

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPLADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez
Ricardo David Fernández Cruz

Madrid 2012

XLIII.- OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. ESTONIA. 2012

PROBLEMA 1

Centrarse en los bocetos

Parte A . Balística

Una bola arrojada con una velocidad inicial v_0 , se desplaza dentro de un campo gravitacional homogéneo situado en el plano XZ, siendo X el eje horizontal Z el vertical hacia arriba, siendo la gravedad g vertical y hacia abajo. Se desprecian los posibles rozamientos con el aire.

I.- Desde el origen se lanza una bola con velocidad inicial v_0 y en todas las direcciones, la región del espacio que puede ser alcanzada por la bola viene dada por la expresión

$$z \leq z_0 - kx^2$$

Encontrar los valores de z_0 y k .

El planteamiento de la prueba hace referencia al establecimiento de la parábola de seguridad, cuyo significado es que fuera de ella la bola no alcanza ningún punto y en ella y dentro de ella se alcanza cualquier punto.

La ecuación de una bola lanzada con velocidad inicial v_0 , en cualquier dirección y en el seno de un campo gravitatorio g constante, es una familia de parábolas dada por la siguiente ecuación:

$$x = v_0 \cos \alpha t \quad ; \quad z = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow z - x \operatorname{tag} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$z - x \operatorname{tag} \alpha - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2} (1 + \operatorname{tag}^2 \alpha) = 0$$

Para determinar la envolvente (parábola de seguridad), de la familia de parábolas descrita por la ecuación anterior, derivamos con respecto a alfa.

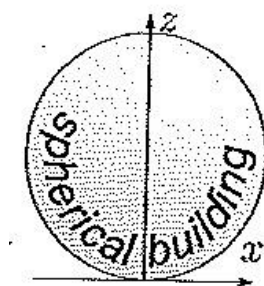
$$-\frac{x}{\cos^2 \alpha} + \frac{g x^2}{2 v_0^2} \cdot \frac{2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{\cos^4 \alpha} = 0 \Rightarrow -1 + \frac{g x}{v_0^2} \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = 0 \Rightarrow \operatorname{tag} \alpha = \frac{v_0^2}{g x}$$

Sustituyendo en la ecuación de las parábolas

$$z = x \frac{v_0^2}{g x} - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2} \cdot \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 x^2} \right) = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g x^2}{2v_0^2}$$

Comparando con la ecuación del enunciado: $z_0 = \frac{v_0^2}{2g}$; $k = \frac{g}{2v_0^2}$

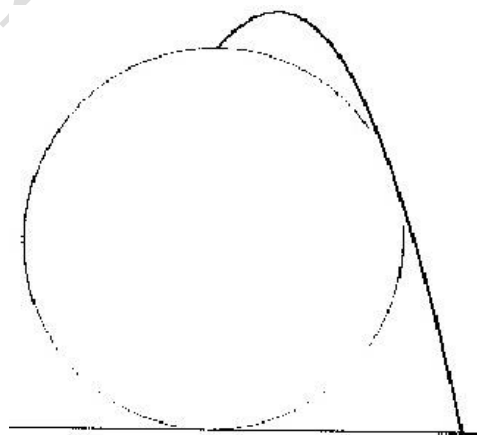
II.-El punto del lanzamiento se puede escoger en cualquier lugar del eje $Z=0$ y además se puede variar el ángulo de lanzamiento. El objetivo del lanzamiento es lograr que la bola llegue al punto más alto de un edificio de forma esférica y radio R y con la velocidad inicial v_0 mínima. No se permiten rebotes en el tejado del edificio antes de llegar al punto más alto.



¿Cuál es la velocidad mínima de lanzamiento desde el suelo ($Z=0$) para que la bola alcance el punto más alto del edificio de forma esférica?

