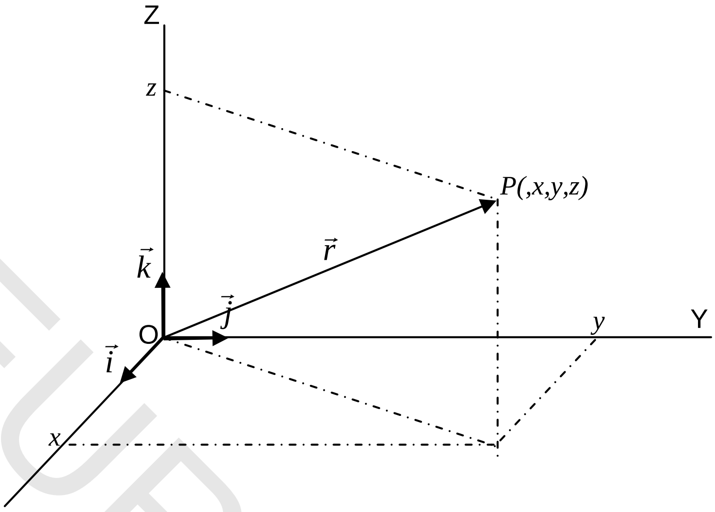
VECTORES EN DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS.
TRANSFORMACIONES ENTRE SISTEMAS

Sistema rectangular

Se explica respecto de tres ejes perpendiculares entre sí (X,Y,Z) que se cortan formando un triedro y sobre los que están definidos tres vectores unitarios principales $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$, que se toman de modo que el triedro resulte a derechas, lo que se deduce de la regla $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$. La posición de un punto P fig.1, viene determinada por tres coordenadas (x, y, z), es decir mediante tres distancias al punto O.

Fig.1

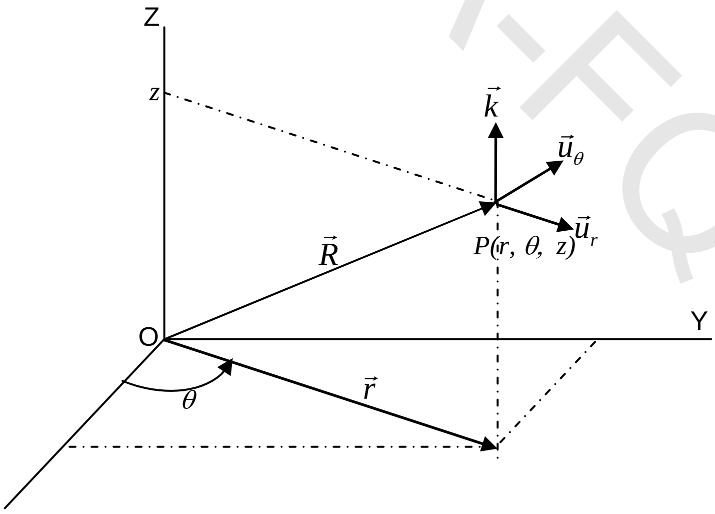


El vector de posición de un punto P viene determinado por $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

Sistema de coordenadas cilíndricas

La posición de un punto respecto del sistema de ejes viene determinada por dos distancias y un ángulo $(r,\ \theta,\ z)$ y los vectores unitarios son: $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{k}$, ver la fig.2

Fig.2



El vector unitario $\vec{k}$, se aplica en el punto P y es paralelo al eje Z.
El vector unitario $\vec{u}_r$ se aplica en P y es paralelo al vector $\vec{r}$ dibujado en el plano (X,Y), estando determinado por la proyección de P sobre el citado plano.

