

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Madrid 2010

XLI.- OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. CROACIA. 2010

PROBLEMA 1

IMAGEN DE UNA CARGA SOBRE UN OBJETO METÁLICO

Introducción.- Método de las imágenes.

Si se coloca una carga puntual q en las proximidades de una esfera metálica unida a tierra de radio R (ver figura 1a), sobre la esfera aparece una carga inducida. Calcular el campo y el potencial de esta carga inducida puede ser una tarea formidable. No obstante el cálculo se simplifica notablemente utilizando el método de las imágenes.

Con este método el campo y el potencial producido por la carga distribuida sobre la esfera pueden calcularse por el campo y el potencial que crea una carga puntual q' , colocada en el interior de la esfera (esto no hay que demostrarlo).

Nota.- El campo eléctrico de la carga imagen q' reproduce el campo y el potencial solamente fuera de la esfera (incluida su superficie).

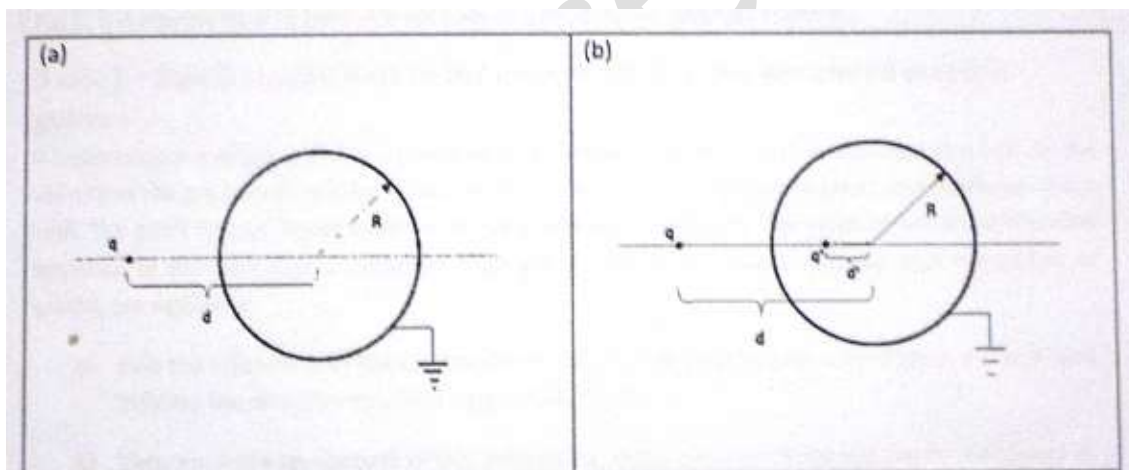


Fig.1(a).- Una carga q puntual esta situada en la proximidad de una esfera metálica unida a tierra.

Fig.1(b) El campo eléctrico de la carga inducida sobre la esfera puede representarse por el campo eléctrico de la carga imagen q' .

Cuestión 1. La carga imagen

La simetría del problema conduce a que la carga q' debe colocarse en la línea que une la carga q con el centro de la esfera. Ver figura 1(b).

a) ¿Cuál es el valor del potencial de la esfera?

b) Expresar q' y la distancia d' de la carga q' al centro de la esfera, en función de q , d y R .

c) Encontrar el módulo de la fuerza que actúa sobre q ¿Es la fuerza repulsiva?

Cuestión 2. Apantallamiento de un campo electrostático

Considerar una carga puntual q colocada a una distancia d del centro de una esfera metálica unida a tierra, de radio R . Estamos interesados en cómo la esfera metálica unida a tierra afecta al campo eléctrico en A , siendo A un punto del lado opuesto de la esfera, tal como se indica en la figura 2.

