuación de los gases perfectos al aire en su situación inicial, esto es, la que se indica en el dibujo

$$n = \frac{P_i V_i}{RT_i} = \frac{8 \cdot 10^6 \cdot (0,4 \cdot 0,5)}{8,31 \cdot (350 + 273)} = 309 \text{ mol} \Rightarrow V = \frac{309 \cdot 8,31 \cdot (350 + 273)}{3,94 \cdot 10^5} = 4,060 \text{ m}^3$$

Volumen superior al del recipiente que es: $0,4 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ m} = 0,4 \text{ m}^3$

Los topes impiden alcanzar el volumen anterior, por tanto el émbolo se para en los topes y con ello el volumen del gas es de $0,4 \text{ m}^3$, por tanto, la altura del pistón respecto a la base es $1,0 \text{ m}$.

b) Aplicamos la ecuación de los gases perfectos cuando el pistón está en contacto con los topes

$$P = \frac{nRT}{V} = \frac{309 \cdot 8,31 \cdot (350 + 273)}{0,4} = 4,0 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{Volumen}} = \frac{309 \text{ mol} \cdot 29 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{g}}}{0,4 \text{ m}^3} = 22,4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

c) El proceso de expansión del gas es isoterma y se realiza a la temperatura de 627 K , y como se trata de un gas perfecto la variación de energía interna es nula. y según el primer principio de la termodinámica

$$\Delta U = 0 = Q + W$$

El trabajo de expansión se realiza de forma irreversible, contra la presión sobre el gas P_{ext}

$$W = -P_{\text{ext}} \cdot \Delta V = \left(P_o + \frac{mg}{S} \right) \cdot (0,4 - 0,2) = 3,94 \cdot 10^5 \cdot 0,2 = -7,88 \cdot 10^4 \text{ J}$$

El signo negativo indica que el trabajo lo realiza el sistema, luego el calor suministrado es

$$0 = Q + W \Rightarrow Q = -W = -(-7,88 \cdot 10^4 \text{ J}) = +7,88 \cdot 10^4 \text{ J}$$

El calor es positivo, el sistema lo recibe desde el exterior en este caso desde el aceite.

d) En el proceso de expansión hay dos cambios de entropía, un aumento debido a la expansión del gas y una disminución debido a la energía calorífica que pierde el aceite. Para el gas cuya transformación es a temperatura constante, $T_f = T_i$

$$\Delta S_{\text{gas}} = 309 \cdot \left(C_v \ln \frac{T_f}{T_i} + R \ln \frac{V_f}{V_i} \right) = 309 \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{0,4}{0,2} = 1,78 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

La variación de entropía del aceite es

$$\Delta S_{\text{acet}} = -\frac{Q}{T} = -\frac{7,88 \cdot 10^4}{623} = -0,126 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

La variación de entropía del s proceso

$$\Delta S = \Delta S_{\text{gas}} + \Delta S_{\text{acit}} = 1,780 \cdot 10^3 - 0,126 \cdot 10^3 = 1,654 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Dado que el proceso es irreversible este transcurre con aumento de entropía.

La ecuación de evolución del gas al ser a temperatura constante está definida por la ecuación $PV = \text{Cte}$ que es una hipérbola equilátera.

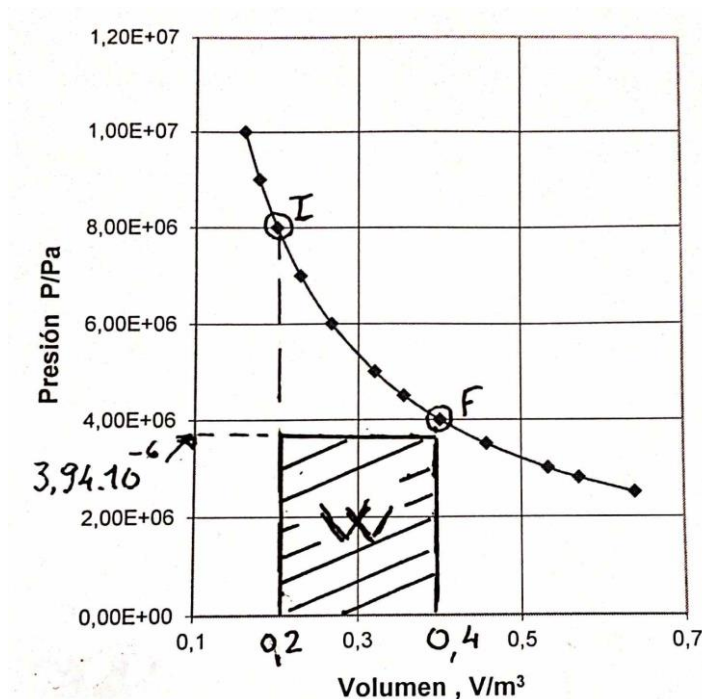
Se cumple que

$$PV = \text{Cte} \Rightarrow 8 \cdot 10^6 \cdot 0,2 = 1,6 \cdot 10^6$$

Si se fija otra presión el volumen vale $V = \frac{1,6 \cdot 10^6}{P}$

por ejemplo para $P=6 \cdot 10^6$ el volumen vale $V = \frac{1,6 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^6} = 0,266 \text{ m}^3$

Siguiendo este método se ha construido la siguiente gráfica.



