PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Madrid 2009

XL.- OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. MEXICO. 2009

PROBLEMA 1

EVOLUCIÓN DEL SISTEMA TIERRA-LUNA

Los científicos pueden determinar la distancia entre la Tierra y la Luna con gran precisión. Esto se hace enviando un haz de luz láser hacia unos espejos depositados en la superficie de la Luna por unos astronautas en 1969. Para ello se mide el tiempo del recorrido de la luz.

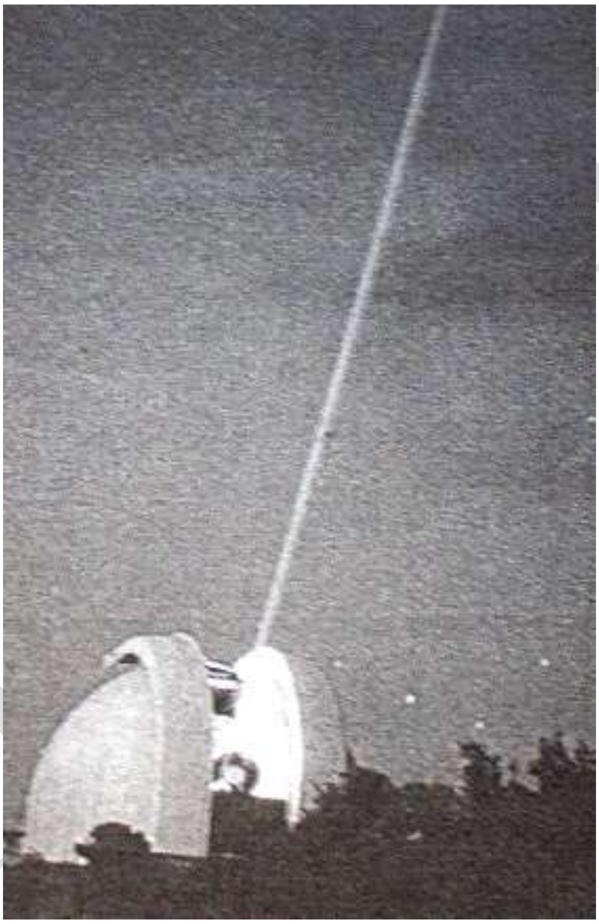


Fig.1.- **Un haz de láser enviado desde un laboratorio se utiliza para medir con exactitud la distancia entre la Tierra y la Luna.**

A partir de estas observaciones han determinado que la Luna se aleja lentamente de la Tierra. Esto es, que la distancia Tierra-Luna aumenta con el paso del tiempo. La causa se debe a que los momentos de las mareas en la Tierra transfieren momento angular a la Luna (ver figura 2).
En este problema obtendrá los parámetros básicos del fenómeno.

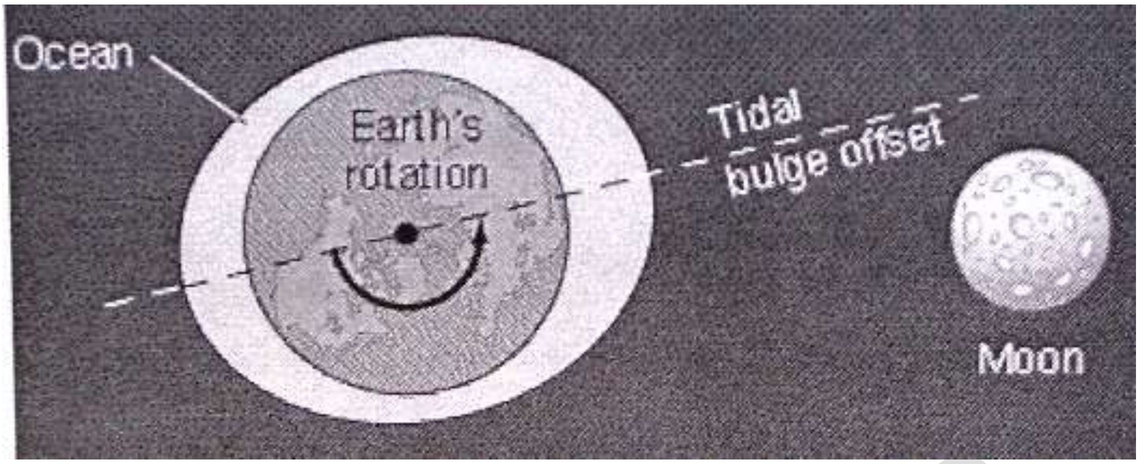


Fig.2

La gravedad lunar produce "abultamientos" en la Tierra. A causa de la rotación de la Tierra la línea que une los abultamientos no esta alineada con la línea que une la Tierra con la Luna. Este hecho produce un momento que transfiere momento angular desde la rotación terrestre a la traslación lunar.

