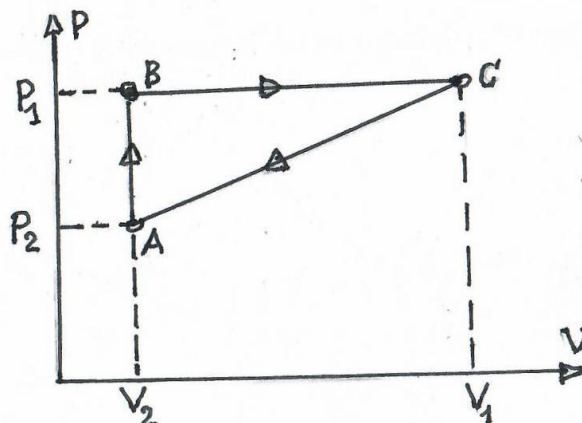


61.- (615.)-La figura inferior representa un ciclo de un motor imaginario para un gas perfecto. Suponiendo constantes sus capacidades caloríficas, demuéstrese que el rendimiento térmico es

$$\eta = \frac{1}{2C_V T_B} \frac{(P_1 - P_2)(V_1 - V_2)}{\left[\left(1 - \frac{P_2}{P_1}\right) + \gamma \left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right) \right]}$$



Propuesto en el libro Calor y Termodinámica. M. W. Zemansky

El rendimiento térmico de un ciclo es el cociente entre el trabajo ejecutado hacia el exterior y el calor recibido por el sistema desde el exterior.

Suponemos que el ciclo lo realiza 1 mol de gas.

El trabajo ejecutado por el sistema está medido por el área encerrada por el ciclo, en el caso de la figura el área del triángulo ABC

$$\tau = \frac{(P_1 - P_2)(V_1 - V_2)}{2}$$

El segundo principio de la termodinámica establece $\Delta U = Q + \tau$, siendo $\tau = -\int P dV$

En la transformación AB no hay trabajo de expansión, luego el calor implicado está medido por la variación de energía interna desde A a B.

$$\Delta U = (Q)_V = C_V (T_B - T_A)$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre A y B

$$\frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B} \Rightarrow T_A = T_B \frac{P_A}{P_B} = T_B \frac{P_2}{P_1}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$(Q)_v = C_v \left(T_B - T_B \frac{P_2}{P_1} \right) = C_v T_B \left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right)$$

Como $P_2 < P_1$, el término del paréntesis es positivo y lo es el calor $(Q)_v$, por tanto, este calor lo recibe el gas desde el exterior

La transformación BC se verifica a presión constante y el calor implicado en el proceso esta medido por la variación de entalpia

$$\Delta H = (Q)_p = C_p (T_C - T_B)$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre B y C

$$\frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \Rightarrow T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = T_B \frac{V_1}{V_2}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$(Q)_p = C_p \left(T_B \frac{V_1}{V_2} - T_B \right) = \gamma C_v T_B \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right)$$

Al ser $V_1 > V_2$ el término del paréntesis es positivo y en consecuencia $(Q)_p$ es positivo, el sistema recibe este calor desde el exterior.

En la transformación CA, relacionamos las temperaturas entre C y A

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_C V_C}{T_C} \Rightarrow T_C = T_A \frac{P_C V_C}{P_A V_A} = T_A \frac{P_1 V_1}{P_2 V_2}$$

Al ser $P_1 V_1 > P_2 V_2$, la temperatura $T_C > T_A$ el gas se enfría cediendo calor al exterior,

El calor que recibe el gas al realizar un ciclo es.

$$Q = C_v T_B \left[\left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right) + \gamma \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \right]$$

El rendimiento térmico

$$\eta = \frac{(P_1 - P_2)(V_1 - V_2)}{2 C_v T_B \left[\left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right) + \gamma \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \right]} = \frac{(P_1 - P_2)(V_1 - V_2)}{2 C_v T_B \left[\left(1 - \frac{P_2}{P_1} \right) + \gamma \left(\frac{V_1}{V_2} - 1 \right) \right]}$$

62.- (627).-Un pistón móvil que carece de masa separa en dos partes un recipiente. El recipiente está aislado del exterior. Un aparte contiene 3 gramos de moléculas de hidrógeno a una temperatura de 300 K; la otra parte contiene 16 gramos de moléculas de oxígeno a una temperatura de 400 K. El pistón conduce lentamente calor entre el oxígeno y el hidrógeno y la temperatura del sistema se equilibra. Todo el proceso se verifica de forma cuasi estática. Calcular 1) La temperatura final T del sistema 2) La relación entre la presión final P_f la inicial P_i 3) El calor transmitido desde el oxígeno al hidrógeno

Masas moleculares: hidrógeno = 2 g/mol , oxígeno=32 g/mol

Propuesto en las Olimpiadas de Asia

$$1) \text{ Moles de hidrógeno } n_H = \frac{3 \text{ g}}{2 \text{ g mol}^{-1}} = 1,5 \text{ mol} \quad ;$$

$$\text{Moles de oxígeno } n_O = \frac{16 \text{ g}}{32 \text{ g mol}^{-1}} = 0,5 \text{ mol}$$

El hidrogeno recibe calor y aumenta su temperatura de 300 K a T . El oxigeno disminuye su temperatura y pasa e 400 K a T .

La variación de energía interna del hidrógeno es: $\Delta U_H = 1,5 C_v (T - 300)$

La variación de energía interna del oxígeno es; $\Delta U_O = 0,5 C_v (T - 400)$

Observe que la energía interna es una función de estado que solamente su variación depende del estado inicial y el final y es independiente del camino realizado en la transformación. Al considerar a los gases como ideales y que la energía interna de los gases ideales depende únicamente de la temperatura, podemos escribir las ecuaciones anteriores.