El punto A está situado sobre la línea recta que une la carga q con el centro de la esfera y a una distancia r de la carga

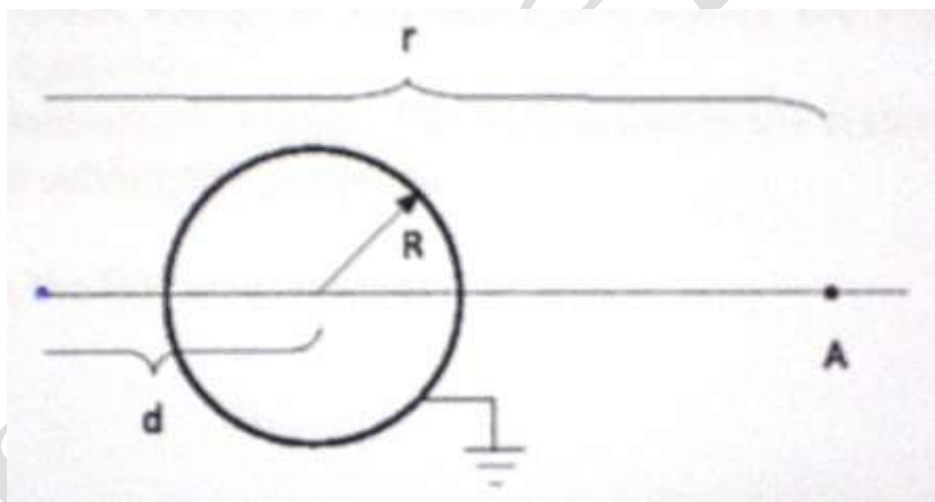


Fig.2.- El campo eléctrico en A está parcialmente apantallado por la esfera unida a tierra.

a) Calcular el campo eléctrico en el punto A

b) Cuando $r \gg d$, calcular la expresión del campo eléctrico utilizando la aproximación: $(1+a)^{-2} \approx 1-2a$, siendo $a \ll 1$.

b) ¿Para qué límite de d , la esfera metálica unida a tierra apantalla el campo de la carga q completamente, de tal modo que el campo en el punto A es exactamente cero?

Cuestión 3. Oscilaciones pequeñas en el campo eléctrico de la esfera metálica unida a tierra.

Una carga puntual q de masa m está suspendida de una cuerda de longitud, L la cual está, por el extremo libre, sujeta a una pared, en las proximidades de la esfera metálica unida a tierra. Se ignoran los efectos electrostáticos de la pared. La carga puntual es un péndulo matemático (ver la figura 3). La distancia entre el centro de la esfera y el punto en que la cuerda L está sujeta a la pared es l . Se desprecia la gravedad.

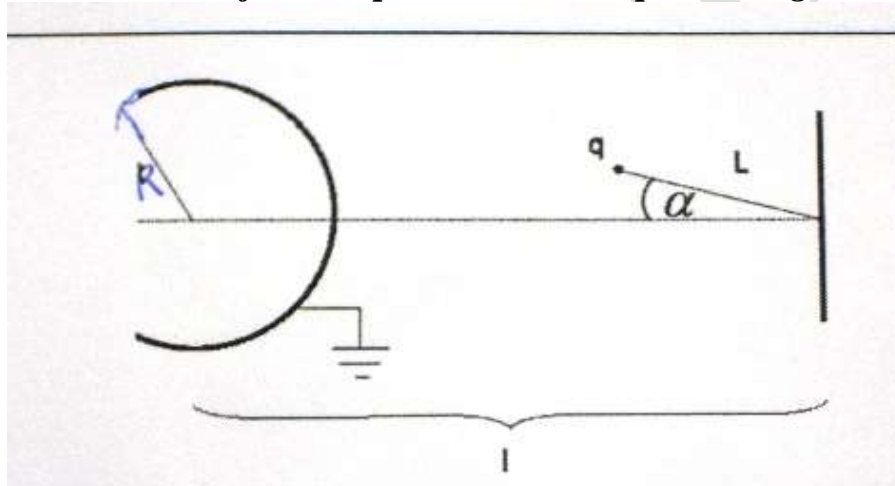


Fig.3.- Una carga puntual situada en las proximidades de una esfera metálica unida a tierra oscila como un péndulo

a) Encontrar el módulo de la fuerza eléctrica que actúa sobre la carga q para un determinado ángulo α e indicar su dirección mediante un diagrama.

b) Determinar la componente perpendicular a la cuerda L de la fuerza \vec{F} en función de l , L , R , q y α .

c) Encontrar la frecuencia para pequeñas oscilaciones del péndulo.