1.-Conservación del momento angular

Se designa con L_1 el momento angular del sistema Tierra-Luna. Se hacen las siguientes suposiciones:

- ***i)*** ***L_1 es la suma de la rotación de la Tierra alrededor de su eje y la traslación de la Luna alrededor de la Tierra.***
- ***ii)*** ***La órbita de la Luna es circular y puede considerarse como una masa puntual***
- ***iii)*** ***Los ejes de rotación de la Tierra y de revolución de la Luna son paralelos.***
- ***iv)*** ***Con la finalidad de simplificar los cálculos los movimientos se realizan respecto del centro de la Tierra y no del centro de masas. Además los momentos de inercia, los momentos de las fuerzas y los momentos angulares están definidos alrededor del eje terrestre.***
- ***v)*** ***Se desprecia la influencia del Sol.***

1a) Escribir la ecuación del momento angular actual del sistema Tierra-Luna con la siguiente notación: I_E momento de inercia de la Tierra, ω_{E1} frecuencia angular de rotación actual de la Tierra, I_{M1} momento de inercia actual de la Luna respecto del eje de la Tierra, ω_{M1} frecuencia angular actual de la Luna en su orbita.

El proceso de transferencia angular finalizará cuando el periodo de rotación de la Tierra y el periodo de revolución de la Luna alrededor de la Tierra tengan la misma duración. Al llegar este momento los abultamientos producidos por la Luna sobre la Tierra estarán alineados con el eje que une la Tierra y la Luna y el momento desaparecerá.

1b) Sea L_2 el momento angular final del sistema Tierra-Luna. Con las mismas suposiciones anteriores escribir la ecuación de L_2 con la notación: I_E momento de inercia de la Tierra , ω_2 frecuencia angular de la Tierra y de revolución de la Luna, I_{M2} momento de inercia final de la Luna

1c) Despreciando la contribución de la rotación de la Tierra al momento angular final, escribir la ecuación que exprese la conservación angular en este problema.

2.-Separación final y frecuencia angular final del sistema Tierra-Luna

Suponga que la ecuación gravitacional para una órbita circular (la de la Luna alrededor de la Tierra) es siempre válida. Desprecie la contribución de la rotación de la Tierra al momento angular final.

2a) Escriba la ecuación gravitacional para la órbita de la Luna alrededor de la Tierra en el estado final en función de M_E , ω_2 , D_2 distancia final Tierra-Luna y la constante de gravitación universal G.

2b) Escriba la ecuación de la separación final D_2 entre la Tierra y la Luna en función de L_1 , M_E , M_M y la constante de gravitación universal G.

2c) Escriba la ecuación para la frecuencia angular final ω_2 en función de L_1 , M_E , M_M y G.

Después deberá calcular los valores numéricos de D_2 y ω_2, pero antes debe deducir el momento de inercia de la Tierra.

2d) Escriba la ecuación del momento de inercia de la Tierra I_E, suponiendo que es una esfera con densidad interior ρ_i desde el centro hasta un radio ρ_i y una capa exterior de densidad ρ_o desde el radio r_i hasta la superficie de radio r_o (ver figura 3)

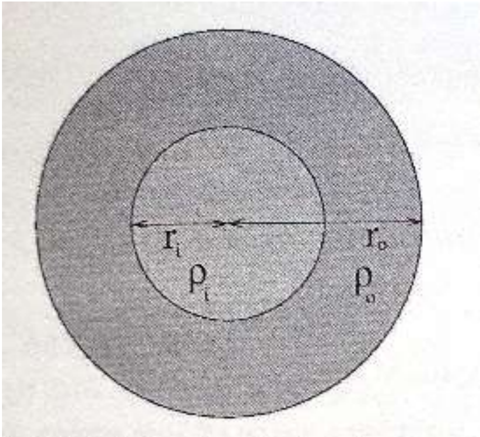


Fig.3

Determinar los valores numéricos requeridos expresados con dos cigfras significativas

2e) Evaluar el momento de inercia de la Tierra, siendo:

$$\rho_i = 1{,}3.10^4\, kg \cdot m^{-3};\; r_i = 3{,}5.10^6\, m;\; \rho_o = 4{,}0.10^3\, kg \cdot m^{-3}\; y\; r_o = 6{,}4.10^6\, m$$

Las masas de la Tierra y de la Luna son M_E= $6{,}0.10^{24}$ kg y M_M= $7{,}3.10^{22}$ kg, respectivamente. La separación actual entre la Tierra y la Luna D_1=$3{,}8.10^8$ m. La frecuencia angular de rotación actual de la Tierra ω_{E1}=$7{,}3.10^{-5}$ s^{-1}. La frecuencia angular actual de la rotación de la Luna alrededor de la Tierra ω_{M1}=$2{,}7.10^{-6}$ s^{-1} y la constante de Gravitación universal G=$6{,}7.10^{-11}$ $m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$.

2f) Evaluar el momento angular total del sistema L_1.