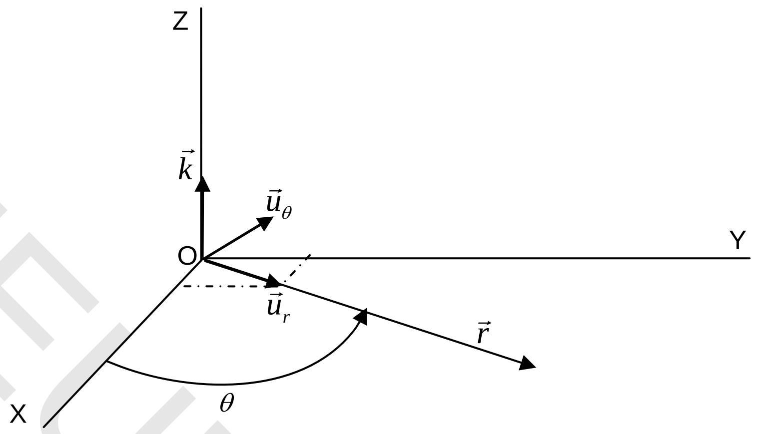
El vector unitario $\vec{u}_\theta$ se aplica en P y es perpendicular a los otros dos verificando $\vec{k} \wedge \vec{u}_r = \vec{u}_\theta$

El vector de posición de un punto P viene determinado por $\vec{R} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k}$ no quedando unívocamente determinado.

Relación de los sistemas de coordenadas cilíndricas y rectangulares

Se buscarán relaciones de $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$ con los unitarios $\vec{i}\,,j$ pues el unitario $\vec{k}$ coincide. Trasladando $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$ al plano (X, Y) fig.3, reulta:

Fig.3



Los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_\theta$ son unitarios: $\left|\vec{u}_r\right| = \left|\vec{u}_\theta\right| = 1$

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + sen\,\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + sen\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = -sen\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{k} = \vec{k}$$

Aplicación:

- Un punto tiene de coordenadas cartesianas $P(4, 3, 2)$ expresar su vector de posición en coordenadas cilíndricas.

$$\left|\vec{r}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,; \quad \vec{R} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{k} = 5\vec{u}_r + 2\vec{k}$$

- Expresar un vector $\vec{a} = -8\,\vec{i} + 10\,\vec{j} - 12\,\vec{k}$ en coordenadas cilíndricas, si su punto de aplicación está en $P(4, 3, 2)$

  De la fig.3 se deduce fácilmente que $\cos\theta = \frac{4}{5} = 0{,}8$; $\quad sen\,\theta = \frac{3}{5} = 0{,}6$

$$\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + sen\,\theta\,\vec{j} = 0{,}8\,\vec{i} + 0{,}6\,\vec{j}$$

$$\vec{u}_\theta = -sen\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = -0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}$$

  El vector de posición del punto de aplicación del vector $\vec{a}$ que está en P que ya se calculó en la aplicación anterior: $\vec{R} = 5\vec{u}_r + 2\vec{k}$

  Para expresar el vector $\vec{a}$ en coordenadas cilíndricas, hemos de calcular sus componentes en las direcciones de los vectores unitarios, $\vec{u}_r$; $\vec{u}_\theta$; $\vec{k}$; para lo cual vamos a calcular los productos escalares del vector $\vec{a}$ por cada uno de estos unitarios, porque el producto escalar de un vector por otro unitario, proporciona la proyección del vector sobre la dirección del unitario.

$$\vec{a}\cdot\vec{u}_r = \left(-8\vec{i}+10\vec{j}-12\vec{k}\right)\cdot\left(0,8\vec{i}+0,6\vec{j}\right) = -6,4+6 = -0,4$$
$$\vec{a}\cdot\vec{u}_\theta = \left(-8\vec{i}+10\vec{j}-12\vec{k}\right)\cdot\left(-0,6\vec{i}+0,8\vec{j}\right) = 4,8+8 = 12,8$$
$$\vec{a}\cdot\vec{k} = \left(-8\vec{i}+10\vec{j}-12\vec{k}\right)\cdot\vec{k} = 4,8+8 = -12$$