Cuestión 4. La energía electrostática del sistema

En una distribución de cargas eléctricas es importante conocer la energía del sistema. En nuestro problema (ver la figura 1(a)) existe una interacción electrostática entre la carga externa q y las cargas inducidas en la esfera y una interacción electrostática entre las mismas cargas inducidas en la esfera. En función de la carga q , radio de la esfera R y la distancia d , calcular las siguientes energías electrostáticas

- a) La energía electrostática entre la carga q y las cargas inducidas en la esfera*
- b) La energía electrostática de interacción entre las cargas de la esfera*
- c) La energía electrostática total de la interacción en el sistema.*

Ayuda: .Existen diferentes formas de resolver la cuestión:

- 1) Una de ellas es utilizar la siguiente integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x dx}{d(x^2 - R^2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$$

- 2) Utilizar el hecho de que una colección de N cargas localizadas en los puntos r_i , siendo $i=1.2.3 \dots N$, la energía electrostática es la suma sobre todos los pares de cargas

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

FÍSICA DE UNA CHIMENEA

PROBLEMA 2

Introducción

Los productos gaseosos procedentes de una combustión son arrojados a la atmosfera de temperatura T_{air} mediante una chimenea de sección A y altura h , (ver la figura 1). La materia sólida se quema en un horno a una temperatura $T_{Smoke.}=T_{hum.}$. El volumen de gases producidos por unidad de tiempo en el horno se designa con B .