Ecuación (1)

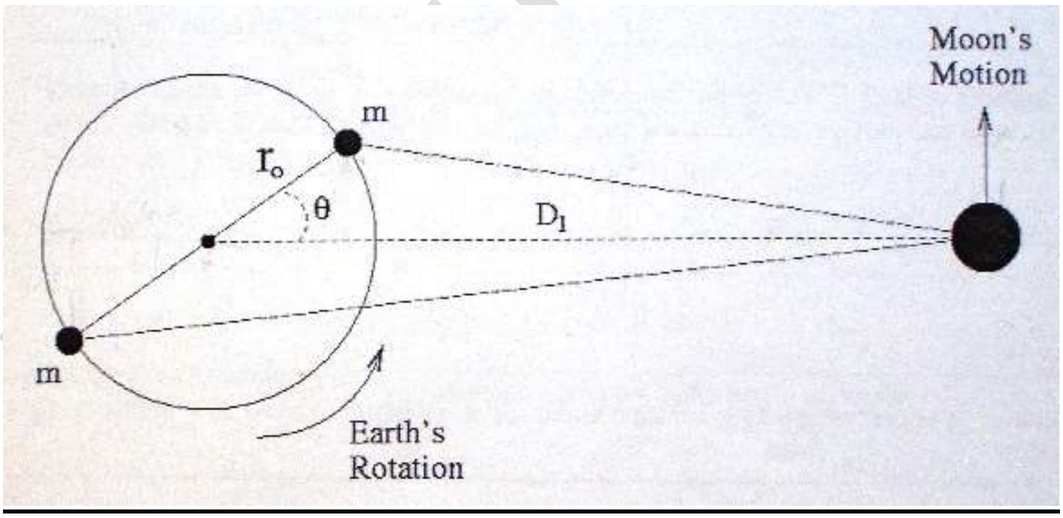
2g) Encontrar la separación final D_2 en metros y en unidades de la separación actual D_1.

2h) Encontrar la frecuencia angular final ω_2 y la duración del día final en unidades del día actual

Verificar que la suposición de no considerar la contribución de la Tierra al momento angular final está justificada obteniendo que la relación entre el momento angular final de la Tierra al de la Luna es una cantidad pequeña.

3.-¿Cuánto se separa la Luna cada año?

Ahora debe encontrar cuánto se separa la Luna de la Tierra cada año. Para ello necesitar conocer el momento que actúa ahora sobre la Luna. Se supone que los abultamientos se pueden aproximar por dos masas puntuales , cada una de valor m, localizadas en la superficie de la Tierra(ver figura 4). Sea θ el ángulo entre la línea que une los abultamientos y la que une el centro de la Tierra con el centro de la Luna.



Esquema válido para calcular el momento producido sobre la Luna por las masas m situadas sobre la Tierra. El dibujo no está hecho a escala.

Fig.4

3a) Encontrar F_c, el módulo de la fuerza producido sobre la Luna por la masa puntual más cercana.

3b) Encontrar F_f, el módulo de la fuerza producido sobre la Luna por la masa puntual más lejana.

(9)

Ahora puede evaluar los momentos producidos por las masas puntuales.

3c) Encontrar el módulo de τ_C, que es el momento producido por la masa más cercana.

3d) Encontrar el módulo de τ_f, que es el momento producido por la masa más lejana.

3e) Encontrar el módulo del momento total τ, producido por las dos masas. Puesto que $r_o \ll D_1$ debe aproximar su expresión y además utilizar la relación $(1+x)^a \approx 1+ax$, si $x \ll 1$.

3f) Calcule el valor numérico del momento total τ, tomando $\theta = 3^o$ y $m = 3{,}6.10^{16}$ kg (observe que esta masa es del orden 10^{-8} de la masa de la Tierra)

3g) Puesto que el momento está relacionado con el momento angular, calcular el aumento de la distancia Tierra-Luna a lo largo de un año. Expresar el momento angular de la Luna en función de M_M, M_E, D_1, y G.

Finalmente determinar el aumento que experimenta un día cuando transcurre un año.

3h) Encontrar la disminución de ω_{E1} por año y el alargamiento de un día actual cuando transcurre un año.

¿Dónde va la energía?

En contraste con el momento angular que se conserva, la energía total del sistema (rotacional más gravitacional) no lo hace.

4a) Escribir la ecuación de la energía total E en función de I_E, $\omega E1$, M_M, M_E, D_1 y G.

4b) Escribir la ecuación para el cambio de E en función de los cambios en D_1 y ω_{E1}. Calcular el valor numérico del cambio de E, ΔE, a lo largo de un año, utilizando los valores de los cambios de D_1 y ω_{E1} obtenidos en los apartados 3g y 3h.