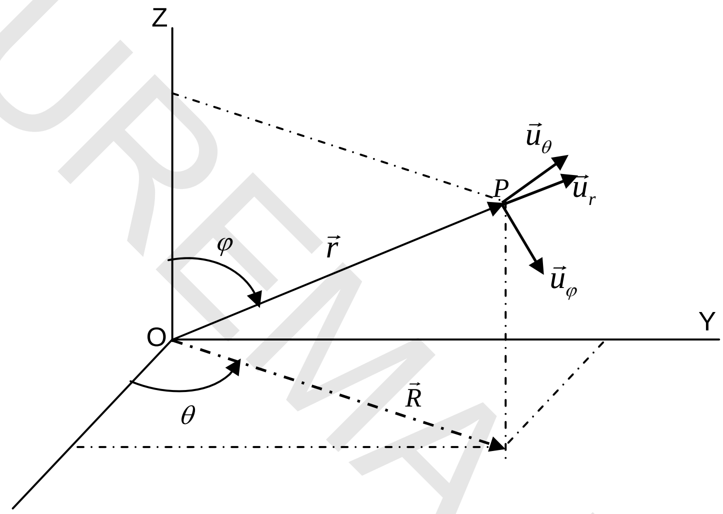
$$\vec{a} = -0,4\vec{u}_r + 12,8\,\vec{u}_\theta - 12\,\vec{k}$$

Compruebe que el módulo del vector es el mismo con independencia del sistema de coordenadas en el que se exprese, $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{308}$

Sistema de coordenadas esféricas

La posición de un punto P respecto del sistema de ejes, viene determinada por una distancia y dos ángulos $(r,\ \theta,\ \varphi)$ y los vectores unitarios son: $\vec{u}_r$; $\vec{u}_\theta$; $\vec{u}_\varphi$, ver la fig.4.

Fig.4



El vector unitario $\vec{u}_r$ está en la dirección $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$

El vector unitario $\vec{u}_\varphi$ es perpendicular a $\vec{u}_r$ y su sentido es aquel en el que φ crece.

El vector unitario $\vec{u}_\theta$ es perpendicular a los dos anteriores verificando $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\theta$

Un punto cualquiera como P, tiene un vector de posición que se encuentra en la dirección OP. En coordenadas esféricas se expresa:

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

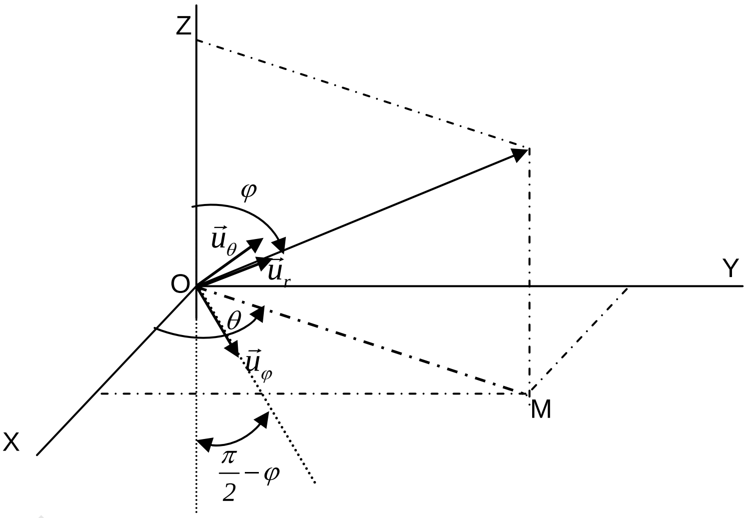
Indica únicamente que P está a una distancia r del origen, pero no determina unívocamente su posición.

Relación de los sistemas de coordenadas esféricas y rectangulares

Se buscarán relaciones entre los vectores unitarios: $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$ y los $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

Trasladamos los vectores unitarios al origen para mayor facilidad.