Dado que el sistema está aislado la variación global de la energía interna de los gases es nula

$$1,5 C_v (T - 300) + 0,5 C_v (T - 400) = 0 \Rightarrow 1,5T - 450 + 0,5T - 200 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{650}{2} = 325 \text{ K}$$

2) Aplicamos la ecuación de los gases ideales

$$P_i V_H^i = 1,5 R 300 \quad (1) \quad ; \quad P_f V_H^f = 1,5 R 325 \quad (2) \quad ; \quad P_i V_O^i = 0,5 R 400 \quad (3) \quad ; \quad P_f V_O^f = 0,5 R 325 \quad (4)$$

$$\text{Los volúmenes son aditivos} \quad V_H^i + V_O^i = V_H^f + V_O^f \quad (5)$$

$$\text{De las ecuaciones (1) y (3) y (2) y (4)} \quad \frac{V_H^i}{V_O^i} = \frac{1,5 \cdot 300}{0,5 \cdot 400} = \frac{9}{4} \quad ; \quad \frac{V_H^f}{V_O^f} = 3$$

Sustituyendo en (5) $\frac{9}{4} V_o^i + V_o^i = 3V_o^f + V_o^f \Rightarrow \frac{13}{4} V_o^i = 4V_o^f \Rightarrow V_o^f = \frac{13}{16} V_o^i$

Dividiendo (3) entre (4)

$$\frac{P_i V_o^i}{P_f V_o^f} = \frac{400}{325} \Rightarrow \frac{P_i V_o^i}{P_f \frac{13V_o^i}{16}} = \frac{400}{325} \Rightarrow \frac{P_i}{P_f} = \frac{13 \cdot 400}{16 \cdot 325} = 1$$

3) El volumen final de oxígeno es menor que el inicial, esto quiere decir que el gas hidrógeno ejerce un trabajo sobre el gas oxígeno y al mismo tiempo recibe una cierta cantidad de calor desde el gas oxígeno.

Según el primer principio

$$\Delta U_H = 1,5 C_v (325 - 300) = Q + W \Rightarrow Q = 1,5 C_v (325 - 300) - W$$

El trabajo es:

$$W = - \int_{V_i^H}^{V_f^H} P(\text{exterior}) dV = -P_i (V_f^H - V_i^H) = -P_i V_f^H + P_i V_i^H = -1,5R \cdot 325 + 1,5R \cdot 300$$

$$W = -1,5R \cdot 25 \text{ J}$$

$$Q = 1,5 \cdot \frac{5}{2} R \cdot 25 + 1,5R \cdot 25 = 1091 \text{ J}$$

63.-(633).-Un mol de gas ideal diatómico realiza un ciclo reversible partiendo de las siguientes coordenadas termodinámicas $(P_1; V_1, T_1)$, pasa al estado 2 mediante un transformación isotérmica de coordenadas $(5P_1, V_2, T_1)$, a continuación evoluciona al estado 3 por calentamiento a volumen constante siendo sus coordenadas (P_3, V_2, T_3) , finalmente se cierra el ciclo mediante una expansión adiabática hasta el estado 1. Calcular el rendimiento de este ciclo.

Aplicando la ecuación de los gases ideales relacionamos las coordenadas de los estados 2 y 3 con las del estado 1.

$$\text{Estado 1 } P_1, V_1, T_1, \quad \text{estado 2 } P_1 V_1 = 5P_1 V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{V_1}{5}, \quad 5P_1, \quad \frac{V_1}{5}, T_1$$

Estado 3

$$P_3 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow \frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = \left(\frac{V_1}{\frac{V_1}{5}} \right)^\gamma = 5^\gamma \Rightarrow ; P_3 = P_1 5^\gamma$$

$$\frac{P_2}{T_1} = \frac{P_3}{T_3} \Rightarrow \frac{T_1}{T_3} = \frac{5P_1}{P_3} \Rightarrow T_3 = T_1 \frac{P_3}{5P_1} \Rightarrow T_3 = T_1 \frac{5^\gamma}{5}; \quad P_1 5^\gamma; \quad \frac{V_1}{5}; \quad T_1 5^{\gamma-1}$$

Aplicamos el primer principio de la termodinámica a las tres transformaciones

Estado 1 a estado 2

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 0 = Q + W \Rightarrow W = - \int_{V_1}^{V_2} P dv = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V} dv = -RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = RT_1 \ln 5$$

$Q = -RT_1 \ln 5$ Según el criterio de signos el trabajo al ser positivo se le comunica al sistema y el calor al ser negativo lo cede el sistema.

Estado 2 a estado 3

$$\text{El trabajo es nulo } \Delta U = Q \Rightarrow Q = C_v (T_3 - T_2) = C_v (T_1 \cdot 5^{\gamma-1} - T_1) = C_v T_1 (5^{\gamma-1} - 1)$$

El calor es positivo luego lo recibe el sistema desde el exterior

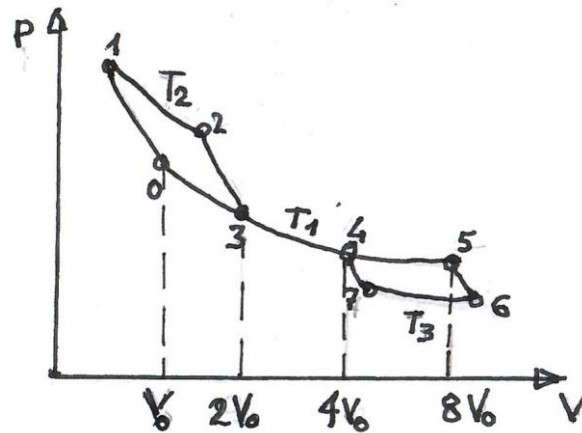
Estado 3 a estado 1

$$\text{El calor es nulo } \Delta U = W \Rightarrow W = C_v (T_1 - T_3) = C_v (T_1 - T_1 5^{\gamma-1}) = C_v T_1 (1 - 5^{\gamma-1})$$

El rendimiento es el cociente entre el trabajo efectuado y el calor recibido

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{|RT_1 \ln 5 + C_v T_1 (1 - 5^{\gamma-1})|}{|C_v T_1 (5^{\gamma-1} - 1)|} = \frac{|(C_p - C_v) \ln 5 + C_v (1 - 5^{\gamma-1})|}{|C_v (5^{\gamma-1} - 1)|} = \\ &= \frac{|(\gamma C_v - C_v) \ln 5 + C_v (1 - 5^{\gamma-1})|}{|C_v (5^{\gamma-1} - 1)|} \Rightarrow \\ \eta &= \frac{|(\gamma - 1) \ln 5 + 1 - 5^{\gamma-1}|}{|5^{\gamma-1} - 1|} = \left| \frac{0,4 \cdot \ln 5 + 1 - 5^{0,4}}{5^{0,4} - 1} \right| = 0,287\end{aligned}$$

64.-(637).- Un mol de gas ideal describe un ciclo termodinámico representado en la figura inferior



El ciclo empieza en cero y la secuencia es 0-1-2-3-4-5-6-7-4-3-0.