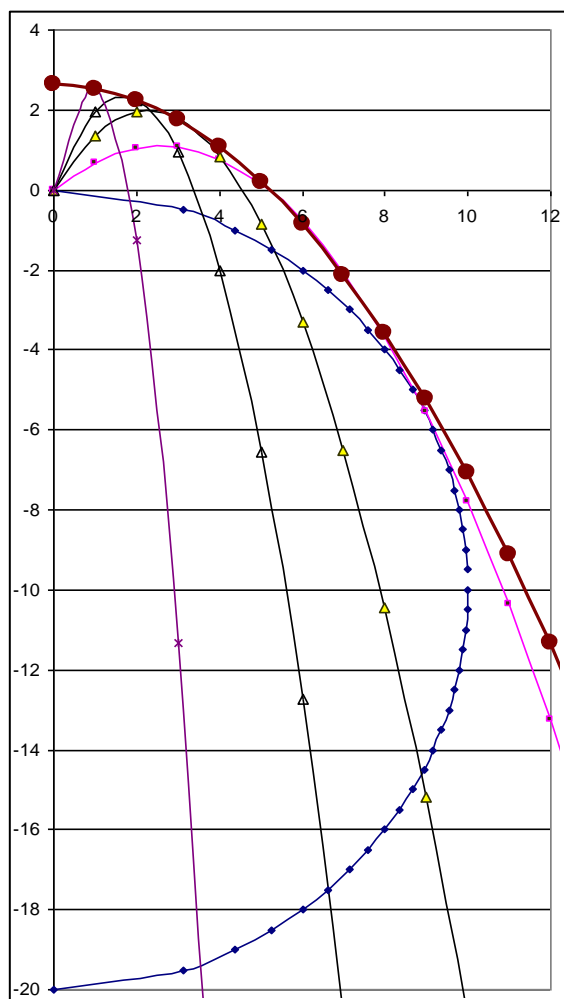
El lanzamiento desde el suelo hasta el punto más alto del edificio con velocidad mínima v_{\min} es totalmente equivalente a lanzar la bola desde el punto más alto hacia el suelo con velocidad v , y que ambas velocidades están entre sí relacionadas. Aplicando el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}mv_{\min}^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 4gR \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 4gR}$$



Nuestro problema ahora es determinar el valor de v .

En la gráfica 1 hemos hecho un esquema del lanzamiento para un edificio esférico de radio R



Gráfica 1

La velocidad v de la trayectoria mínima pasa rozando la esfera del edificio y a esa velocidad mínima le corresponde un cierto ángulo de lanzamiento. Si mantenemos esa velocidad y aumentamos el ángulo se han dibujado varias trayectorias todas ellas están dentro de la parábola de seguridad., la cual hemos representado con un trazo más grueso. Se observa que la ecuación de la circunferencia que representa el edificio de radio R, y la parábola de seguridad tienen junto con la trayectoria óptima un punto común.

La ecuación de la circunferencia que representa el edificio es:

$$(x - 0)^2 + [z - (-R)]^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + z^2 + 2zR = 0$$

La ecuación de la parábola de seguridad deducida antes es:

$$z = \frac{v^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v_0^2}$$

Sustituimos z en la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{v^2}{2g} - \frac{g x^2}{2 v^2} \right) R = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{v^4}{4g^2} + \frac{g^2 x^4}{4v^4} - \frac{x^2}{2} + \frac{v^2 R}{g} - \frac{g x^2 R}{v^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g^2}{4v^4} x^4 + \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v^2} \right) x^2 + \frac{v^2}{g} \left(R + \frac{v^2}{4g} \right) = 0; \quad \text{si hacemos } x^2 = a$$

$$a^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v^2} \right) a + \frac{v^2}{g} \left(R + \frac{v^2}{4g} \right) = 0 \Rightarrow a = \frac{- \left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v^2} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v^2} \right)^2 - \left(\frac{g}{v^2} \right) \left(R + \frac{v^2}{4g} \right)}}{\frac{g^2}{2v^4}}$$

En la gráfica 1 se observa que todos los lanzamientos tienen dos puntos de contacto con la circunferencia de radio R , excepto el de velocidad mínima que solo tiene uno, por tanto, la ecuación anterior debe dar para ese caso una solución única que solamente es posible si el discriminante es nulo