I, representa el estado inicial del gas y F el final. El trabajo corresponde al área rayada. La representación T frente a S con una curva determinada no puede hacerse con la información del problema.

Lo que sabemos es que hay un aumento de entropía del aire a la temperatura de 350°C y que hemos calculado en $1,78 \cdot 10^3 \text{ J/K}$, por tanto, la gráfica será un segmento de esa longitud sin que podamos localizarlo en un diagrama cuantitativo T-S.

Pues eso supondría conocer la entropía a la presión inicial y a la presión final.. Es como decir que en un edificio hay una diferencia de alturas de 10 m entre dos pisos, y pretender decir entre qué pisos ocurre esa diferencia de alturas si no hay más datos.

56.- (568).- Un cilindro adiabático, de sección $S = 1,00 \text{ m}^2$ dotado de un émbolo horizontal también adiabático de masa $M = 1000 \text{ kg}$ y capacidad calorífica despreciable, está dividido en dos cámaras por un tabique diatérmico (diatérmico) rígido y fijo. Sobre el exterior del émbolo, que puede deslizar sin rozamiento, actúa una presión exterior $P_o = 1,00 \text{ bar}$. El compartimiento superior A, contiene $n_A = 10$ moles de un gas ideal de $C_v = 3/2 R \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ a $T_1 = 300 \text{ K}$ y el inferior, B, $n_B = 100$ moles del mismo gas a T_1 y $P_B = 10,00 \text{ bar}$. En estas condiciones se pone B en contacto térmico con una fuente exterior de la que recibe 1000 kJ de calor, Una vez absorbido este calor se rompe el tabique llegándose a un nuevo estado de equilibrio. Calcular

1) ¿Cuánto sube el émbolo?

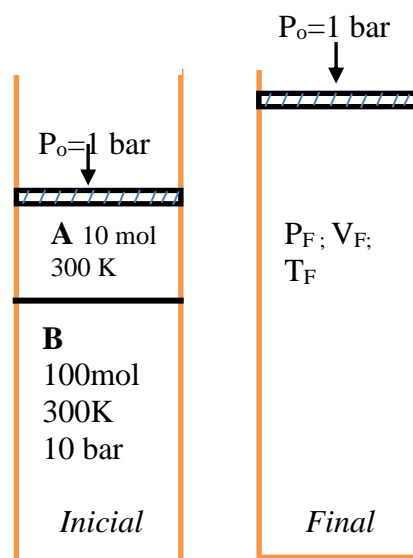
2) Temperatura final del cilindro

3) Incremento de entropía del cilindro en el proceso global.

Datos $g = 9,8 \text{ m/s}^2$; $T_o = 300 \text{ K}$

En la figura lateral se representan los estados inicial y final del sistema.

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$



1) Cálculo del volumen inferior B

$$V_B = \frac{n_B R T}{P_A} = \frac{100 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J mol}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K}}{10^6 \text{ Pa}} = 0,249 \text{ m}^3$$

Cálculo de la presión y del volumen en la parte superior A

$$P_A = P_o + \frac{Mg}{S} = 10^5 + \frac{10^3 \cdot 9,8}{1,00} = 1,098 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_A = \frac{n_A R T_1}{P_A} = \frac{10 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J mol}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K}}{1,098 \cdot 10^5} = 0,227 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen en el estado inicial } V_1 = V_A + V_B = 0,249 + 0,227 = 0,476 \text{ m}^3$$

En el estado inicial el gas contenido en A, cuya presión en P_A está en equilibrio con la presión exterior P_o más la que ejerce el émbolo debido a su peso. Al romper el tabique y mezclarse los gases, aumenta el volumen y como estaba el gas B a una presión superior, conlleva realizar un trabajo contra la presión exterior y la expansión del sistema cesa cuando haya equilibrio entre la mezcla de gases y la presión exterior.