La secuencia 0-3-4-5 es una isoterma de temperatura T_1 .

1-2 es una isoterma de temperatura $T_2 > T_1$

6-7 es una isoterma de temperatura $T_3 < T_1$

0-1; 2-3; 5-6 y 7-4 son adiabáticas

Designamos con η_1 el rendimiento del ciclo 0-1-2-3 y η_2 el rendimiento del ciclo 4-5-6-7.

Determinar el rendimiento del ciclo de la figura en función de η_1 y η_2

El ciclo del enunciado se compone de dos ciclos de Carnot y un tramo isoterma entre 3 y 4 que se recorre dos veces una vez en sentido 3-4 y otra en sentido 4-3. El rendimiento del

ciclo lo designamos con $\varepsilon = \frac{\text{Trabajo efectuado}}{\text{Calor recibido}}$

Analizamos el ciclo de Carnot 0-1-2-3

$$W_{1-2} = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_2}{V} dV = -RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad ; \quad W_{2-3} = C_V(T_1 - T_2)$$

$$W_{3-0} = -RT_1 \ln \frac{V_0}{V_3} \quad ; \quad W_{0-1} = C_V(T_2 - T_1)$$

Los trabajos W_{2-3} y W_{0-1} suman cero, el trabajo efectuado en el ciclo es:

$$W = W_{1-2} + W_{3-0} = -RT_2 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_1 \ln \frac{V_0}{V_3} \quad (1)$$

La ecuación de una adiabática es $PV^\gamma = \text{Cte}$, sustituyendo P en la ecuación

$$P = \frac{RT}{V} \Rightarrow \frac{RT}{V} \cdot V^\gamma = \text{Cte} \Rightarrow TV^{\gamma-1} = \text{Cte}'$$

Aplicamos la ecuación anterior entre 2 y 3 y entre 0 y 1

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1} ; \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_0}{V_1} \Rightarrow \frac{V_3}{V_0} = \frac{V_2}{V_1}$$

Sustituyendo la relación de volúmenes en la ecuación (1)

$$W = -R T_2 \ln \frac{V_3}{V_0} - R T_1 \ln \frac{V_0}{V_3} = -R T_2 \ln \frac{2V_0}{V_0} - R T_1 \ln \frac{V_0}{2V_0} = -R T_2 \ln 2 + R T_1 \ln 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow W = -R(T_2 - T_1) \ln 2$$

El signo menos indica que el trabajo lo realiza el ciclo hacia el exterior

El calor que se toma del foco caliente (isoterma T_2)

$$\Delta U = 0 = Q + W \Rightarrow Q = -W_{1-2} = -(-R T_2 \ln \frac{V_2}{V_1}) = R T_2 \ln \frac{V_3}{V_0} = R T_2 \ln 2$$

El signo positivo indica que el calor es absorbido del foco caliente

$$\text{El rendimiento del ciclo de Carnot es: } \eta_c = \left| \frac{W}{Q} \right| = \frac{R(T_2 - T_1) \ln 2}{R T_2 \ln 2} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Aplicamos los resultados anteriores al ciclo 4-5-6-7 en donde $T_1 > T_3$

$$W = -R(T_1 - T_3) \ln 2 \quad Q = R T_1 \ln 2 \quad \eta_c = 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

Dado que en el ciclo se recorre de 3 a 4 y luego de 4 a 3 el trabajo es nulo, pero el calor tomado en el sentido de 3 a 4 es

$$\Delta U = 0 = Q + W \Rightarrow Q = R T_1 \ln \frac{V_4}{V_3} = R T_1 \ln 2$$

Rendimiento del ciclo

$$\varepsilon = \left| \frac{\text{Trabajo efectuado}}{\text{Calor recibido}} \right| = \frac{R(T_2 - T_1) \ln 2 + R(T_1 - T_3) \ln 2}{R T_2 \ln 2 + R T_1 \ln 2 + R T_1 \ln 2} = \frac{T_2 - T_1 + T_1 - T_3}{T_2 + T_1 + T_1} = \frac{T_2 - T_3}{2T_1 + T_2}$$

Expresamos las temperaturas T_2 y T_3 en función de T_1 y los rendimientos η_1 y η_2

$$\eta_1 = 1 - \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 1 - \eta_1 \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{1 - \eta_1} ;$$

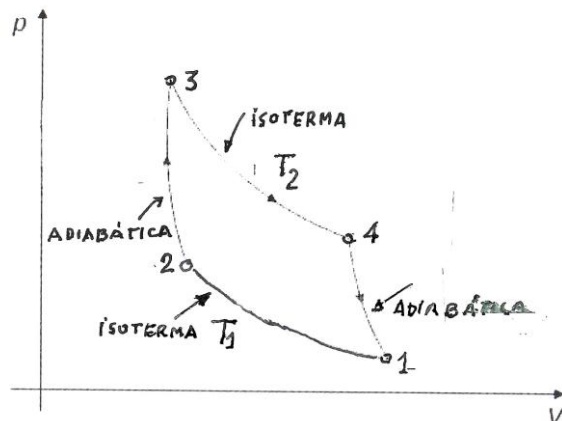
$$\eta_2 = 1 - \frac{T_3}{T_1} \Rightarrow \frac{T_3}{T_1} = 1 - \eta_2 \Rightarrow T_3 = T_1(1 - \eta_2)$$