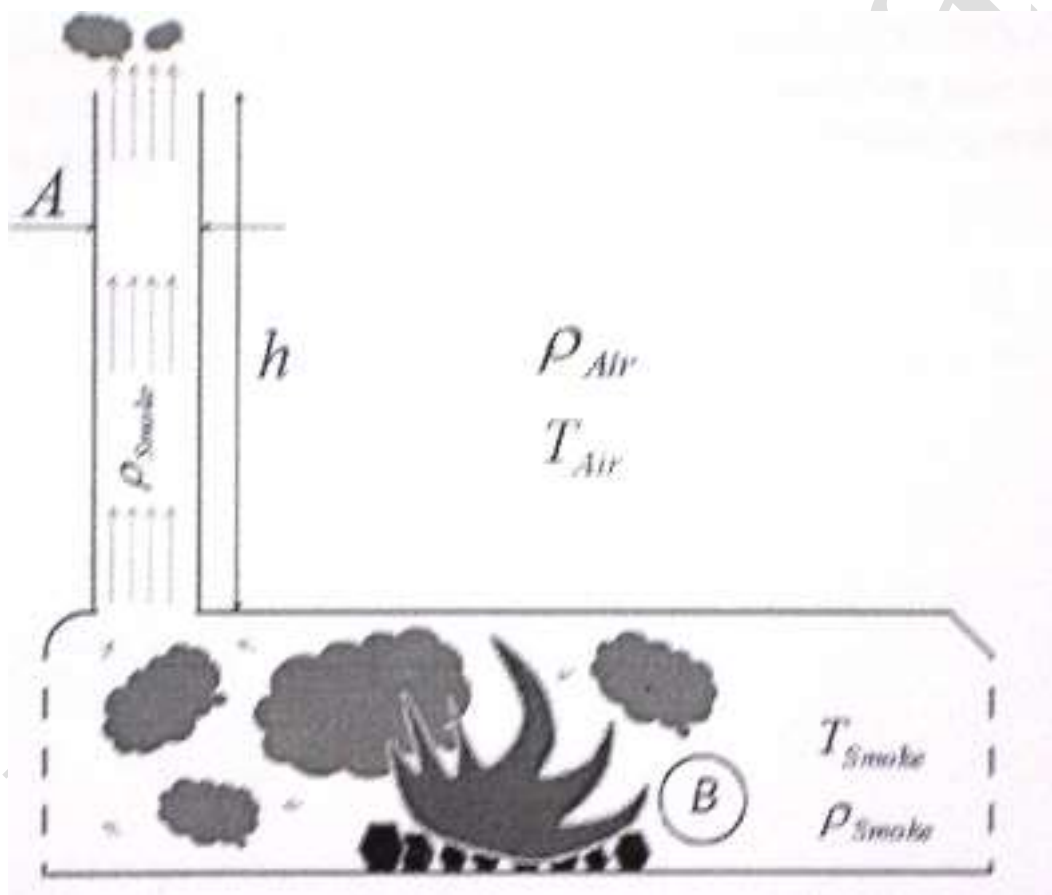


Fig 1.- Esquema de la chimenea de altura h con un horno a la temperatura $T_{Smoke}=T_{hum}$

Se supone:

- *La velocidad de los gases dentro del horno es despreciable
- *La densidad de los gases (humos) no es diferente de la del aire a la misma presión y temperatura. En el horno los gases pueden considerarse como ideales.

**La presión del aire varía con la altura de acuerdo con la ley de la hidrostática. La variación de la densidad del aire con la altura se desprecia.*

**El flujo de gases se rige por la ecuación de Bernoulli*

$$\frac{1}{2} \rho v^2(z) + \rho g z + p(z) = \text{constante}$$

ρ es la densidad del gas, $v(z)$ su velocidad, $p(z)$ su presión, siendo z la altura

** La variación de la densidad del gas a lo largo de la chimenea es despreciable.*

Cuestión 1.

a) *¿Cuál es la altura mínima de la chimenea para que funcione correctamente, esto es, que arroje a la atmósfera todos los gases que se producen en el horno? Expresar el resultado en función de B , A , T_{air} , $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $\Delta T = T_{hum} - T_{air}$*

Importante: En las siguientes cuestiones se supone que la altura mínima es la altura de la chimenea.

b) *Suponer que se edifican dos chimeneas que sirvan para el mismo propósito. Sus secciones son iguales, pero una estará en una región fría donde la temperatura del aire exterior es -30°C , y la otra en una región caliente con temperatura exterior de $+30^\circ\text{C}$. La temperatura del horno es 400°C . Se calcula que la chimenea de la región fría debe tener una altura mínima de 100 metros ¿Cuál debe ser la altura mínima de la chimenea en la región caliente?*

c) *¿Cómo varía la velocidad de los gases a lo largo de la columna? Hacer un esquema-diagrama suponiendo que la sección de la chimenea no cambia con la altura. Indicar el punto donde los gases entran en la chimenea.*

d) *¿Cómo varía la presión de los gases a lo largo de la altura de la chimenea?*

PLANTA DE POTENCIA SOLAR

El flujo de gases que circula por la chimenea puede utilizarse para construir una planta de producción eléctrica aprovechando la energía solar. La idea se ilustra en la figura 2.

El Sol calienta el aire que se encuentra bajo el colector de área S , el cual se encuentra abierto por su periferia para así permitir un flujo continuo de entrada de aire. A medida que el aire caliente penetra en la chimenea (flechas delgadas continuas en la figura 2) nuevo aire frío penetra en el colector procedente de los alrededores (flechas discontinuas de la figura 2) estableciéndose un flujo continuo de aire. El flujo de aire de la chimenea mueve una turbina la cual produce energía eléctrica. La energía solar por unidad de tiempo y por unidad de área horizontal del colector es G . Se supone que toda esa energía se emplea en calentar el área del colector (la capacidad calorífica másica del aire es c y se desprecia su variación con la temperatura). Definimos la eficacia de la chimenea solar como el cociente entre la energía cinética del flujo gaseoso y la energía solar empleada en calentar el aire antes de penetrar en la chimenea.