Comprobar que esta pérdida de energía está de acuerdo con una estimación de la energía, en forma de calor, en las mareas producidas por la Luna sobre la Tierra. Se supone que la elevación promedio de las mareas es de 0,5 m sobre una capa de agua de profundidad h=0,5 m que cubre de forma uniforme toda la superficie de la Tierra (esto es una simplificación del problema). Las mareas ocurren dos veces cada día. Además se supone que el 10% de la energía gravitacional se disipa en forma de calor cuando el nivel de la marea desciende.
Densidad del agua $\rho = 10^3$ kg m^{-3} g = 9,8 m s^{-2}.

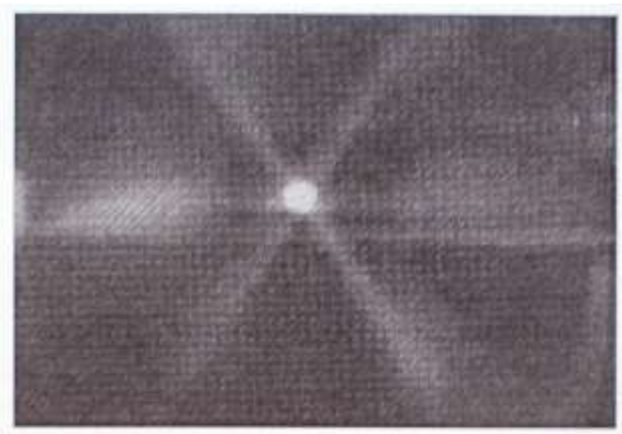
4c) ¿Cuál es la masa de la capa de agua?

4d) Calcula la energía disipada en un año. Compare el valor encontrado con la energía perdida por año por el sistema actual Tierra-Luna.

PROBLEMA 2

ENFRIAMIENTO CON LÁSER Y MELAZA ÓPTICA

El objetivo de este problema es desarrollar un teoría sencilla para entender el denominado "enfriamiento láser" y "melaza óptica". El tema es el enfriamiento de un haz de átomos neutros, en general alcalinos, por haces de láser con la misma frecuencia. Esto forma parte del premio Nobel de Física otorgado a S. Chu, P. Phillips y C. Cohen-Tannoudji en 1997.



La imagen superior muestra un átomo de sodio (la mancha brillante del centro) atrapada en la intersección de tres pares de láseres ortogonales opuestos. La región de confinamiento se denomina "melaza óptica" a causa de que la fuerza óptica disipativa se parece al rozamiento viscoso de un cuerpo que se mueva a través de una melaza.
En este problema analizará los fundamentos del fenómeno de la interacción entre un fotón incidente sobre un átomo y las bases del mecanismo disipativo en una dimensión.

<u>Parte I.-Fundamento básico del enfriamiento por láser</u>

Considerar un átomo de masa m desplazándose por el eje x positivo con una velocidad v. Por sencillez, solamente consideramos el problema en una dimensión, ignoramos las direcciones y , z (ver figura 1). El átomo posee dos niveles de energía, el estado más bajo se considera con valor cero y el estado excitado con energía $\hbar\omega_0$***, siendo*** $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$***. El átomo se encuentra inicialmente en su estado más bajo de energía.***
Un haz de láser con frecuencia ω_L ***en el laboratorio moviéndose en dirección –x incide sobre un átomo. El láser se compone de un gran número de fotones de energía*** $\hbar\omega_L$ ***y momento*** $-\hbar q$***. Un átomo absorbe***

un fotón y después lo emite de forma espontánea; esta emisión ocurre con la misma probabilidad en el sentido +x que –x.
Dado que el átomo se desplaza con velocidad no relativista v/c<<1, emplear solamente los términos de grado 1 para esta cantidad. Considerar también que $\frac{\hbar q}{mv} << 1$, esto significa que el momento del átomo es mucho mayor que el momento de un único fotón.