Sustituyendo en ε

$$\varepsilon = \frac{\frac{T_1}{1 - \eta_1} - T_1(1 - \eta_2)}{2T_1 + \frac{T_1}{1 - \eta_1}} = \frac{\frac{1 - (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)}{1 - \eta_1}}{\frac{2(1 - \eta_1) + 1}{1 - \eta_1}} = \frac{1 - (1 - \eta_2 - \eta_1 + \eta_1\eta_2)}{2 - 2\eta_1 + 1} = \frac{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2}{3 - 2\eta_1}$$

65.- (639).-Un mol de gas ideal monoatómico describe un ciclo de Carnot. La mayor compresión se designa con $S = V_1/V_3$ y la temperatura del foco frío por T_1 . La razón de compresión adiabática es, $r = V_2/V_3$.

a) Si el valor de S es 6 calcular el de r con la condición de que el trabajo realizado por el gas sea máximo



b) Dibujar la gráfica r en el eje de abscisas frente a trabajo en el eje de ordenadas, siendo $T_1 = 300\text{ K}$

c) Calcular el valor de la temperatura del foco caliente cuando el trabajo es máximo.

d) Calcular el rendimiento del ciclo cuando el trabajo es máximo

$$a) \quad S = \frac{V_1}{V_3} \Rightarrow V_3 = \frac{V_1}{S} \quad ; \quad r = \frac{V_2}{V_3} \Rightarrow V_3 = \frac{V_2}{r} \Rightarrow \frac{V_1}{S} = \frac{V_2}{r} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{S}{r} \quad (1)$$

Relación entre 2 y 3

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma \Rightarrow \frac{RT_1}{V_2} V_2^\gamma = \frac{RT_2}{V_3} V_3^\gamma \Rightarrow T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \quad (2)$$

Relación entre 1 y 4

$$P_1 V_1^\gamma = P_4 V_4^\gamma \Rightarrow \frac{RT_1}{V_1} V_1^\gamma = \frac{RT_2}{V_4} V_4^\gamma \Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1} \quad (3)$$

Dividiendo (2) entre (3)

$$\frac{T_1 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2 V_3^{\gamma-1}}{T_2 V_4^{\gamma-1}} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} = \frac{r}{S} \quad (4)$$

Trabajo en el ciclo

$$W = W_{1-2} + W_{2-3} + W_{3-4} + W_{4-1}$$

$$W = -RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V (T_2 - T_1) - RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} + C_V (T_1 - T_2)$$

$$W = -RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -RT_1 \ln \frac{r}{S} - RT_2 \ln \frac{S}{r}$$

En W se sustituye T_2 despejándolo de la ecuación (2) y sustituyendo la relación de volúmenes del enunciado

$$W = -RT_1 \ln \frac{r}{S} - RT_1 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} \ln \frac{S}{r} = -RT_1 \ln \frac{r}{S} - RT_1 r^{\gamma-1} \ln \frac{S}{r} \Rightarrow$$

$$W = -RT_1 \left(\ln \frac{r}{S} + r^{\gamma-1} \ln \frac{S}{r} \right) = -RT_1 \left(-\ln \frac{S}{r} + r^{\gamma-1} \ln \frac{S}{r} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = -RT_1 \left(r^{\gamma-1} - 1 \right) \ln \frac{S}{r} \quad (5)$$

Para hallar el trabajo máximo derivamos la función $W(r)$ con respecto a r e igualamos a cero

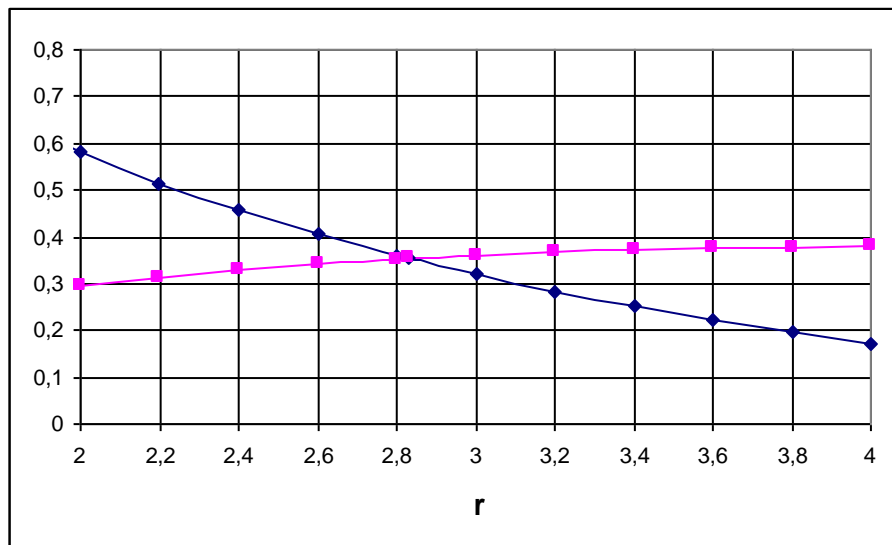
$$\frac{dW}{dr} = -RT_1 \left[\left(r^{\gamma-1} - 1 \right) \cdot \frac{r}{S} \cdot \frac{-S}{r^2} + \ln \frac{S}{r} \cdot r^{\gamma-2} (\gamma-1) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \left(r^{\gamma-1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{r} + \ln \frac{S}{r} \cdot r^{\gamma-2} (\gamma-1) = 0 \Rightarrow \left(r^{\gamma-1} - 1 \right) \cdot \frac{1}{r} = \ln \frac{S}{r} \cdot r^{\gamma-2} (\gamma-1)$$

Según el enunciado el gas es ideal y monoatómico, luego $\gamma = \frac{5}{3}$, sustituyendo este valor y $S=6$ en la ecuación anterior

$$\ln \frac{6}{r} \cdot r^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3} = \left(r^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \frac{1}{r} \quad (6)$$

Resolvemos la ecuación (6) dando valores a r y con cada uno de sus valores se calculan el primer miembro de la ecuación y el segundo. Con la tabla de valores se representa r frente a los valores obtenidos del primer miembro y en la misma gráfica r frente a los valores del segundo miembro. Las gráficas se cortan en un punto, el valor de r en ese punto es la solución