Cálculo de la presión final $P_F = P_o + \frac{Mg}{S} = 1,098 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Cálculo de la variación de energía interna del gas al pasar del estado inicial al final

$$\Delta U = (n_A + n_B) C_V \Delta T = 110 \cdot \frac{3}{2} R \cdot (T_F - 300) = 1371 (T_F - 300)$$

Cálculo del trabajo irreversible de expansión del gas, contra la presión exterior que es constante P_F

$$W = -\int P dV = -(10^5 + \frac{Mg}{S})(V_F - V_I) = -1,098 \cdot 10^5 (V_F - 0,476)$$

Aplicación del primer principio de la Termodinámica, recordando del enunciado que se da al sistema una cantidad de calor $Q(+) = 1000 \text{ kJ} = 10^6 \text{ J}$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 1371(T_F - 300) = 10^6 - 1,098 \cdot 10^5 (V_F - 0,476) \quad (1)$$

Relación entre V_F y T_F mediante la ecuación de los gases perfectos

$$P_F V_F = (n_A + n_B) R T_F \Rightarrow T_F = \frac{1,098 \cdot 10^5 \cdot V_F}{110 \cdot 8,31} = 120,1 V_F \quad (2)$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$1371 (120,1 V_F - 300) = 10^6 - 1,098 \cdot 10^5 V_F + 0,476 \cdot 1,098 \cdot 10^5 \Rightarrow$$

$$274457 V_F = 1463,56 \cdot 10^3 \Rightarrow V_F = 5,333 \text{ m}^3$$

Altura final del émbolo

$$h_F = \frac{V_F}{S} = \frac{5,333 \text{ m}^3}{1 \text{ m}^2} = 5,333 \text{ m}$$

$$\text{Altura inicial del embolo } h_I = \frac{V_A}{S} + \frac{V_B}{S} = 0,476 \text{ m}$$

$$\text{Altura que sube el émbolo } \Delta h = 5,333 - 0,476 = 4,857 \text{ m}$$

2) Sustituyendo V_F en la ecuación (2) $T_F = 120,1 \cdot 5,333 = 640 \text{ K}$

3) Al pasar del estado inicial al final hay variación de la temperatura y del volumen de cada uno de los gases, siendo el volumen final y la temperatura final, la misma para cada uno de ellos, por ocupar el mismo recipiente y estar en equilibrio térmico.

Para cada gas:

$$\Delta S_i = (\text{número de moles de } i) \left[C_V \ln \frac{T_F}{T_I} + R \ln \frac{V_F}{V_I} \right]$$

La variación de entropía del sistema es:

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 10 \left(\frac{3R}{2} \cdot \ln \frac{640}{300} + 8,31 \cdot \ln \frac{5,333}{0,227} \right) + 100 \left(\frac{3R}{2} \cdot \ln \frac{640}{300} + 8,31 \cdot \ln \frac{5,333}{0,249} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S = 356,8 + 3490,8 = 3,8 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

También puede utilizarse la ecuación

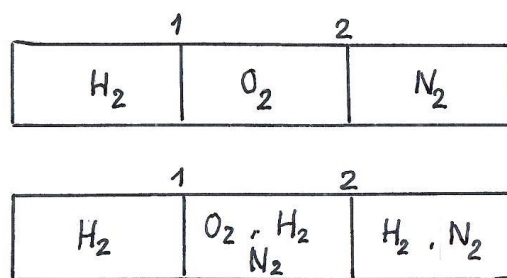
$$\Delta S = (\text{número de moles}) \left[C_p \ln \frac{T_f}{T_i} - R \ln \frac{P_f}{P_i} \right]$$

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = 10 \left(\frac{5R}{2} \ln \frac{640}{300} - R \ln \frac{1,098 \cdot 10^5}{1,098 \cdot 10^5} \right) + 100 \left(\frac{5R}{2} \ln \frac{640}{300} - R \ln \frac{1,098 \cdot 10^5}{10^6} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S = 157,4 + 3409,8 = 3,6 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

57.- (586.-) *Un recipiente de volumen $V=30$ litros está dividido en tres compartimentos iguales por medio de dos membranas semipermeables. Inicialmente el primer compartimento contiene 30 gramos de hidrógeno, el segundo 160 gramos de oxígeno y el tercero 70 gramos de nitrógeno. La membrana 1 deja pasar al hidrógeno pero no al oxígeno ni al nitrógeno, la membrana 2 deja pasar al hidrógeno y al nitrógeno. Determinar la presión en cada compartimento cuando se alcance el equilibrio. El proceso ocurre a temperatura constante $T = 300$ K Masa molares Hidrógeno $2 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, Oxígeno $32 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, Nitrógeno $28 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, constante de los gases $R = 8,31 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$*
Olimpiadas de Moscú

En la figura 1 se representa la situación inicial y la final de los gases



Como el hidrógeno puede pasar por las dos membranas en el equilibrio está en los tres compartimentos. Dado que el sistema de paso es dinámico el equilibrio se alcanza cuando las presiones del hidrógeno son las mismas en los tres compartimentos

Compartimento de la izquierda

$$p_1 = \frac{n_H RT}{V} = \frac{10 \text{ g}}{2 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \cdot \frac{8,31 \frac{\text{J}}{\text{molK}} 300 \text{ K}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = 1,25 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Los moles iniciales de nitrógeno son

$$n(\text{iniciales de } N_2) = \frac{70 \text{ g}}{28 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 2,5 \text{ mol}$$

La mitad está en el compartimento central y la otra mitad en el de la derecha, por tener la misma temperatura, presión parcial y ocupar el mismo volumen.