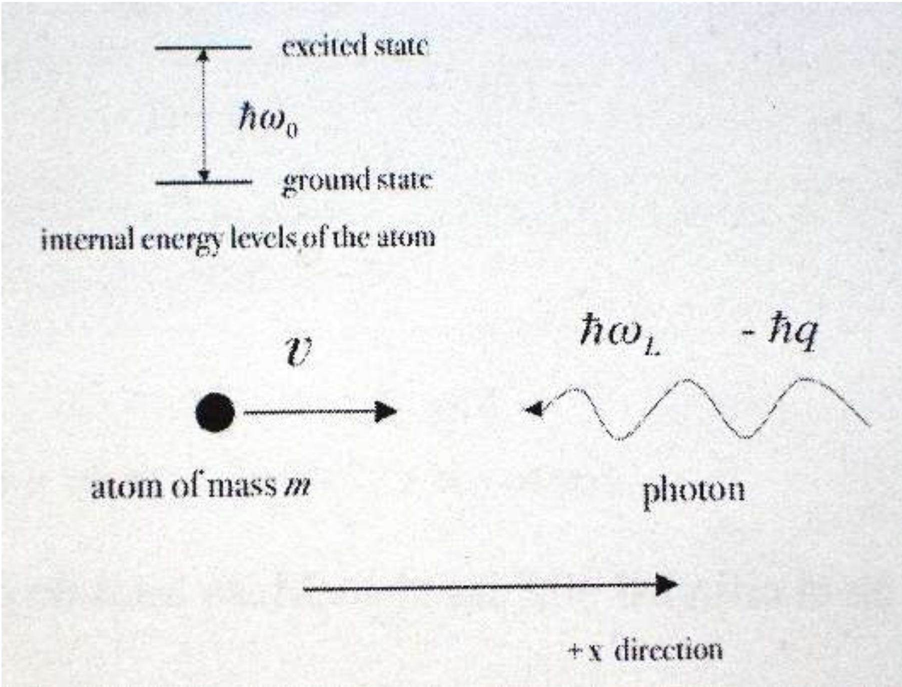


Fig.1.- **Esquema de un átomo de masa m con velocidad v en sentido +x colisionando con un fotón de energía $\hbar\omega_L$ y momento $-\hbar q$. El átomo posee dos niveles de energía con una diferencia entre ellos de $\hbar\omega_o$.**

Suponer que la frecuencia del láser ω_L es sintonizada de modo que vista desde el átomo en movimiento esté en resonancia con la transición interna del átomo.

1.-Absorción

1a) Escribir la condición de resonancia para la absorción del fotón.

1b) Escribir el momento p_{at} del átomo después de la absorción visto desde el laboratorio.

1c) Escribir la energía total del átomo ε_{at} después de la absorción visto desde el laboratorio.

2.-Emisión espontánea de un fotón en el sentido –x

Un tiempo después de la absorción del fotón incidente, el átomo puede emitir un fotón en la dirección x y sentido –x.

2a) Escribir la energía del fotón emitido ε_{ft} después del proceso de emisión en el sentido –x, visto desde el laboratorio.

2b) Escribir el momento del fotón emitido p_{ft} después del proceso de emisión en el sentido –x, visto desde el laboratorio.

2c) Escribir el momento del átomo p_{at} después del proceso de emisión en el sentido –x, visto desde el laboratorio.

2d) Escribir la energía del átomo ε_{at} después del proceso de emisión en el sentido –x, visto desde el laboratorio.

3.-Emisión espontánea de un fotón en el sentido +x

Un tiempo después de la absorción del fotón incidente, el átomo puede emitir un fotón en la dirección x y sentido +x.

3a) Escribir la energía del fotón emitido ε_{ft} después del proceso de emisión en el sentido +x, visto desde el laboratorio.

3b) Escribir el momento del fotón emitido p_{ft} después del proceso de emisión en el sentido +x, visto desde el laboratorio.

3c) Escribir el momento del átomo p_{at} después del proceso de emisión en el sentido +x, visto desde el laboratorio.

3d) Escribir la energía del átomo ε_{at} después del proceso de emisión en el sentido +x, visto desde el laboratorio.

4.-Emisión promedio después de la absorción

La emisión espontánea de un fotón en los sentidos –x y +x ocurren con la misma probabilidad

4a) Escribir la energía promedio de un fotón emitido después del proceso de emisión.

4b) Escribir el momento promedio de un fotón emitido después del proceso de emisión.

4c) Escribir la energía promedio del átomo después del proceso de emisión.

4d) Escribir el momento promedio del átomo después del proceso de emisión.

5.-Transferencia de energía y momento.

Suponiendo solamente un proceso completo de absorción –emisión, tal como se ha descrito, existe un momento promedio neto y una energía transferida entre la radiación láser y el átomo.

5a) Escribir el cambio promedio de energía $\Delta\varepsilon$ del átomo después de un proceso completo de absorción-emisión de un fotón.

5b) Escribir el cambio promedio del momento Δp del átomo después de un proceso completo de emisión-absorción de un fotón.

6.-Energía y momento transferido por un haz de láser que se desplaza en la dirección x y sentido +x.

Considerar ahora que un haz de láser de frecuencia ω'_L incide sobre un átomo a lo largo del sentido +x, mientras que el átomo se desplaza en el sentido +x con una velocidad v. Suponiendo la condición de resonancia entre la transición interna del átomo y el haz de láser visto desde el átomo.

6a) Escribir el cambio promedio de energía $\Delta\varepsilon$ del átomo después de un proceso completo de absorción-emisión de un fotón.
6b) Escribir el cambio promedio del momento Δp del átomo después de un proceso completo de emisión-absorción de un fotón.