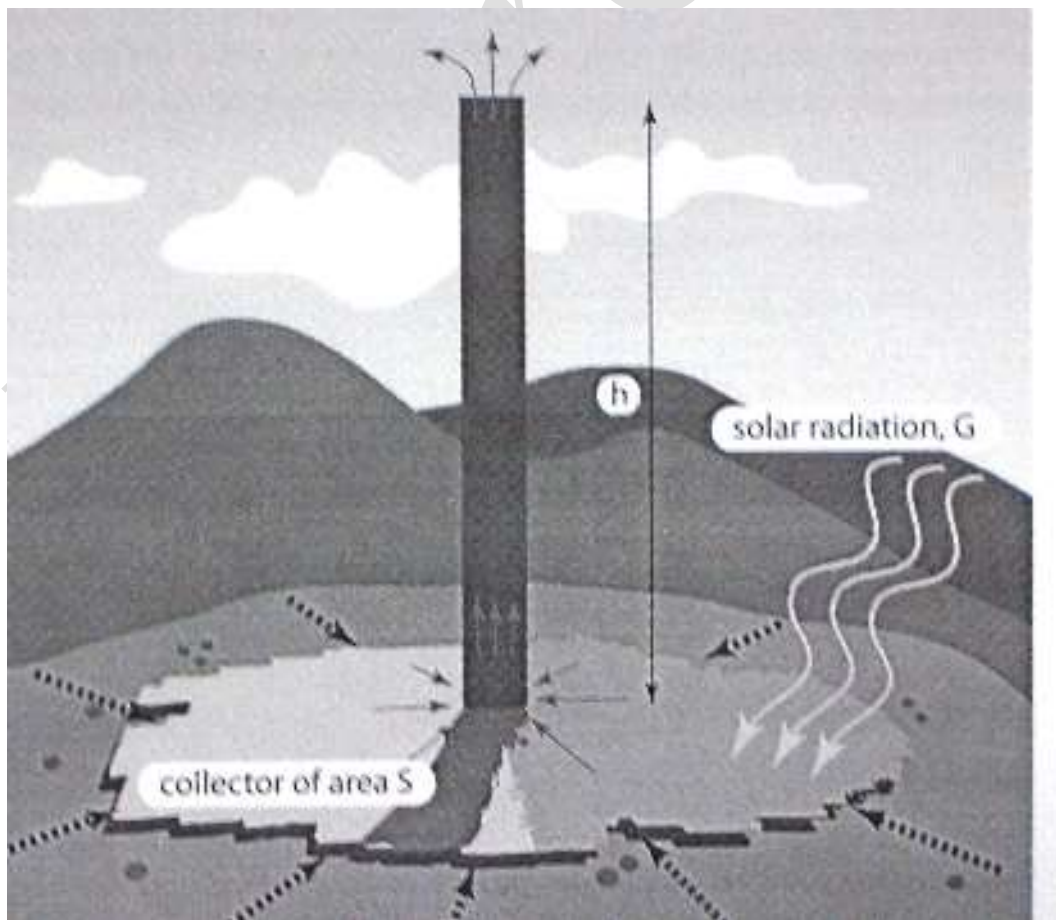


Fig 2.- Bosquejo de una planta solar

Cuestión 2.

- a) *¿Cuál es la eficacia de la chimenea en la planta solar?*
- b) *Indique cómo varía la eficacia con la altura de la chimenea*

EL PROTOTIPO DE PLANTA DE MANZANARES

La chimenea instalada en la localidad de Manzanares (España) tiene un altura $h=195$ metros y un radio de 5 metros. El colector es un círculo de 244 metros de diámetro. El calor específico del aire en las condiciones de trabajo de la instalación es 1012 J/kgK , la densidad del aire caliente $0,9 \text{ kg/m}^3$ y la temperatura exterior a la instalación $T_A = 295 \text{ K}$. La potencia solar por unidad de superficie horizontal 150 W/m^2 durante los días soleados.