Compartimento central

$$p_2 = p_H + p_O + p_N = 1,25 \cdot 10^6 + \frac{160 \text{ g}}{32 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \frac{8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} + 1,25 \frac{8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \cdot 300 \text{ K}}{10 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}$$

$$p_2 = 1,25 \cdot 10^6 + 1,25 \cdot 10^6 + 0,31 \cdot 10^6 = 2,81 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Compartimento de la derecha. La presión parcial del hidrógeno es la misma en los tres compartimentos por ser las membranas 1 y 2 permeables para este gas.

$$p_3 = p_H + p_N = 1,25 \cdot 10^6 + 0,31 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1,56 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

58.- (577).- *Un mol de gas ideal monoatómico pasa de un estado 1 a un estado 2 cuyas presiones y temperaturas son (p_1, V_1) ; (p_2, V_2) evolucionando a través de una serie de estados de equilibrio, que se encuentran en una recta en el diagrama p-V*

1) *Calcular el trabajo realizado*

2) *Hallar la función $p=p(V)$*

3) *Hallar $T=T(V)$ dando el resultado en función de p_1, V_1, p_2, V_2*

4) *Calcular la variación de energía interna al pasar del estado 1 al 2*

5) *Calcular el calor recibido por el gas durante la anterior evolución dando el resultado en función de p_1, V_1, p_2, V_2*

6) *Concretar el anterior resultado para una transformación isobara y para una isocora expresando estos resultados exclusivamente en función de T_1, T_2 y R .*

7) *Calcular la capacidad calorífica media del gas en la anterior evolución expresándola en función de p_1, V_1, p_2, V_2 y R*

8) *Concretar el anterior resultado para una transformación isobara y para una isocora.*

Examen de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Madrid

1) En el diagrama p-V la transformación se representa por una recta, tal como indica el enunciado. Hacemos $p_1 > p_2$ ya que el gas ejecuta trabajo y por consiguiente evoluciona de menor a mayor volumen siendo el trabajo ejecutado de expansión. El proceso se verifica de forma reversible.

El trabajo en una expansión está definido por la integral

$$W = - \int p dV$$

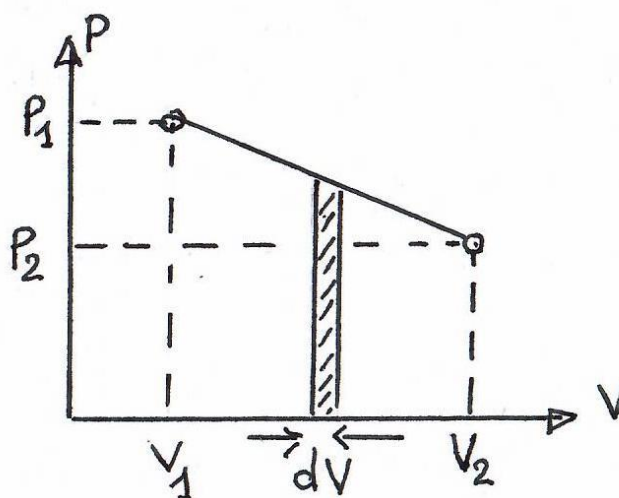


Fig.1

Observado la figura 1, se deduce que lo que está bajo el signo de integración en la ecuación del trabajo es el área infinitesimal rayada y el valor de la integral se corresponde

con el área comprendida entre V_1 y V_2 . El área de un trapecio es semisuma de las bases por la altura. Recuérdese que las bases son dos segmentos paralelos y en la figura están situadas verticales

$$W = -\frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2}$$

El signo menos indica que el trabajo es realizado por el sistema hacia el medio (expansión)

2) Dado que la transformación es una línea recta de la cual conocemos dos puntos aplicamos la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0) \Rightarrow p - p_1 = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} (V - V_1)$$

3) Por ser un gas ideal y un mol

$$pV = RT \Rightarrow T = \frac{pV}{R} \Rightarrow T = \frac{\left[\left(p_1 + \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} \right) (V - V_1) \right] V}{R}$$

4) Por tratarse de un gas ideal en que las moléculas no se atraen entre sí, que sus dimensiones son despreciables frente al volumen y que se desplazan rápidamente, la teoría cinética de los gases conduce a que la energía de las moléculas es únicamente cinética de traslación, cuyo valor medio por molécula es

$$\overline{E_c} = \frac{3}{2} kT$$

Donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Si la masa de gas es en este caso 1 mol, tiene N_A moléculas. La energía cinética del gas es

$$E_c = N_A \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} N_A kT = \frac{3}{2} RT$$

Y esta es precisamente lo que en Termodinámica denominamos energía interna del gas ideal, que solo es función de su temperatura. La variación de energía interna del estado 1 al 2 es.