Fig.5



El vector $\vec{u}_r$ debe proyectarse previamente sobre el plano (X, Y), dirección OM, antes de hacerlo sobre los ejes X e Y, esta proyección vale $|\vec{u}_r|\,sen\,\varphi = 1\,sen\,\varphi = sen\,\varphi$. Para proyectar $\vec{u}_\varphi$ observamos que forma con el Z un ángulo $\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ pero también debe ser proyectado antes sobre el plano (X, Y) y después sobre los ejes. Para proyectar $\vec{u}_\theta$ observemos que forma con el eje X, un ángulo $\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$.

$$\vec{u}_r = sen\,\varphi \cdot cos\,\theta\,\vec{i} + sen\,\varphi \cdot sen\,\theta\,\vec{j} + cos\,\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\varphi = sen\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)cos\,\theta\,\vec{i} + sen\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)sen\,\theta\,\vec{j} - cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\vec{k} = cos\,\varphi \cdot cos\,\theta\,\vec{i} + cos\,\varphi \cdot sen\,\theta\,\vec{j} - sen\,\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{u}_\theta = cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\vec{i} + sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\vec{j} + 0\cdot\vec{k} = -sen\,\theta\,\vec{i} + cos\,\theta\,\vec{j}$$

Aplicación

- Un punto tiene de coordenadas cartesianas *P(4, 3, 2)* expresar su vector de posición en coordenadas esféricas.

$$|\vec{r}| = \sqrt{4^2+3^2+2^2} = \sqrt{29}\ ; \qquad \vec{r} = r\,\vec{u}_r = \sqrt{29}\,\vec{u}_r$$

Vamos ahora a obtener los vectores unitarios $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$ en función de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Es necesario observar en la fig.4, el vector designado por $\vec{R}$.

$$|\vec{R}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \qquad cos\,\theta = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad sen\,\theta = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad cos\,\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}} \qquad sen\,\varphi = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{u}_r = \frac{5}{\sqrt{29}}\cdot 0{,}8\,\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{29}}\cdot 0{,}6\,\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{29}}\left(4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}\right)$$

$$\vec{u}_\varphi = \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot 0{,}8\,\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{29}}\cdot 0{,}6\,\vec{j} - \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{k} = \frac{1{,}6}{\sqrt{29}}\vec{i} + \frac{1{,}2}{\sqrt{29}}\cdot\vec{j} - \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{29}}\left(1{,}6\,\vec{i}+1{,}2\,\vec{j}-5\vec{k}\right)$$

$\vec{u}_\theta == -0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}$

- Expresar un vector $\vec{a} = -8\,\vec{i} + 10\,\vec{j} - 12\,\vec{k}$ en coordenadas esféricas, si su punto de aplicación está en *P(4, 3, 2)*.

  Calcularemos las componentes del vector $\vec{a}$ en las direcciones de los vectores unitarios $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$ multiplicando escalarmente el vector $\vec{a}$, por cada uno de estos unitarios.

$$\vec{a}\cdot\vec{u}_r = \left(-8\vec{i} + 10\vec{j} - 12\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{29}}\left(4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{29}}\left(-32 + 30 - 24\right) = \frac{-26}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{u}_\varphi = \left(-8\,\vec{i} + 10\,\vec{j} - 12\,\vec{k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}\left(1{,}6\,\vec{i} + 1{,}2\,\vec{j} - 5\vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{29}}\left(-12{,}8 + 12 + 60\right) = \frac{59{,}2}{\sqrt{29}}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{u}_\theta = \left(-8\,\vec{i} + 10\,\vec{j} - 12\,\vec{k}\right)\cdot\left(-0{,}6\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}\right) = 4{,}8 + 8 = 12{,}8$$

$$\vec{a} = \frac{-26}{\sqrt{29}}\vec{u}_r + \frac{59{,}2}{\sqrt{29}}\vec{u}_\varphi + 12{,}8\,\vec{u}_\theta$$

EXPRESIÓN DE UN VECTOR ELEMENTAL $d\vec{l}$ EN DISITNTOS SISTEMAS DE REFERENCIA

La utilidad que proporciona en Física el vector $d\vec{l}$ es muy grande, pues permite calcular magnitudes como el trabajo, el potencial, etc. y en general interviene en todos aquellos casos en los que hay que resolver una integral de línea.