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{gR}{v^2} \right)^2 = \left(\frac{g}{v^2} \right) \left[\left(R + \frac{v^2}{4g} \right) \right] \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{g^2 R^2}{v^4} - \frac{gR}{v^2} = \left(\frac{gR}{v^2} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{g^2 R^2}{v^4} - \frac{gR}{v^2} = \frac{gR}{v^2} \Rightarrow \frac{g^2 R^2}{v^4} = \frac{2gR}{v^2} \Rightarrow \frac{gR}{v^2} = 2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gR}{2}} \Rightarrow$$

$$v_{\min} = \sqrt{v^2 + 4gR} = \sqrt{\frac{gR}{2} + 4gR} = 3\sqrt{\frac{gR}{2}}$$

Parte B . Flujo de aire alrededor de un ala

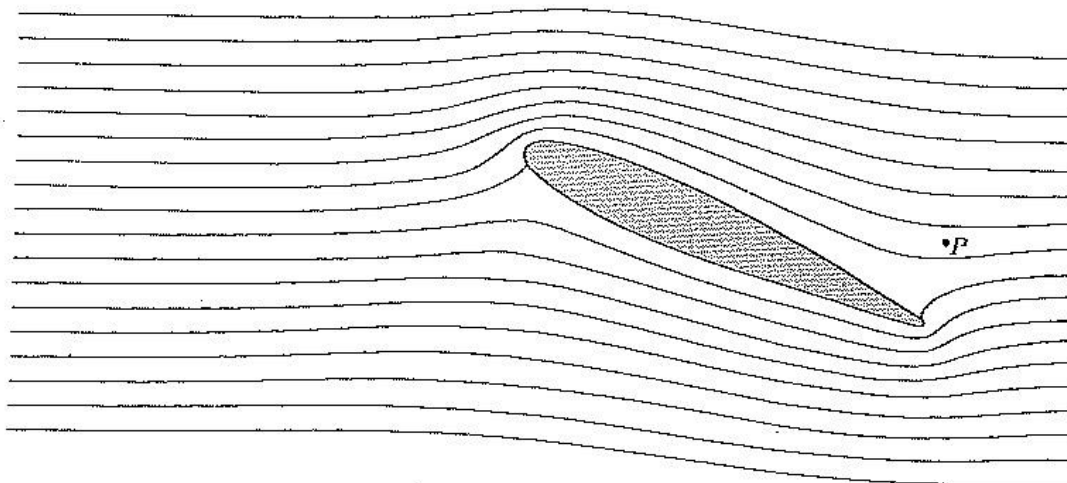
Para esta parte del problema la siguiente información es útil. Para un fluido (líquido o gas) que se mueve a lo largo de una línea de corriente se cumple que:

$$p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = Cte$$

Siempre que la velocidad v sea mucho menor que la del sonido. Aquí ρ es la densidad, h la altura, g la aceleración de la gravedad y p la presión hidrostática.

Las líneas de corriente se definen como la trayectoria de las partículas del fluido (suponiendo que el flujo es estacionario). El término $\frac{1}{2}\rho v^2$ se denomina presión dinámica.

En la figura inferior se representa la sección del ala de un avión así como las líneas de corriente fluyendo alrededor de ella, visto desde el sistema de referencia ligado al ala. a) Se supone que a) el flujo de aire es monodimensional (esto significa que los vectores velocidad del aire yacen en el plano de la figura), b) las líneas de corriente son independientes de la velocidad del avión, c) no hay viento, d) la presión dinámica es mucho más pequeña que la atmosférica: $p_o = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$



I- Si la velocidad del avión respecto del suelo es $v_o = 100 \text{ m/s}$, ¿cuál es la velocidad del aire en el punto P señalado en la figura respecto del suelo?

Un observador situado en tierra vería avanzar el avión a la velocidad indicada y lejos del ala el aire estaría en reposo. Un observador ligado al ala del avión establece que ésta se encuentra en reposo y es el aire lejos del ala el que se desplaza a una velocidad de 100 m/s .

La ecuación de continuidad en una sección lejos del ala y en una sección incluido el punto P es: $S_1 v_o = S_p v$, como en el problema se reduce a una sola dimensión la sección es una línea perpendicular al tubo de corriente. Medimos en la figura la posición 1: $x_1 \text{ cm}$; y para la P: $x_p \text{ cm}$.