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} R (T_2 - T_1)$$

5) El primer principio de la Termodinámica establece la relación siguiente

$$\Delta U = Q + W$$

Si el trabajo o el calor se suministran al sistema termodinámico es positivo y negativo si sale del sistema, entonces es el sistema el que proporciona la energía al medio

$$Q = \Delta U - W = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) - \left[-\frac{(p_1 + p_2)(V_2 - V_1)}{2} \right] =$$

$$= \frac{3}{2}p_2V_2 - \frac{3}{2}p_1V_1 + \frac{p_1V_2}{2} - \frac{p_1V_1}{2} + \frac{p_2V_2}{2} - \frac{p_2V_1}{2} = 2(p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{1}{2}(p_1V_2 - p_2V_1)$$

6) En una transformación isobara $P_1 = P_2$. Aplicando esta relación a la ecuación anterior

$$Q_p = 2(p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{5}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1)$$

En una transformación isocora $V_1=V_2$

$$Q_v = 2(p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{1}{2}(p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1)$$

7)

$$C_m = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{2(p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{1}{2}(p_1V_2 - p_2V_1)}{T_2 - T_1} = \frac{2R(T_2 - T_1)}{T_2 - T_1} + \frac{\frac{1}{2}(p_1V_2 - p_2V_1)}{\frac{p_2V_2}{R} - \frac{p_1V_1}{R}} =$$

$$= 2R + \frac{R(p_1V_2 - p_2V_1)}{2(p_2V_2 - p_1V_1)}$$

8)

Isobara $p_2=p_1$

$$C_p = 2R + \frac{R}{2} \frac{p_1(V_2 - V_1)}{p_1(V_2 - V_1)} = \frac{5}{2}R$$

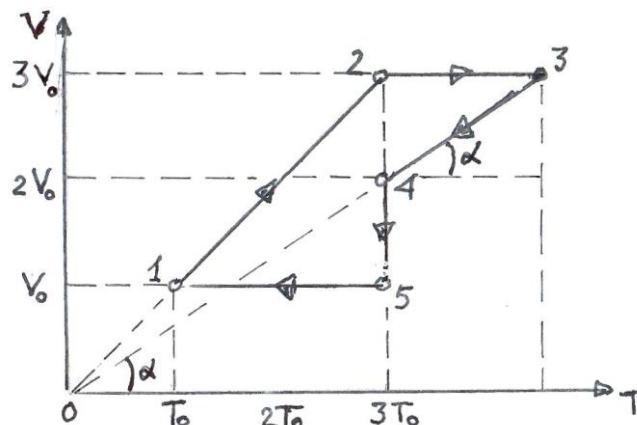
Isocora $V_2=V_1$

$$C_v = 2R + \frac{R}{2} \frac{V_1(p_1 - p_2)}{V_1(p_2 - p_1)} = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

59.- (592.-)

1) Obtener el diagrama P-V a partir del ciclo de la figura.

2) Calcular el rendimiento de la máquina térmica que efectúa el ciclo de la figura, empleando como sustancia de trabajo un gas ideal diatómico



1) Designamos con P_0 a la presión del gas en 1 y calculamos las coordenadas termodinámicas de los otros vértices

$$\text{Entre 1 y 2} \quad \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_2 \cdot 3V_0}{3T_0} \Rightarrow P_2 = P_0 \quad \text{Coordenadas de 2, } (P_0, 3V_0, 3T_0)$$

$$\text{Entre 2 y 3} \quad \frac{P_0 \cdot 3V_0}{3T_0} = \frac{P_3 \cdot 3V_0}{T_3} \Rightarrow \frac{P_0}{3T_0} = \frac{P_3}{T_3}$$

Para relacionar P_2 y P_3 con las magnitudes que estimamos conocidas P_0 , V_0 , T_0 acudimos a relaciones trigonométricas que se deducen de la figura

$$\text{Para el ángulo alfa inferior de la figura en O} \quad \tan \alpha = \frac{3V_0}{T_3}$$

$$\text{Para el ángulo alfa de la figura en 4,} \quad \tan \alpha = \frac{3V_0 - 2V_0}{T_3 - 3T_0} = \frac{V_0}{T_3 - 3T_0}$$

De ambas

$$\frac{3V_0}{T_3} = \frac{V_0}{T_3 - 3T_0} \Rightarrow 3T_3 - 9T_0 = T_3 \Rightarrow T_3 = 4,5 T_0 \Rightarrow \frac{P_0}{3 T_0} = \frac{P_3}{4,5 T_0} \Rightarrow P_3 = 1,5 P_0$$