Sistema rectangular

Si un vector $d\vec{l}$ tiene su origen en el punto de coordenadas (x, y, z) y el extremo en el punto (x+dx, y+dy, z+dz), entonces se observa en la fig. 6 que el vector se expresa:

$$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

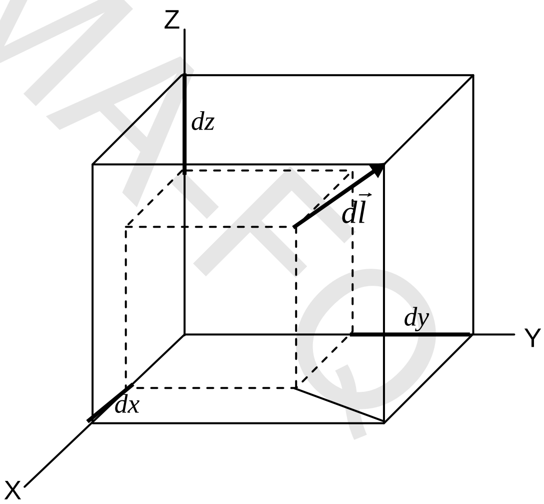
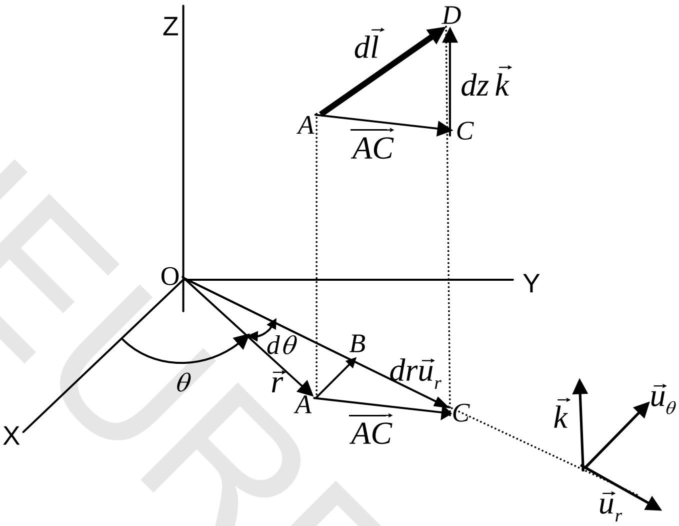


Fig. 6

Sistema de coordenadas cilíndricas

Si un vector tiene su origen en un punto A de coordenadas cilíndricas $(r,\ \theta, z)$ y su extremos en un punto próximo D, de coordenadas $(r+dr\ ,\ \theta+d\theta,\ z+dz)$ vamos a calcular la expresión de un vector elemental $d\vec{l}$ en el sistema de coordenadas cuyos vectores unitarios principales son $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{k}$. El vector elemental $d\vec{l}$ se descompone en un vector $\overrightarrow{AC}$ en el plano (X, Y), que es su proyección sobre el plano y en otro vector según Z, designado como $dz\,\vec{k}$, fig.7.

Fig.7



Observamos en la fig.7, que el vector $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ y que el vector $\overrightarrow{BC} = dr\vec{u}$, además, del triángulo ABC se deduce que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = r \cdot d\theta\,\vec{u}_\theta + dr\,\vec{u}_r$. En consecuencia el vector $d\vec{l}$ puede expresarse como suma de los vectores $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ del siguiente modo:

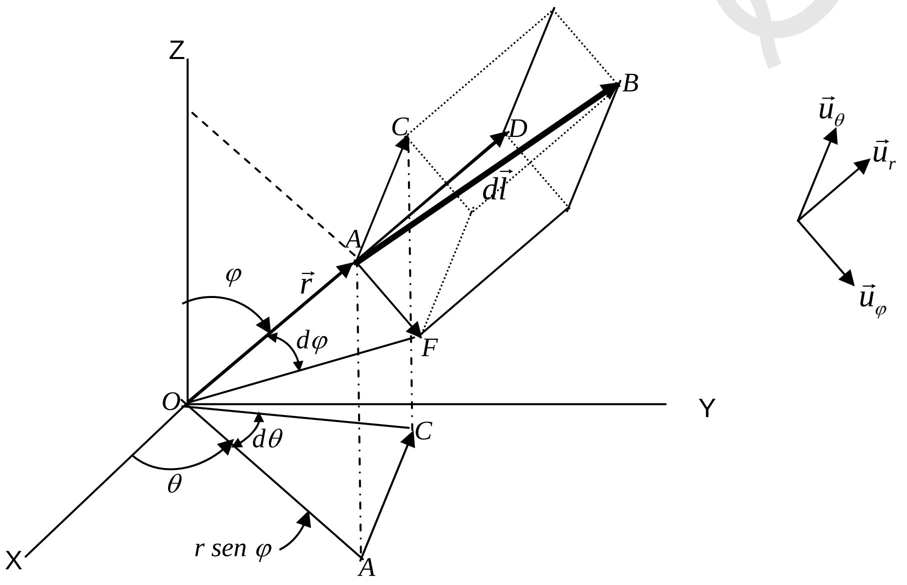
$$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{k}$$