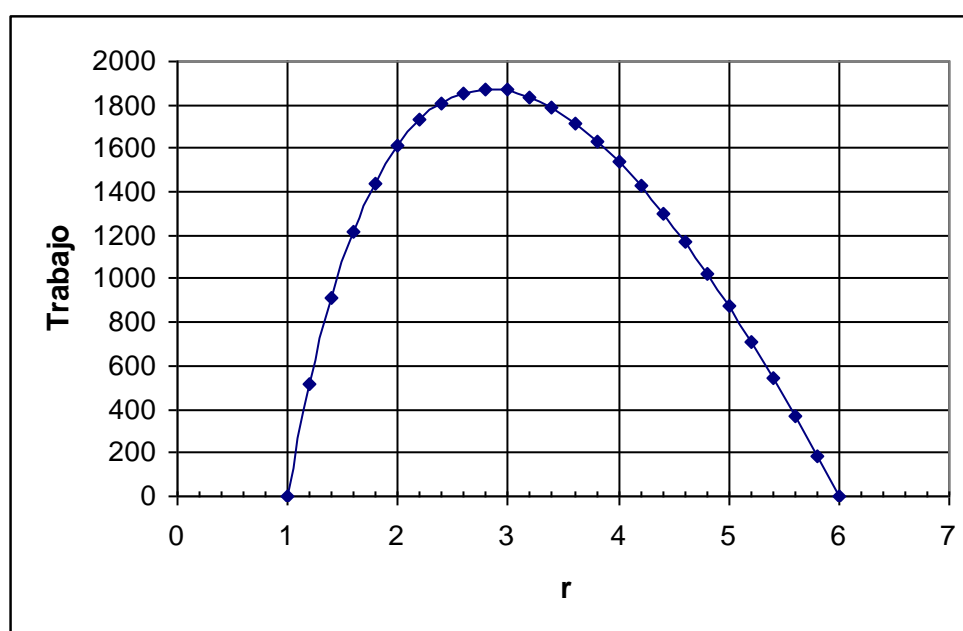
$$r = 2,83$$

- b) Damos valores a r en la ecuación (5). Los valores de r tienen los siguientes límites:

$$\text{Si } r = 1 \Rightarrow 1 = \frac{V_2}{V_3} \Rightarrow V_2 = V_3 \text{ no hay adiabática y no hay trabajo}$$

$$\text{Si } r = 6 \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{r}{S} = 1 \Rightarrow V_1 = V_2 \text{ no hay isoterma y no hay trabajo}$$

La gráfica entre $r=1$ y $r=6$ es la siguiente



c) A partir de las ecuaciones $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ y $\frac{V_2}{V_3} = r$

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = T_1 r^{\gamma-1} = 300 \cdot 2,83^{\frac{2}{3}} = 600 \text{ K}$$

d) El rendimiento es trabajo dividido por el calor tomado de la fuente caliente

$$\eta = \frac{|W|}{Q} = \frac{RT_1 \left(r^{\gamma-1} - 1 \right) \ln \frac{S}{r}}{RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}} = \frac{RT_1 \left(r^{\gamma-1} - 1 \right) \ln \frac{S}{r}}{RT_2 \ln \frac{S}{r}} = \frac{T_1 \left(r^{\gamma-1} - 1 \right)}{T_2} \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{300 \left(2,83^{\frac{2}{3}} - 1 \right)}{600} = 0,5$$

Otra forma de calcularlo es recordar la expresión del rendimiento del ciclo de Carnot

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300}{600} = 0,5$$

66.- (641)-Un mol de un gas ideal monoatómico realiza un ciclo de Carnot 1-2-3-4-1, siendo 1-2 una isoterma, 2-3 una adiabática, 3-4 una isoterma, 4-1 una adiabática. El punto 1 tiene una presión de una atmósfera y una temperatura de 300 K, la relación $S = \frac{V_1}{V_3} = 5$ y la $r = \frac{V_2}{V_3} = 2$.

Otro mol de gas ideal diatómico efectúa un ciclo de Carnot 1-2-3'-4'-1. El rendimiento de este ciclo es $0,82\eta$, siendo η el rendimiento del ciclo del gas monoatómico. Calcular

- Las coordenadas termodinámicas de los puntos 1, 2, 3, 4, 3', 4'.
- Los calores tomados de los focos calientes por ambos gases
- Los trabajos realizados en los dos ciclos
- A partir de los resultados de los apartados b y c calcular los rendimientos de los dos ciclos.
- Dibujar ambas gráficas en una representación P(eje de ordenadas) V(eje de abscisas)

a)

$$\text{Punto 1) } P_1 V_1 = R T_1 \Rightarrow V_1 = \frac{R T_1}{P_1} = \frac{0,082 \cdot 300}{1} = 24,6 \text{ L} \quad (1 \text{ atm}, 24,6 \text{ L}, 300 \text{ K})$$

$$\text{Punto 2) } V_3 = \frac{V_1}{5} = \frac{V_2}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{2}{5} V_1 = \frac{2}{5} 24,6 = 9,84 \text{ L};$$

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = \frac{1 \cdot 24,6}{9,84} = 2,5 \text{ atm} \quad (2,5 \text{ atm}, 9,84 \text{ L}, 300 \text{ K})$$

$$\text{Punto 3) } V_3 = \frac{V_1}{5} = \frac{24,6}{5} = 4,92 \text{ L}; \quad P_2 V_2^{\gamma_m} = P_3 V_3^{\gamma_m} \quad P_3 = P_2 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma_m}$$

El coeficiente adiabático del gas monoatómico lo designamos con $\gamma_m = 5/3$

$$P_3 = 2,5 \left(\frac{9,84}{4,92} \right)^{\frac{5}{3}} = 7,94 \text{ atm}; \quad T_2 = T_1; \quad \frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3}$$

$$T_3 = \frac{P_3 V_3 T_2}{P_2 V_2} = \frac{7,94 \cdot 4,92 \cdot 300}{2,5 \cdot 9,84} = 476 \text{ K} \quad (7,94 \text{ atm}, 4,92 \text{ L}, 476 \text{ K})$$