Las medidas hechas en la figura y de forma aproximada son: $x_1 = 3 \text{ mm}$ y $x_p = 4 \text{ mm}$. Por tanto, la velocidad del viento en P es:

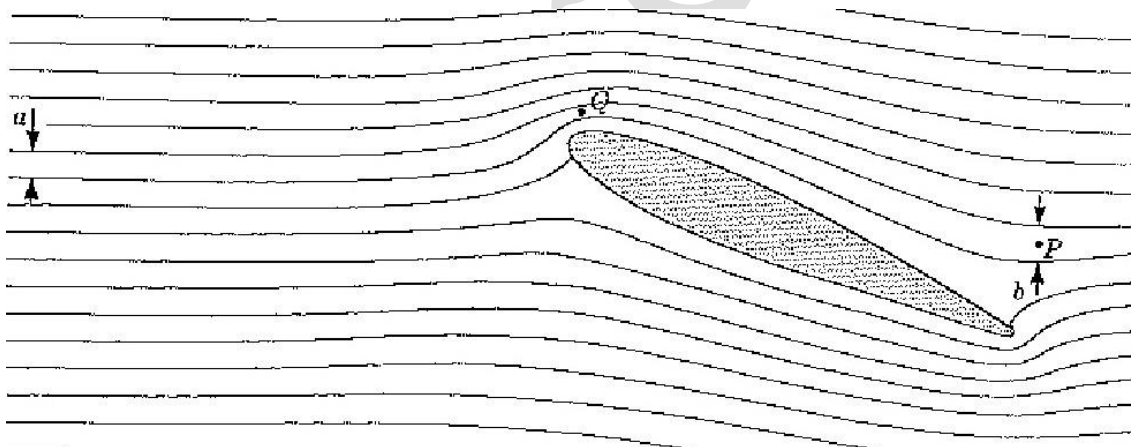
$$100 \cdot x_1 = v' \cdot x_p \Rightarrow v' = \frac{100 \cdot x_1}{x_p} \approx 100 \frac{3}{4} \approx 75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Esta es la velocidad para el observador ligado al ala del avión. Para el observador en tierra el aire que está en reposo es el que está lejos del ala, y que para el observador ligado al ala ese aire tiene una velocidad de 100 m/s, por tanto, la velocidad para el observador de tierra del aire de P es.

$$v_p = 100 - v' = 100 \left(1 - \frac{x_1}{x_p} \right) \approx 25 \frac{m}{s}.$$

II-Cuando la humedad relativa del aire es alta y la velocidad del avión sobrepasa un valor crítico v_c , se forma una corriente de gotitas de agua detrás del ala. Las gotas surgen en un cierto lugar. Explique cualitativamente cuál es la posición Q.

La atmosfera contiene vapor de agua por eso se habla en los partes meteorológicos de la humedad relativa del aire. La humedad relativa es una medida de lo cerca o lejos que estamos a la saturación de un aire en cuyo caso la humedad relativa es del 100%. Esta humedad relativa es función de la temperatura. Si a una masa de aire que contiene vapor de agua a una determinada temperatura no está a saturación su humedad relativa es inferior al 100%, si queremos que esa masa de aire esté a saturación lo podremos lograr disminuyendo su temperatura y así alcanzar el 100% de humedad. Alcanzada la saturación aparecen dos fases: la gas de aire y la líquida de agua.



Si observamos el croquis y tenemos en cuenta lo deducido en la cuestión anterior, el lugar Q pertenece a un tubo de corriente que se estrecha en Q respecto a ese mismo tubo cuando está lejos del ala., por tanto, la velocidad del aire es mayor y en consecuencia según el teorema de Bernoulli es mayor la presión dinámica y con ello disminuye la estática, el aire se expansiona adiabáticamente con lo cual disminuye su temperatura y se alcanza la saturación con la consiguiente formación de gotitas de agua.

III- Estimar la velocidad crítica v_c utilizando los siguientes datos: humedad relativa del aire $r = 90\%$, calor específico del aire a presión constante $C_P = 1,00 \cdot 10^3 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, presión del vapor de agua saturado a la

temperatura del aire no perturbado, $T = 293 \text{ K}$, $p_{sa}=2,31 \text{ kPa}$. Se sabe que la presión del aire saturado a 294 K es $p_{sb}= 2,46 \text{ kPa}$.