Que constituye la expresión de un vector elemental en coordenadas cilíndricas.

Sistema de coordenadas esféricas

Sea un vector expresado en coordenadas esféricas, cuyo origen está en el punto $A\ (r,\ \theta,\ \varphi)$ y extremo en un punto $B(r+dr,\ \theta+d\theta,\ \varphi+d\varphi)$. Queremos expresar un vector $d\vec{l}$ en función de los vectores unitarios $\vec{u}_r$,$\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$

Fig. 8



En fig.8 se puede observar como el vector $d\vec{l} = \overrightarrow{AB}$ se descompone en la suma de tres vectores ortogonales $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, cuyos módulos son respectivamente:

$$\left|\overrightarrow{AF}\right| = r \cdot d\varphi \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right| = dr \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = r \cdot sen\,\varphi \cdot d\theta$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF}$$

Teniendo en cuenta las direcciones de los vectores unitarios resulta:

$$d\vec{l} = dr\,\vec{u}_r + r\,sen\,\varphi\,d\theta\,\vec{u}_\theta + rd\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

Que constituye la expresión de un vector elemental en coordenadas esféricas.

APLICACIÓN

- **Expresión del gradiente en coordenadas rectangulares**

  La diferencial total de una función escalar V en coordenadas rectangulares es.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

  Pero en función del gradiente: $dV = \overrightarrow{grad}\,V \cdot d\vec{l}$

  Sustituyendo dV y $d\vec{l}$ en coordenadas rectangulares resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{grad}\,V \cdot \left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right)$$

  Identificando los dos miembros y puesto que hay un producto escalar de vectores:

$$\overrightarrow{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

  De la ecuación anterior se deduce que el operador nabla en coordenadas rectangulares es:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- **Expresión del gradiente en coordenadas cilíndricas**

  La diferencial total de una función escalar V en coordenadas cilíndricas es.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Pero en función del gradiente: $dV = \overrightarrow{grad}\,V \cdot d\vec{l}$

Sustituyendo dV y $d\vec{l}$ en coordenadas cilíndricas resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial z}dz = \overrightarrow{grad}\,V \cdot \left(dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{k} \right)$$

Identificando los dos miembros y puesto que hay un producto escalar de vectores:

$$\overrightarrow{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

De la ecuación anterior se deduce que el operador nabla en cilíndricas es:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

- **Expresión del gradiente en coordenadas esféricas**

La diferencial total de una función escalar V en coordenadas esféricas es.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}d\varphi$$

Pero en función del gradiente: $dV = \overrightarrow{grad}\,V \cdot d\vec{l}$

Sustituyendo dV y $d\vec{l}$ en coordenadas esféricas resulta:

$$\frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial \varphi}d\varphi = \overrightarrow{grad}\,V \cdot \left(dr\,\vec{u}_r + r\,sen\,\varphi\,d\theta\,\vec{u}_\theta + rd\varphi\,\vec{u}_\varphi \right)$$

Identificando los dos miembros y puesto que hay un producto escalar de vectores:

$$\overrightarrow{grad}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r\,sen\,\varphi}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

De la ecuación anterior se deduce que el operador nabla en esféricas es:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r\,sen\,\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$