Punto 4)

$$T_4 V_4^{\gamma_m-1} = T_1 V_1^{\gamma_m-1}; \quad T_4 = T_3 = 476 \text{ K}; \quad V_4^{\gamma_m-1} = \frac{T_1 V_1^{\gamma_m-1}}{T_4} = \frac{300 \cdot 24,6^{\frac{2}{3}}}{476} = 5,33$$

$$V_4 = 5,33^{\frac{1}{\gamma_m-1}} = 5,33^{\frac{3}{2}} = 12,3 \text{ L}; \quad P_4 V_4 = R T_4 \Rightarrow P_4 = \frac{0,082 \cdot 476}{12,3} = 3,17 \text{ atm} \\ (3,17 \text{ atm}, 12,31 \text{ L}, 476 \text{ K})$$

$$\eta_m = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300}{476} = 0,37 \quad \text{El rendimiento del gas diatómico es}$$

$$\eta_d = 0,82 \cdot 0,37 = 0,30 \quad ; \quad 0,30 = 1 - \frac{300}{T_{2'}} \Rightarrow \frac{300}{T_{2'}} = 0,70 \Rightarrow T_{2'} = 429 \text{ K}$$

Para el gas diatómico el coeficiente diabático es $\gamma = 7/5$

Punto 3'

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_{2'} V_{3'}^{\gamma-1} \quad V_{3'}^{\gamma-1} = \frac{T_1 V_2^{\gamma-1}}{T_{2'}} = \frac{300 \cdot 9,84^{\frac{2}{5}}}{429} = 1,745 \Rightarrow V_{3'} = 1,745^{\frac{5}{2}} = 4,02 \text{ L}$$

$$P_{3'} \cdot V_{3'} = R T_{2'} \Rightarrow P_{3'} = \frac{R T_{2'}}{V_{3'}} = \frac{0,082 \cdot 429}{4,02} = 8,75 \text{ atm} \quad (8,75 \text{ atm}, 4,02 \text{ L}, 429 \text{ K})$$

Punto 4'

$$\text{Relación entre 3' y 4'} \quad P_{3'} V_{3'} = P_{4'} V_{4'} \Rightarrow 8,75 \cdot 4,02 = 35,18 = P_{4'} V_{4'}$$

$$\text{Relación entre 4' y 1} \quad P_{4'} V_{4'}^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow 1 \cdot 24,6^{\frac{7}{5}} = 88,57 = P_{4'} V_{4'}^\gamma$$

De las dos últimas ecuaciones

$$\frac{88,57}{35,18} = \frac{V_{4'}^\gamma}{V_{4'}} \Rightarrow 2,518 = V_{4'}^{\gamma-1} \Rightarrow 2,518 = V_{4'}^{\frac{2}{5}} \Rightarrow 2,518^{\frac{5}{2}} = V_{4'} \Rightarrow V_{4'} = 10,1 \text{ L}$$

$$P_{4'} = \frac{R T_{2'}}{V_{4'}} = \frac{0,082 \cdot 429}{10,1} = 3,48 \text{ atm} \quad (3,48 \text{ atm}, 10,1 \text{ L}, 429 \text{ K})$$

b) Calor tomado del foco caliente por el gas monoatómico

$$Q_m = R T_3 \ln \frac{V_4}{V_3} = 0,082 \cdot 476 \ln \frac{12,3}{4,92} = 35,8 \text{ J}$$

Calor tomado del foco caliente por el gas diatómico

$$Q_d = R T_2 \ln \frac{V_{4'}}{V_{3'}} = 0,082 \cdot 429 \ln \frac{10,1}{4,02} = 32,4 \text{ J c)}$$

$$W = W_{1-2} + W_{2-3} + W_{3-4} + W_{4-1} = -\int PdV + W_{2-3} - \int PdV + W_{4-1}$$

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} RT_1 \frac{dV}{V} + W_{2-3} - \int_{V_3}^{V_4} RT_2 \frac{dV}{V} + W_{4-1}$$

$$W = -RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V(T_2 - T_1) - RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} + C_V(T_1 - T_2)$$

$$W = -RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -RT_1 \ln \frac{r}{S} - RT_2 \ln \frac{S}{r}$$

En W se sustituye T_2 espejándolo de la ecuación $T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}$ y sustituyendo la relación de volúmenes del enunciado

$$W = -RT_1 \ln \frac{r}{S} - RT_1 \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} \ln \frac{S}{r} = -RT_1 \ln \frac{r}{S} - RT_1 r^{\gamma-1} \ln \frac{S}{r} \Rightarrow$$

$$W = -RT_1 \left(\ln \frac{r}{S} + r^{\gamma-1} \ln \frac{S}{r} \right) = -RT_1 \left(-\ln \frac{S}{r} + r^{\gamma-1} \ln \frac{S}{r} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = -RT_1 (r^{\gamma-1} - 1) \ln \frac{S}{r}$$

Trabajo realizado por el gas monoatómico $S=5$; $r=2$

$$W_m = -0,082 \cdot 300 \left(2^{\frac{5}{2}} - 1 \right) \ln \frac{5}{2} = -13,2 \text{ J}$$

Trabajo realizado por el gas diatómico ; $S = \frac{V_1}{V_3} = \frac{24,6}{4,02} = 6,119$; $r = \frac{V_2}{V_3} = \frac{9,84}{4,02} = 2,448$

$$W_d = -0,082 \cdot 300 \left(2,448^{\frac{5}{2}} - 1 \right) \ln \frac{6,119}{2,448} = -9,71 \text{ J}$$