Parte II.-Disipación y los fundamentos de la melaza óptica

La Naturaleza impone una inherente incertidumbre a los procesos cuánticos. Así el hecho de que el átomo pueda emitir un fotón de forma espontánea un tiempo finito <u>después</u> de la absorción, conlleva que la condición de resonancia no se verifique exactamente como se ha hecho en los apartados anteriores. Esto significa que la frecuencia de los haces de láser ω_L y ω'_L puedan tener cualquier valor y aún así el proceso de absorción-emisión puede verificarse. Esto sucede con diferentes probabilidades y tal como se esperaba, la máxima probabilidad sucede cuando se verifica la condición de resonancia. El tiempo promedio entre un único proceso de absorción y consiguiente emisión se denomina vida media del estado excitado y se designa por Γ^{-1}.
Considerar un colectivo de átomos en reposo en el sistema de referencia del laboratorio y un haz de láser de frecuencia ω_L que incide sobre ellos. Los átomos absorben y emiten fotones de forma continua, pero existe un promedio N_{exc} de átomos en estado excitado (y por consiguiente N-N_{exc}, de átomos en el estado fundamental). Los cálculos de la mecánica cuántica llegan al siguiente resultado

$$N_{exc} = N \frac{\Omega_R^2}{(\omega_o - \omega_L) + \frac{\Gamma^2}{4} + 2\,\Omega_R^2}$$

Donde ω_0 es la frecuencia de resonancia de la transición entre los dos niveles de los átomos, Ω_R es la llamada frecuencia de Rabi; Ω_R^2 es proporcional a la intensidad del haz de láser. Tal como se ha indicado anteriormente el número de átomos excitados es distinto de cero aun cuando ω_0 sea diferente de ω_L.Un camino para expresar el número de procesos de absorción-emisión por unidad de tiempo es $N_{exc}\Gamma$.
Considerar la situación de la figura 2 en la cual dos haces de láser, en contrapropagación con la misma pero con cualquier frecuencia ω_L, inciden sobre un gas de N átomos los cuales se desplazan con velocidad v en la dirección x y sentido +x.

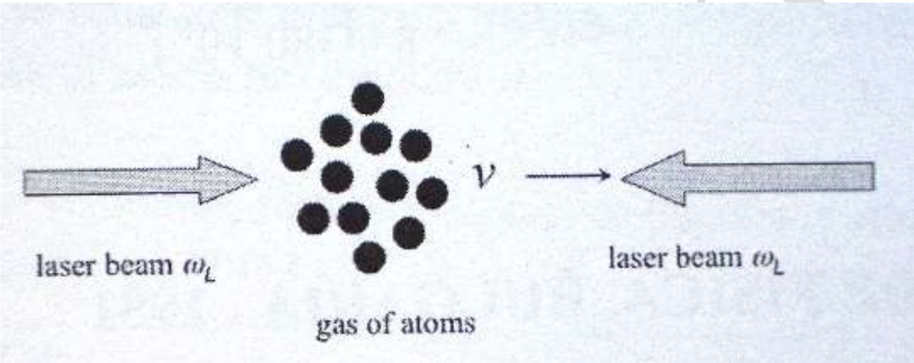


Fig.2.- **Dos haces de láser con la misma pero con cualquiera frecuencia ω_L inciden sobre un gas de N átomos que se mueven en sentido +x con una velocidad v.**

7.- Fuerza sobre los átomos por los láseres

7a) Con la información dada encontrar la fuerza con que los láseres ejercen sobre el conjunto de los átomos.

7.- Límite a baja velocidad

Suponer ahora una velocidad suficientemente pequeña con el fin de obtener la fuerza en función de la primera potencia de v.

8a) Encontrar el valor de la fuerza neta con esta condición

:

Utilizando le resultado anterior se pueden encontrar las condiciones de aumentar la velocidad, disminuirla o no modificarla de los átomos por acción del haz de luz láser.

8b) Expresar la condición para obtener fuerza positiva, esto es, aumentar la velocidad.

8c) Expresar la condición para obtener fuerza cero

8d) Expresar la condición para obtener fuerza negativa, esto es, aumentar la velocidad

8e) Considerar que los átomos se mueven con velocidad –v (en el sentido –x). Escribir la condición para obtener una fuerza que disminuya la velocidad de los átomos.

<u>9.- Melaza óptica</u>

En el caso de una fuerza negativa se obtiene una fuerza disipativas por fricción. Suponer que inicialmente t=0, el gas de átomos posee una velocidad v_o.
9a) En el límite de bajas velocidades encontrar la velocidad de los átomos después de que el haz de láser haya actuado un tiempo τ.

9b) Admitir que el gas de átomos se encuentra en equilibrio térmico a una temperatura T_o. *Encontrar la temperatura T después de que el haz de láser haya actuado un tiempo* τ.

PROBLEMA 3

¿POR QUÉ LAS ESTRELLAS SON TAN GRANDES?

Las estrellas son esferas de gas caliente. la mayoría de ellas brillan a causa de que fusionan el hidrógeno en helio en sus partes centrales. En este problema se utilizaran conceptos tanto de la mecánica clásica como de la cuántica y también de la electrostática y termodinámica con el fin de entender por qué las estrellas han de tener un tamaño suficientemente grande para lograr el proceso de fusión y además para obtener la masa y el radio de las estrellas más pequeñas que pueden fusionar el hidrógeno.