Coordenadas de 3, $(1,5 P_0, 3 V_0, 4,5 T_0)$

Entre 3 y 4

$$\frac{1,5 P_0 \cdot 3 V_0}{4,5 T_0} = \frac{P_4 \cdot 2 V_0}{3 T_0} \Rightarrow \frac{1,5 P_0 \cdot 3}{4,5} = \frac{P_4 \cdot 2}{3} \Rightarrow 9 P_4 = 9 \cdot 1,5 P_0 \Rightarrow P_4 = 1,5 P_0$$

Coordenadas de 4, $(1,5 P_0, 2 V_0, 3 T_0)$

Entre 4 y 5

$$\frac{1,5 P_0 \cdot 2 V_0}{3 T_0} = \frac{P_5 \cdot V_0}{3 T_0} \Rightarrow P_5 = 3 P_0$$

Coordenadas de 5, $(3 P_0, V_0, 3 T_0)$

Entre 1 y 2 la transformación es a presión constante

Entre 2 y 3 la transformación es a volumen constante

Entre 3 y 4 la transformación es a presión constante

Entre 4 y 5 la transformación es a temperatura constante

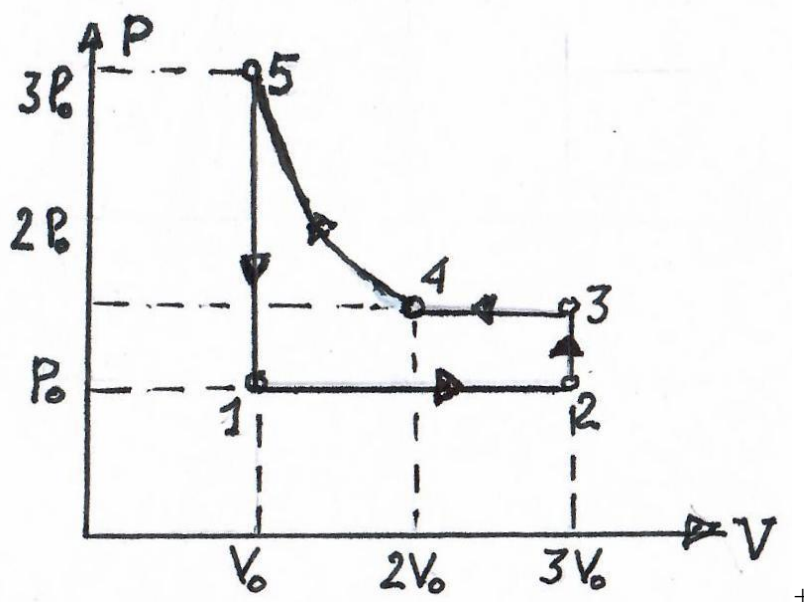
Entre 5 y 1 la transformación es a volumen constante

Para construir el diagrama P-V colocamos los diferentes vértices cuyas coordenadas son las siguientes y los unimos mediante segmentos rectilíneos, menos 4-5 que es una isoterma.

Coordenadas de 1, (P_0, V_0, T_0)

Coordenadas de 2, $(P_0, 3 V_0, 3 T_0)$; Coordenadas de 3, $(1,5 P_0, 3 V_0, 4,5 T_0)$

Coordenadas de 4, $(1,5 P_0, 2 V_0, 3 T_0)$; Coordenadas de 5, $(3 P_0, V_0, 3 T_0)$



2) Calculamos en cada tramo de la transformación el trabajo y el calor con el criterio de que si son positivos los recibe el sistema desde el exterior y si son negativos proceden del sistema al exterior.

Tramo 1-2

Aplicamos el primer principio de la Termodinámica

$$\Delta U = Q + \tau \Rightarrow \tau = -P_0(3V_0 - V_0) = -2P_0V_0 \Rightarrow Q = \Delta U - \tau = nC_p(T_2 - T_1) + 2P_0V_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = n \frac{7R}{2}(3T_0 - T_0) + 2P_0V_0 = 7nRT_0 + 2P_0V_0 = 7P_0V_0 + 2P_0V_0 = 9P_0V_0$$

Tramo 2-3

$$\Delta U = Q + \tau \Rightarrow \tau = -\int P dV = 0 \Rightarrow \Delta U = nC_v(T_3 - T_4) = Q \Rightarrow Q = n \frac{5}{2}R(4,5T_0 - 3T_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = 3,75 \cdot nRT_0 = 3,75P_0V_0$$

Tramo 3-4

$$\Delta U = Q + \tau \Rightarrow \tau = -\int P dV = -1,5P_0(2V_0 - 3V_0) \Rightarrow \tau = 1,5P_0V_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta U = nC_p(T_4 - T_3) = Q + 1,5P_0V_0 \Rightarrow Q = n \frac{7}{2}R(3T_0 - 4,5T_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q = -5,25 \cdot nRT_0 = -5,25P_0V_0$$