Cuestión 3.

- a) *¿Cuál es la eficacia de la planta prototipo de manzanares?*
- b) *¿Qué potencia puede obtenerse en la citada planta?*
- c) *¿Cuánta energía se produce en la planta en un día soleado?*

$$E = 45 \cdot \text{horas de Sol}$$

Cuestión 4.

- a) *Deducir la expresión de la elevación de la temperatura entre el aire que penetra en la chimenea (aire caliente) y el aire que procede de los alrededores del sistema (aire frío). Calcular el valor numérico para el prototipo de la planta solar de Manzanares.*

- a) *¿Cuál es el flujo de aire másico a través del sistema?*

MODELO SENCILLO DEL NÚCLEO ATÓMICO

PROBLEMA 3

Introducción

Aunque el núcleo atómico es un objeto de tratamiento cuántico ciertas propiedades (el radio y la energía de enlace, se deducen a partir de suposiciones simples:1) Los núcleos están formados por nucleones (protones y neutrones);2) La fuerza nuclear fuerte mantiene unidos a los nucleones actuando ésta a una distancia muy pequeña (actúa solamente entre nucleones vecinos); 3)el número de protones Z de un determinado núcleo es aproximadamente igual al de neutrones N , esto es $Z=N \approx A/2$,siendo A el número de nucleones($A \gg 1$). Se utiliza esta expresión en las cuestiones 1 a 4.

Cuestión 1. El núcleo atómico como un paquete cerrado de nucleones

*Según un modelo simple un núcleo atómico puede considerarse como una bola en la que los nucleones se encuentran fuertemente empaquetados, juntos unos con otros, (ver la figura 1a) .Los nucleones se consideran como esferas duras de radio $r_N=0,85 \text{ fm}$ ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$). La fuerza nuclear actúa solamente entre dos nucleones en contacto. El volumen del núcleo V es mayor que el propio volumen de todos los nucleones AV_N , siendo $V_N = \frac{4}{3}\pi r_N^3$. El cociente $f = \frac{AV_N}{V}$ se denomina *factor de empaquetamiento* y representa el porcentaje ocupado por la materia nuclear*

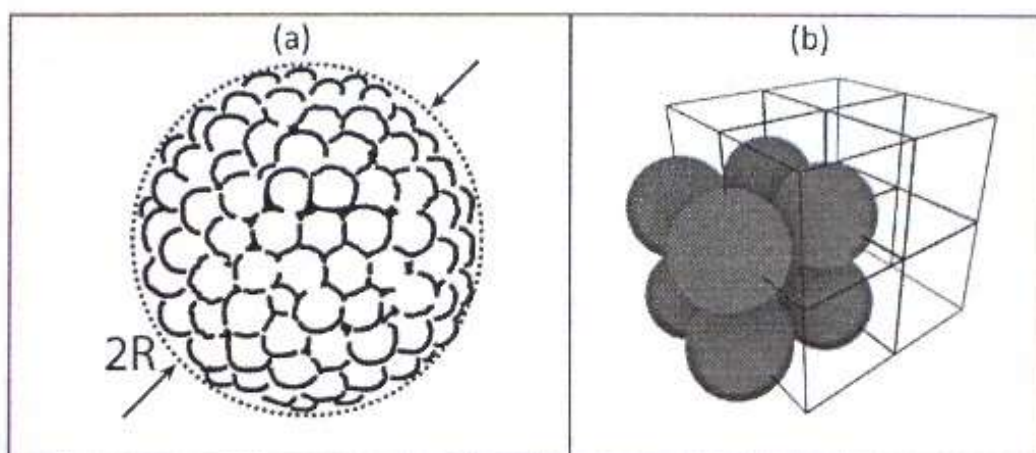


Fig 1(a).- El núcleo atómico es una esfera formada por nucleones fuertemente empaquetados. Fig (2). El empaquetamiento cúbico simple.