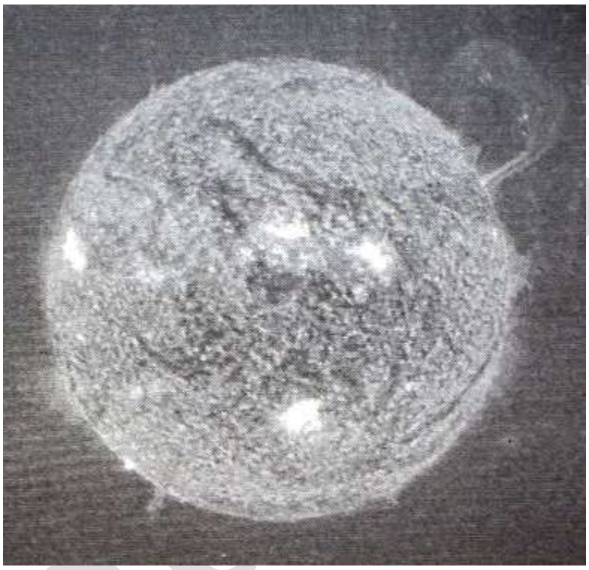


Fig.1.- **Nuestro Sol, como la mayoría de las estrellas, brilla debido a que en sus partes centrales se verifica a la fusión termonuclear del hidrógeno en helio.**

Constantes útiles

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}7.10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^2$.
Constante de Boltzmann: $k=1{,}4.10^{-23}\ JK^{-1}$
Constante de Planck: $h= 6{,}6.10^{-34}\ m^2 kg\ s^{-1}$
Masa del protón: $m_p= 1{,}7.10^{-27}$ kg
Masa del electrón: $m_e=9{,}1.10^{-31}$ kg
Unidad de carga eléctrica:$q=,6.10^{-19}$ C
Permitividad del vacío: $\varepsilon_o=8{,}9.10^{-12}\ C^2N^{-1}\ m^{-2}$
Radio del Sol: $R_S=7{,}0.10^8$ m
Masa del Sol: $M_S=2{,}0.10^{30}$ kg

1.- Estimación clásica de la temperatura del centro de las estrellas

Suponer que el gas que forma las estrellas es hidrógeno totalmente ionizado (el mismo número de electrones que protones) y que se comporta como si fuese un gas ideal. Desde el punto de vista clásico para lograr la fusión de dos protones se necesita que estén a una distancia de

10^{-15} m para que a esta distancia aparezcan fuerzas nucleares atractivas que superen a las repulsivas. Para llegar a esa distancia es preciso vencer la fuerza de repulsión de Coulomb. Suponer que los dos protones son masas puntuales y que se desplazan uno al encuentro del otro con una velocidad v_{rms} , la velocidad cuadrática media, en una colisión frontal unidimensional.

1a) Determinar la temperatura del gas, T_c , para que la distancia de aproximación entre los dos protones d_c sea igual a 10^{-15} m. Dar el resultado con dos cifras significativas.

<u>2.- Comprobando que la temperatura anterior está equivocada.</u>

La comprobación de si la temperatura anterior es correcta, se necesita un método independiente para deducir la temperatura de la estrella. La estructura de las estrellas es muy complicada pero podemos acercarnos a Comprenderla haciendo algunas suposiciones. Las estrellas están en equilibrio no se expanden ni se contraen debido a que la fuerza gravitatoria actuando hacia dentro está equilibrada con la fuerza de presión hacia fuera (ver figura 2). Para una corteza de gas la ecuación de equilibrio hidrostático a una distancia r del centro de la estrella está dada por la siguiente ecuación

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = -\frac{G\, M_r\, \rho_r}{r^2}$$

P es la presión del gas, G la constante de Gravitación, M_r masa de la estrella dentro de una esfera de radio r, y ρ_r la densidad del gas en la corteza.

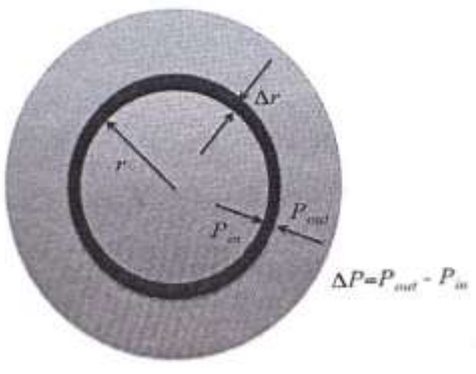


Fig.2.- **Las estrellas están en equilibrio hidrostático con las diferencias de presión equilibrando la gravedad.**

Un orden de magnitud de la temperatura de la estrella se puede calcular utilizando los parámetros del centro y superficie de la estrella haciendo las siguientes aproximaciones:
$\Delta P \approx P_o - P_c$, P_c y P_o son las presiones en el centro y en la superficie de la estrella, dado que $P_c >> P_o$ se puede suponer que $\Delta P \approx -P_c$
Con igual aproximación $\Delta r = R$, R es el radio total de la estrella
$M_r \approx M_R = M$, M masa de la estrella
$\rho_r = \rho_c$, la densidad se considera la del centro.
Se supone que la presión es la de un gas ideal.