Tramo 4-5

$$\Delta U = Q + \tau \Rightarrow \tau = -\int P dV = -\int_{V_4}^{V_5} \frac{nRT}{V} dV = -nRT(\ln V_5 - \ln V_4) = nR3T_0 \ln \frac{V_4}{V_5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = 3P_0V_0 \ln \frac{2V_0}{V_0} = 2,08P_0V_0 \Rightarrow \Delta U = 0 = Q + 2,08P_0V_0 \Rightarrow Q = -2,08P_0V_0$$

Tramo 5-1

$$\Delta U = Q + \tau \Rightarrow \tau = \int P dv = 0 \Rightarrow Q = \Delta U = nC_v(T_1 - T_5) = n \frac{5}{2}R(T_0 - 3T_0) = -5P_0V_0$$

El rendimiento es el cociente del trabajo ejecutado dividido por el calor absorbido. Según el criterio de signos los trabajos negativos son los hechos por el sistema al exterior y los calores absorbidos llevan signo positivo

$$\rho = \frac{\tau_{12}}{Q_{12} + Q_{22}} = \frac{|-2P_0V_0|}{9P_0V_0 + 3,75P_0V_0} \cdot 100\% = \frac{2}{12,75} \cdot 100\% = 15,7\%$$

60.- (614.)- a) Hallar la frecuencia de vibración en condiciones adiabáticas de una columna de gas encerrada en un tubo cilíndrico cerrado por un extremo y con un pistón de masa m bien ajustado pero que puede moverse libremente.

b) Una bola de acero de 2 cm de diámetro oscila verticalmente en un tubo de vidrio con un orificio de precisión montado sobre un frasco de vidrio de 12 litros que contiene aire a la presión atmosférica. Comprobar que el periodo de oscilación debe ser de aproximadamente 1 segundo. Admitir que las variaciones de presión son adiabáticas con $\gamma = 1,4$. Densidad del acero $= 7600 \text{ kg/m}^3$

Propuesto en el libro, *Vibraciones y ondas*. A.P. French

a) En la figura 1a está representado el cilindro que contiene un gas en equilibrio con el peso de la masa m y la presión atmosférica P_A . Las coordenadas termodinámicas del gas son P_0 , V_0 y T_0 y la sección del cilindro se designa con S y su altura por h_0 .

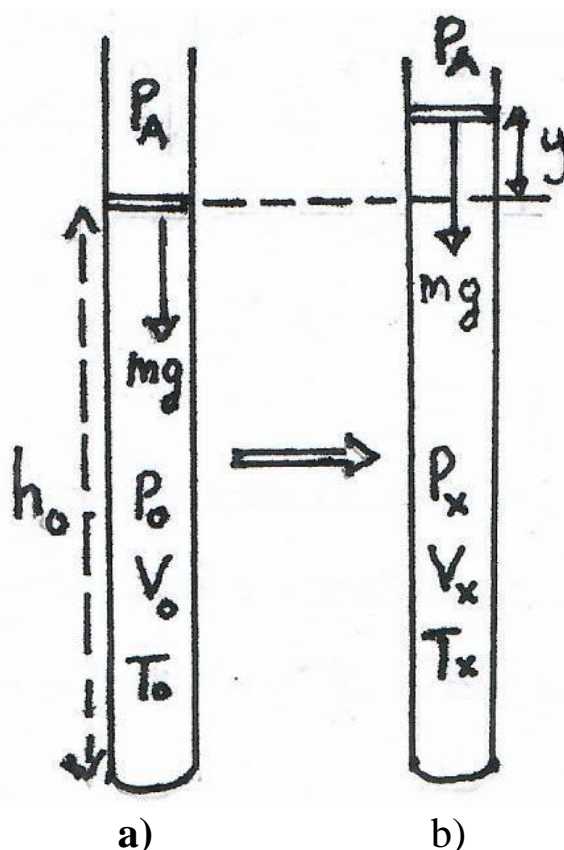


Fig 1

Al estar en equilibrio el gas se cumple

$$P_0 S = P_A S + mg$$

Supongamos que el pistón se desplaza verticalmente hacia arriba una distancia y que es pequeña respecto de h_0 (fig 1b). El gas cambia sus coordenadas termodinámicas a P_x , V_x , T_x y lo hace de forma adiabática, Si el sistema se deja en libertad la fuerza (vertical y hacia arriba) del gas es menor que el peso $mg + P_A S$, esta fuerza actúa en vertical y hacia abajo, por lo que el pistón se desplazará a la posición de equilibrio iniciando así un movimiento armónico que debido al inevitable rozamiento será amortiguado.