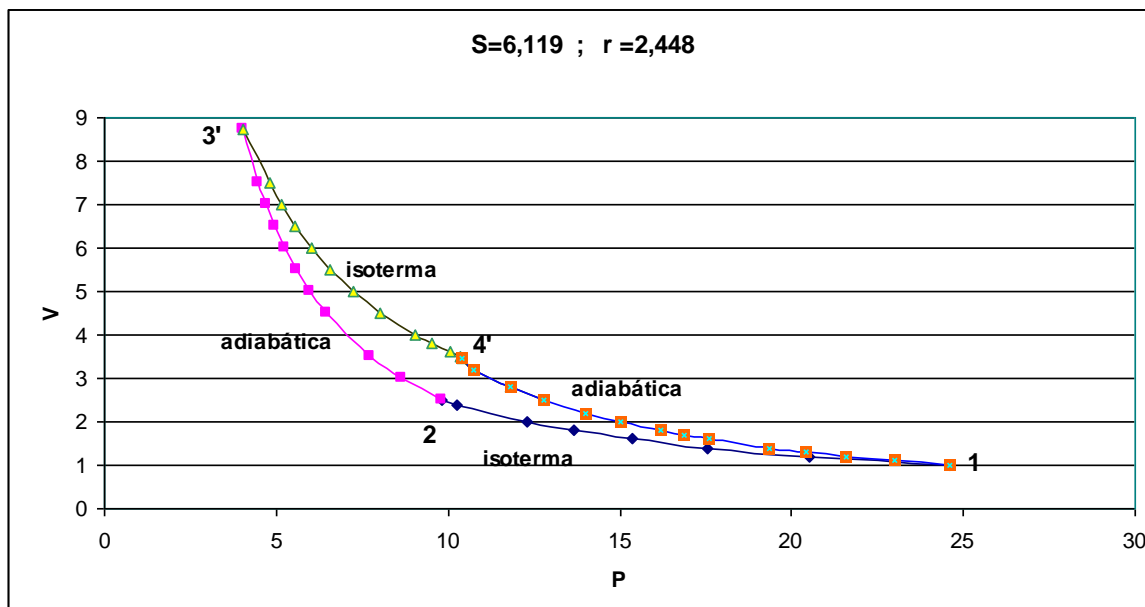
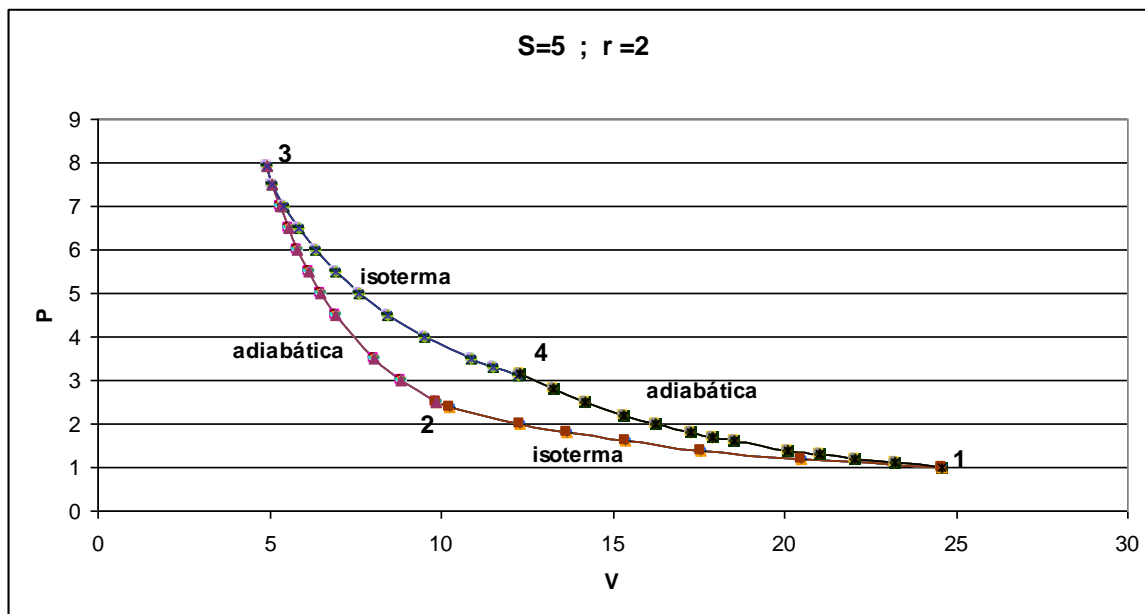
d) Rendimiento del gas monoatómico

$$\eta_m = \frac{|-13,2|}{35,8} = 0,37$$

Rendimiento del gas diatómico

$$\eta_d = \frac{|-9,71|}{32,4} = 0,30$$

e)



67. (644)-Una masa m de un líquido a una temperatura T_1 se mezcla con otra masa igual m del mismo líquido a la temperatura T_2 . El sistema está térmicamente aislado. Demuéstrese que la variación de entropía viene expresada por la fórmula

$$\Delta S = 2mC_p \ln \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

Propuesto en el libro Problemas de Física . Termología. E.Gullón M López

Suponemos que $T_1 > T_2$

El calor cedido por la masa m a T_1 es ganado por la masa m a T_2 , siendo T_e la temperatura de equilibrio

$$m C_p (T_1 - T_e) = m C_p (T_e - T_2) \Rightarrow T_1 - T_e = T_e - T_2 \Rightarrow T_e = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

La variación de entropía que sufre la masa m a temperatura T_1 al mezclarse es

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_e} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_e} \frac{m C_p dT}{T} = m C_p \ln \frac{T_e}{T_1}$$

La variación de entropía que sufre la masa m a temperatura T_2 al mezclarse es

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_e} \frac{dQ}{T} = \int_{T_2}^{T_e} \frac{m C_p dT}{T} = m C_p \ln \frac{T_e}{T_2}$$

La variación de entropía global

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m C_p \left(\ln \frac{T_e}{T_1} + \ln \frac{T_e}{T_2} \right) = m C_p \ln \frac{T_e^2}{T_1 T_2} = m C_p \ln \left(\frac{T_e}{\sqrt{T_1 T_2}} \right)^2$$

Teniendo en cuenta que $\ln x^n = n \ln x$

$$\Delta S = 2m C_p \ln \frac{T_e}{\sqrt{T_1 T_2}} = 2m C_p \ln \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