a) Calcular el factor f si los nucleones se sitúan en un empaquetamiento “cúbico simple” en el que cada nucleón ocupa el centro de un cubo, replicándose este cubo en las tres direcciones del espacio.

b) Estimar la densidad masa promedio ρ_m , la densidad de carga ρ_c y el radio R para un núcleo que posee A nucleones. La masa promedio de un nucleón es $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

Cuestión 2. Energía de enlace del núcleo atómico

La energía de enlace de un núcleo es la requerida para separar los nucleones. Esencialmente el proceso supone vencer la fuerza de atracción entre cada nucleón y su vecino. Si un nucleón se encuentra en el interior del núcleo contribuye a la energía total de enlace con $a_v = 15,8$ MeV ($1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$), pero si el nucleón está ubicado en la superficie del núcleo su contribución es solamente $a_v/2$.

Expresar la energía de enlace E_b de un núcleo en función de A , a_v , y f incluyendo la corrección de superficie.

Cuestión 3. Efecto electrostático sobre la energía de enlace

La energía electrostática de una esfera de radio R y carga Q_0 es:

$$U_e = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R}, \text{ siendo } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N m}^2}$$

a) Aplicar esta fórmula para obtener la energía electrostática del núcleo. En un núcleo cada protón no actúa sobre sí mismo, solamente lo hace con el resto de los protones. Para tener esto en cuenta debe reemplazarse Z^2 por $Z(Z-1)$ en la fórmula que se obtenga. Utilice esta corrección en las siguientes cuestiones.

b) Escriba la fórmula completa de la energía de enlace incluyendo el término principal, la corrección de superficie y la corrección electrostática

Cuestión 4. Fisión de núcleos pesados

La fisión es un proceso nuclear mediante el cual un núcleo se divide en partes más pequeñas (núcleos ligeros). Suponer que un núcleo con A nucleones se divide en dos núcleos iguales como se indica en la figura 4.

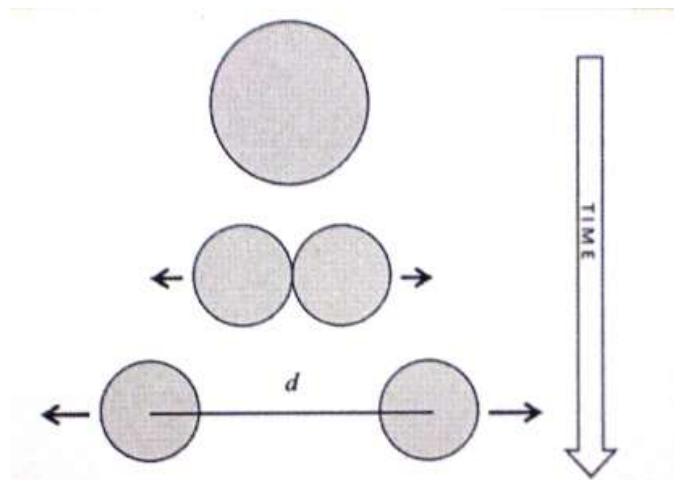


Fig 4.- Descripción esquemática de la fisión nuclear en nuestro modelo

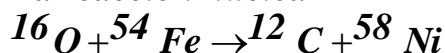
a) *Calcular la energía cinética total de los productos de la fisión E_C cuando los centros de los núcleos ligeros están separados una distancia $d \geq 2R\left(\frac{A}{2}\right)$ siendo $R\left(\frac{A}{2}\right)$ su radio. El núcleo mayor se encuentra inicialmente en reposo.*

b) *Evaluar E_C obtenido en el apartado a) para $A = 100, 150, 200, 250$. Estimar el valor de A para el que la fisión es posible de acuerdo con el modelo propuesto.*