2a) Encontrar la ecuación de la temperatura en el centro de la estrella T_c en función del radio y masa de la estrella y de las constantes físicas.

2b) Utilizando la ecuación encontrada en 2a escribir la razón M/R esperada para una estrella en función de las constantes físicas y T_c.

2c) Con el valor de T_c hallado en el apartado 1a) encontrar el valor M/R de una estrella

2d) Calcular la relación $M_{Sol}/Radio_{Sol}$ y verificar que este valor es mucho más pequeño que el hallado en el apartado 2c).

3.- Una estimación mecanocuántica de la temperatura del centro de las estrellas.

La amplia discrepancia encontrada en 2d) sugiere que la estimación clásica obtenida para T_c en 1a) no es correcta. La solución a esta discrepancia se encuentra cuando consideramos efectos mecanocuánticos que nos dicen que los protones se comportan como ondas y que un único protón es de un tamaño del orden de λ_p que es la longitud de onda de De Broglie. Esto implica que d_c , la distancia de máxima aproximación de los protones, es del orden de λ_p y que los protones en su aspecto mecanocuántico se solapan y pueden fusionarse.

3a) Suponiendo que $d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}}$ es la condición que permite la fusión, encontrar la ecuación para T_c en función de las constantes físicas.

3b) Calcular el valor numérico de T_c obtenido en el apartado 2a)

3c) Con el valor de T_c del apartado 2a) encontrar el valor numérico de M/R de una estrella, utilizando la formula obtenida en 2b).Verificar que este valor es similar a la razón $M_{Sol}/Radio_{Sol}$.

De hecho las estrellas de la denominada secuencia principal (las que fusionan hidrógeno) aproximadamente siguen la relación anterior para un elevado rango de masas.

4.- La relación entre la masa y el radio de las estrellas

Los resultados anteriores sugieren que el tratamiento mecanocuántico para estimar la temperatura del centro de las estrellas es correcto.

4a) Utilizando los resultado obtenidos anteriormente demostrar que para las estrellas que fusionan hidrógeno la relación entre la masa M y el radio R, depende únicamente de constantes físicas. Encontrar la ecuación M/R para las estrellas que fusionan hidrógeno.

5.- La masa y el radio de las estrellas más pequeñas

El resultado encontrado en 4a) sugiere que pueden existir estrellas de cualquier masa con tal de que cumplan la relación anterior y esto no es cierto.
El gas interior de las estrellas normales que fusionan hidrógeno se comporta aproximadamente como un gas perfecto. Esto significa que d_e, la separación entre electrones, es en promedio mayor que λ_e, su longitud de onda de De Broglie. Con mayor detalle los electrones podrían estaren un estado llamado degenerado y las estrellas podrían comportarse de manera muy diferente. Observe la distinta manera de tratar los protones y electrones dentro de la estrella. Para los protones sus ondas de De Broglie podrían solaparse y dar lugar a fusionarse mientras que para los electrones su onda de De Broglie no deben solaparse para seguir comportándose como un gas ideal.
La densidad de las estrellas aumenta a medida que disminuye el radio. Sin embargo para estas magnitudes estimadas se supone que la densidad es uniforme. Debe tener en cuenta que $m_p \gg m_e$.

5a) Encontrar una ecuación para n_e, densidad promedio de los electrones dentro de la estrella.

5b) Encontrar una ecuación para d_e, la separación entre los electrones dentro de la estrella.

5c) Utilice la condición $d_e \geq \frac{\lambda_e}{\sqrt{2}}$ para encontrar la ecuación del radio de las estrellas normales más pequeñas. Considere la temperatura del centro de la estrella como típica para todo el interior estelar.

5d) Encontrar el valor numérico del radio de la estrella normal más pequeña posible, expresando el resultado en metros y en unidades del radio del Sol.

5e) Encontrar el valor numérico de la masa de la estrella normal más pequeña posible, expresando el resultado en kg y en unidades de masas del Sol.

6.- La fusión de núcleos de helio en las estrellas más viejas

Una estrella es vieja cuando ha convertido la mayoría de su hidrógeno del núcleo en helio. La estrella para seguir brillando ha de convertir el helio en elementos más pesados. Un núcleo de helio tiene dos protones y dos neutrones, por tanto, su carga es doble de la del protón y su masa cuatro veces mayor. Hermos visto que la condición para fusionarse los protones es: $d_c = \frac{\lambda_p}{\sqrt{2}}$.

6a) Con una condición equivalente para el helio, encontrar la v_{rsm} del helio y la T_{He} para que ocurra su fusión.