De acuerdo con la figura 1 y teniendo en cuenta que la transformación es adiabática

$$P_0 V_0^\gamma = P_x V_x^\gamma \Rightarrow P_0 (S h_0)^\gamma = P_x [S(h_0 + y)]^\gamma \Rightarrow P_x = \frac{P_0 h_0^\gamma}{(h_0 + y)^\gamma} = \frac{P_0}{\left(1 + \frac{y}{h_0}\right)^\gamma}$$

La fuerza resultante en sentido vertical y hacia abajo tiene de módulo

$$\begin{aligned} -F &= mg + P_A S - P_x S = mg + P_A S - \frac{P_0}{\left(1 + \frac{y}{h_0}\right)^\gamma} S = P_0 S - P_A S + P_A S - \frac{P_0}{\left(1 + \frac{y}{h_0}\right)^\gamma} S \\ -F &= P_0 S \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{y}{h_0}\right)^\gamma} \right) \end{aligned}$$

El signo menos de F aparece porque la fuerza está dirigida verticalmente hacia abajo y el desplazamiento y es positivo, y dirigido verticalmente hacia arriba.

Puesto que $y \ll h_0$ utilizamos la aproximación $(1 + x)^n = 1 + n x$

$$\begin{aligned} -F &= P_0 S \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\gamma y}{h_0}} \right) = P_0 S \left(\frac{1 + \frac{\gamma y}{h_0} - 1}{1 + \frac{\gamma y}{h_0}} \right) = P_0 S \left(\frac{\frac{\gamma y}{h_0}}{1 + \frac{\gamma y}{h_0}} \right) \approx P_0 S \frac{\gamma}{h_0} y = m \frac{d^2 y}{dt^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -m \frac{d^2 y}{dt^2} &= P_0 S \frac{\gamma}{h_0} y \Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} = -P_0 S \frac{\gamma}{m h_0} y \end{aligned}$$

El denominador $1 + \frac{\gamma y}{h_0}$ es prácticamente igual a 1 ya que y es muy pequeño respecto de h_0 . La ecuación final es la de un movimiento armónico de frecuencia angular

$$\omega = \sqrt{\frac{P_0 S \gamma}{m h_0}}$$

b) Este apartado hace referencia a un experimento clásico que puede encontrarse en los libros de termodinámica, por ejemplo en Calor y Termodinámica . M.W. Zemansky. Editorial Aguilar y es el experimento de Rűchhardt que sirve para determinar el valor de γ .

Un gas se halla contenido en un recipiente, en el problema con un volumen de 12 litros, el cual lleva acoplado un tubo vertical de vidrio con una bola de metal ajustada al tubo para que actúe como un pistón (figura 2).

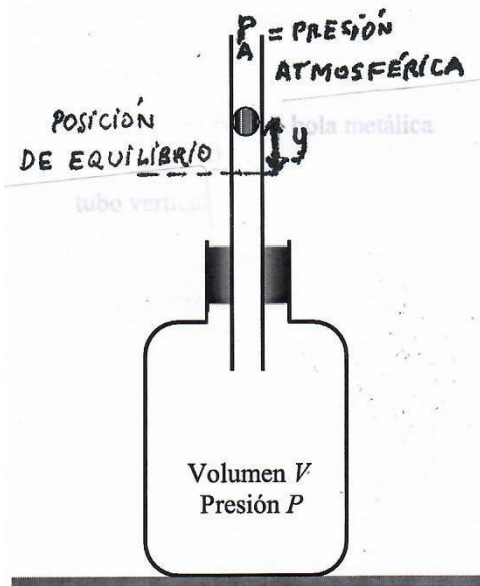


Fig.2

Cuando la bola se encuentra en la posición de equilibrio la presión del gas es $P= 1$ atmósfera y el volumen $V= 12$ litros. Si S es la sección del tubo vertical y m la masa de la bola de metal

$$PS = mg + P_A S$$

Cuando la bola está por encima de la posición de equilibrio, la presión del gas es menor y el volumen mayor. En esa posición ya no hay equilibrio, existe una fuerza en dirección vertical y sentido hacia abajo que tiende a llevar a la bola hacia la posición de equilibrio

$$-F = mg + P_A S - (P - \Delta P)S = PS - P_A S + P_A S - (P - \Delta P)S = S \Delta P$$

Los cambios en el aumento y disminución de la presión se verifican de forma adiabática

$$PV^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow P^\gamma V^{\gamma-1} dV + V^\gamma s dP = 0 \Rightarrow dP = -\frac{P^\gamma V^{\gamma-1}}{V^\gamma} dV \Rightarrow dP = -\frac{P^\gamma}{V} dV$$

Dado que las variaciones de volumen son muy pequeñas comparadas con el volumen V podemos escribir

$$\Delta P = \frac{P\gamma}{V} \Delta V \Rightarrow -\frac{F}{S} = \frac{P\gamma}{V} S y \Rightarrow -F = \frac{P\gamma S^2}{V} y \Rightarrow m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{P\gamma S^2}{V} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{P\gamma S^2}{Vm}} = \sqrt{\frac{101325 \cdot 1,4 \cdot [\pi(10^{-2})^2]^2}{12 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4}{3} \pi (10^{-2})^3 \cdot 7600}} = 6,05 \text{ s}^{-1} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{6,0} = 1,04 \text{ s}$$