Escogemos el tubo de corriente que contiene al punto Q. La ecuación de continuidad nos permite escribir

$$v_a a = v_c c$$

a es la sección del tubo de corriente en el aire no perturbado (zona u) y c en el tubo de corriente en donde se encuentra el punto Q.

La presión del aire en la zona u del aire no perturbado debido a que la humedad relativa es del 90%

$$2,31 \cdot 90/100 = 2,08 \text{ kPa}$$

Si ese aire se encontrase a saturación, calculamos su temperatura admitiendo que la curva presión de saturación temperatura, puede aproximarse por una recta, siendo esto posible porque las temperaturas difieren muy poco entre ellas.

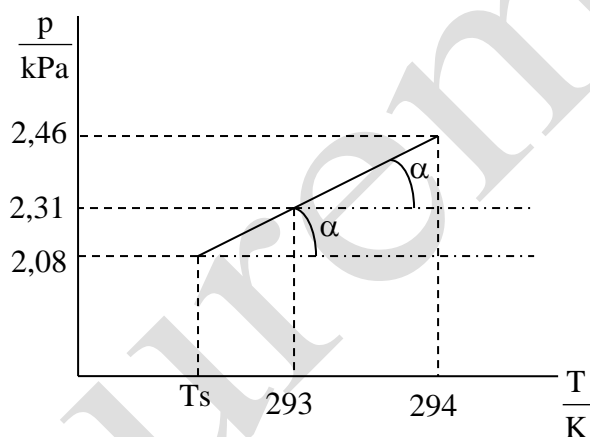


Fig.1

De la figura 1 se deduce:

$$\text{tag } \alpha = \frac{2,46 - 2,31}{294 - 293} = \frac{2,31 - 2,08}{293 - T_s} \Rightarrow 0,15 = \frac{0,23}{293 - T_s} \Rightarrow T_s = 291,5 \text{ K}$$

Supongamos un mol de aire en la zona no perturbada (zona u) que se encuentra a 293 K y ese mol en la zona Q que se encuentra $291,5 \text{ K}$; el balance de energía nos dice:

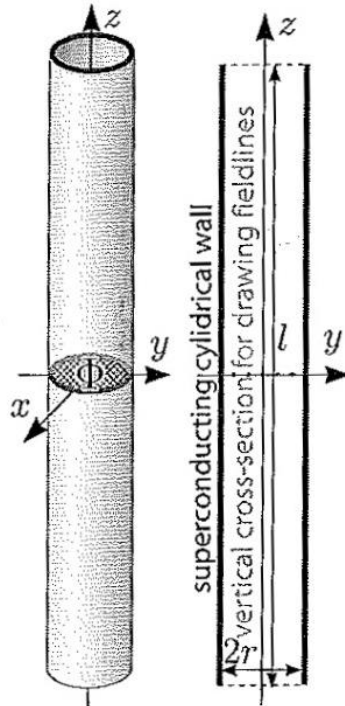
$$\begin{aligned} H_a + \frac{1}{2} m v_a^2 &= H_c + \frac{1}{2} m v_c^2 \Rightarrow m(v_c^2 - v_a^2) = H_a - H_c = \Delta H = 1 \cdot C_p (T_a - T_c) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} m \left(v_c^2 - v_c^2 \frac{c^2}{a^2} \right) = 1 \text{ mol} \cdot C_p (T_a - T_c) \end{aligned}$$

En la ecuación anterior m es la masa de un mol de gas y si M es la masa molar media del aire, expresada en kg/mol, la ecuación anterior es de la forma:

$$\frac{1}{2} M v_c^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) = M(\text{kg}) \cdot C_p \left(\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \right) \cdot \Delta T(\text{K}) \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{2 C_p \Delta T}{1 - \frac{c^2}{a^2}}}$$