68.- (645)-Demuéstrese que para un gas del tipo Van der Waals el trabajo isotérmico reversible de expansión para un mol de gas viene dado por

$$\tau = RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} - a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

donde V_1 es el volumen inicial y V_2 el final

Propuesto en el libro Termodinámica para Químicos. S . Glasstone. Ed. Aguilar

El trabajo de expansión reversible de un gas está dado por la ecuación

$$\tau = - \int P dV$$

Según la ecuación de Van der Waals para 1 mol

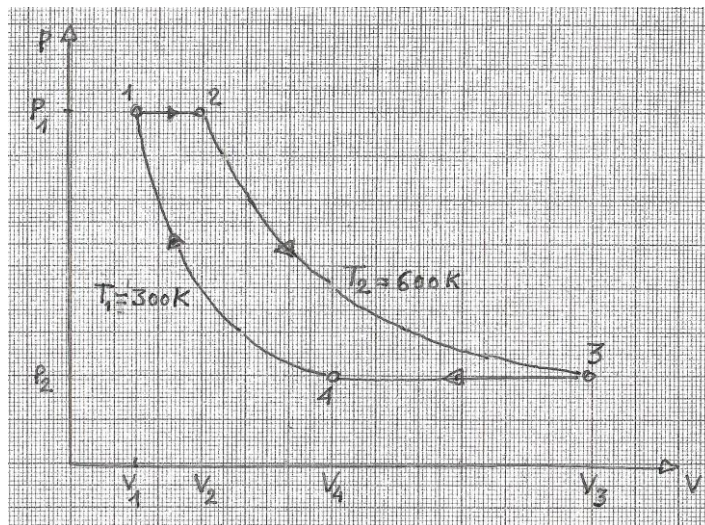
$$\left(P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT \Rightarrow P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}$$

Sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} \tau &= - \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \right) dV = - \left[RT \ln (V - b) \Big|_{V_1}^{V_2} + \left(\frac{a}{V} \right) \Big|_{V_1}^{V_2} \right] = - \left[RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \right] \Rightarrow \\ \tau &= - \left[RT \ln \frac{V_2 - b}{V_1 - b} - a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right) \right] \end{aligned}$$

El signo menos que aparece en la resolución significa que el trabajo es realizado por el gas, ya que el criterio de signos que utilizamos es que las magnitudes positivas las recibe el sistema desde el exterior y las negativas las realiza el sistema. El autor del libro utiliza otro criterio..El primer principio lo escribe el autor $\Delta U = Q - \tau$, nosotros $\Delta U = Q + \tau$

69.- (651.)- Un mol de gas ideal de capacidad calorífica $C_V = 5/2 R$ describe el ciclo de la figura inferior, formado por dos isotermas y dos isobaras, siendo $P_1 = 4 P_2$



Calcular el rendimiento del ciclo.

Vamos a establecer la relación de los volúmenes de los puntos 2, 3 y 4 respecto del volumen V_1 .

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = 2V_1 \quad ; \quad P_1 V_2 = P_2 V_3 \Rightarrow V_3 = V_2 \frac{P_1}{P_2} = 4V_2 = 8V_1$$

$$\frac{V_3}{T_2} = \frac{V_4}{T_1} \Rightarrow V_4 = V_3 \frac{T_1}{T_2} = 8V_1 \frac{T_1}{T_2} = 4V_1 \quad ;$$

Calculamos el trabajo y el calor en cada tramo

Tramo 1-2 (isobara)

$$\tau_{1-2} = - \int P dV = -P_1 \int_{V_1}^{V_2} dV = -P_1 (V_2 - V_1) = -P_1 V_1 = -RT_1 = -300R$$

El signo negativo nos indica que el trabajo lo realiza el sistema hacia el exterior

$$\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} + \tau_{1-2} = 0 \Rightarrow Q_{1-2} = C_V (T_2 - T_1) + RT_1 \Rightarrow \frac{5R}{2} (600 - 300) + 300R$$

$$Q_{1-2} = 1050R$$

El signo positivo de Q_{1-2} indica que es calor suministrado al sistema desde el exterior

Tramo 2-3 (isoterma)

$$\tau_{2-3} = -\int P dV = -\int_{V_2}^{V_3} \frac{R T_2}{V} dV = -R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = -R 600 \ln \frac{8V_1}{2V_1} = -600 R \ln 4$$

El signo negativo indica que el trabajo lo realiza el sistema hacia el exterior

$$\Delta U_{2-3} = 0 = Q_{2-3} + \tau_{2-3} \Rightarrow Q_{2-3} = +600 R \ln 4$$

El signo positivo del calor significa que lo recibe el sistema

Tramo 3-4(isobara)

$$\begin{aligned} \tau_{3-4} &= -\int P dV = -P_2 \int_{V_3}^{V_4} dV = -P_2 (V_4 - V_3) = -P_2 (4V_1 - 8V_1) = -\frac{P_1}{4} (-4V_1) = P_1 V_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tau_{3-4} = R T_1 = 300 R \end{aligned}$$

El signo positivo del trabajo τ_{3-4} indica que lo recibe el sistema desde el exterior

$$\begin{aligned} \Delta U_{3-4} = Q_{3-4} + \tau_{3-4} \Rightarrow Q_{3-4} &= C_v (T_1 - T_2) - R T_1 \Rightarrow \frac{5R}{2} (300 - 600) - 300 R \\ Q_{3-4} &= -750 R - 300 R = -1050 R \end{aligned}$$

El sistema cede calor al exterior

Tramo 4-1(isoterma)

$$\tau_{4-1} = -\int P dV = -\int_{V_4}^{V_1} \frac{R T_1}{V} dV = -R T_1 \ln \frac{V_1}{V_4} = R 300 \ln \frac{V_4}{V_1} = 300 R \ln 4$$

Trabajo recibido por el sistema

$$\Delta U_{4-1} = Q_{4-1} + \tau_{4-1} = 0 \Rightarrow Q_{4-1} = -300 R \ln 4$$

Calor emitido por el sistema

El rendimiento es el cociente entre el trabajo neto y el calor que recibe desde fuera del sistema

$$\eta = \frac{|-300 R - 600 R \ln 4 + 300 R + 300 R \ln 4|}{1050 R + 600 R \ln 4} = 0,22$$