Cuestión 5. Reacciones de transferencia

a) En la física moderna la energética del núcleo y sus reacciones se describen en términos de masas. Por ejemplo si un núcleo con velocidad nula se encuentra en un estado de energía excitada E_{exc} por encima de su energía fundamental su masa es: $m = m_o + \frac{E_{exc}}{c^2}$, siendo m_o la masa en

reposo de la partícula. La reacción nuclear



Constituye un ejemplo de las llamadas "reacciones de transferencia", en las que una parte de un núcleo (agrupamiento) se transfiere a otro (ver la figura 5). En nuestro ejemplo la parte transferida es una partícula α . La reacción de transferencia ocurre con la máxima probabilidad si la velocidad de un producto de la reacción, en el ejemplo el ${}^{12}\text{C}$, es igual en módulo, dirección y sentido con la velocidad del proyectil incidente, en nuestro caso el ${}^{16}\text{O}$. El blanco (${}^{54}\text{Fe}$) se encuentra inicialmente en reposo. En la reacción el Ni se forma en un estado excitado.

Encontrar su energía de excitación, expresada en eV, si la energía cinética del proyectil ${}^{16}\text{O}$ es 50,0000 MeV. La velocidad de la luz es $c=2,99792 \cdot 10^8$ m/s.

Masas en reposo de los reactivos y productos de la reacción

$m({}^{16}\text{O})=15,99491$ uma ; $m({}^{54}\text{Fe})=53,93962$ uma; $m({}^{12}\text{C})=12,00000$ uma;
 $m({}^{58}\text{Ni})=57,93535$ uma ; 1 uma = $1,6605 \cdot 10^{-27}$ kg.

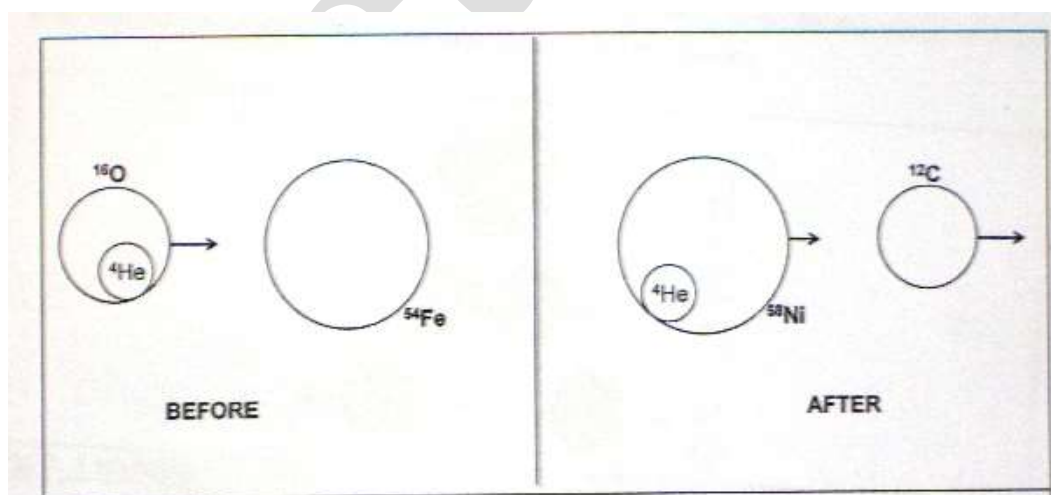


Fig 5.- Esquema de una reacción de transferencia

b) El núcleo de ^{58}Ni se encuentra en un estado excitado y pasa al estado fundamental emitiendo radiación gamma en la dirección y sentido de su movimiento. Considerar este proceso en el sistema de referencia en el cual el ^{58}Ni se encuentra en reposo. Encontrar su energía de retroceso, esto es, la energía cinética que adquiere el ^{58}Ni después de la emisión del fotón. ¿Cuál es la energía del fotón en ese sistema de referencia?, esto es, la energía del fotón medida con un detector que esté colocado en la dirección sobre la cual se mueve el ^{58}Ni .

Heureka