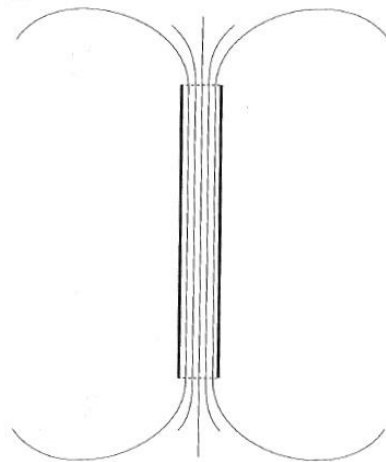
Parte C . Tubitos magnéticos

Considerar un tubo cilíndrico hecho de un material superconductor. La longitud del tubo es l y su radio interno r , siendo $l \gg r$. El centro del tubo coincide con el origen de coordenadas y el eje del tubo es el eje Z. Existe un flujo magnético Φ a través de la sección central del tubo $z = 0$; $x^2 + y^2 < r^2$. Un superconductor es un material que rechaza cualquier campo magnético (el campo es cero dentro del material).



I.- Dibujar cinco líneas de fuerza

Las cinco líneas de fuerza son paralelas al eje Z puesto que el material no permite que haya campo magnético.



II.- Encontrar la fuerza de tensión T a lo largo del eje Z en el medio del tubo (esto es, la fuerza con que las dos mitades del tubo, $z > 0$ y $z < 0$ interactúan entre sí).

Si estiramos el tubo a lo largo del eje Z una pequeña longitud aumentamos el campo magnético en su interior ya que ahora existe un volumen mayor de tubo: $\pi r^2 \Delta l$.

Esto lleva consigo un aumento de la energía del campo magnético Recordando que $\Phi = B \cdot S = B \cdot \pi r^2$ y que la densidad de energía del campo magnético es:

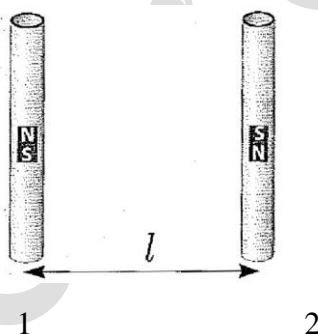
$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi^2 r^4},$$

El aumento de energía es:
$$\Delta E = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi^2 r^4} \cdot \pi r^2 \Delta l = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2} \cdot \Delta l$$

Este aumento de energía provendría de aplicar una fuerza sobre el tubo igual a T y que realizase un trabajo $T \Delta l$, por tanto .

$$T = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 \pi r^2}$$

III.- Considerar otro tubo (el 2) idéntico al anterior (el 1), ambos situados de forma paralela tal como se indica en la figura inferior

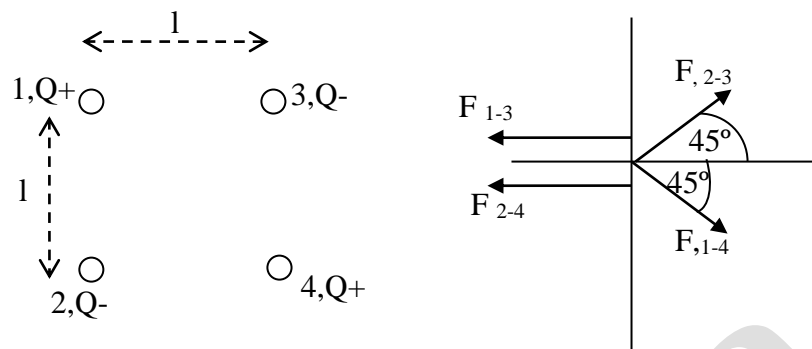


El campo magnético del segundo tubo es igual al del primero pero de signo opuesto y su centro tiene de coordenadas respecto del primer tubo: $x = 0$, $y = l$, $z = 0$, (observe que los dos tubos forman los lados opuestos de un cuadrado). Determinar la fuerza de interacción magnética de los tubos

Si comparamos el campo magnético de una barra imanada con el de dos cargas eléctricas de distinto signo situadas a la distancia l , las líneas de fuerza son semejantes. Vamos a considerar la sustitución de los tubitos por cuatro cargas eléctricas puntuales situadas entre si a una distancia l , formando las cuatro un cuadrado como indica la figura inferior.

Calculemos primero la fuerza de un tubito sobre el otro como si fuesen cargas eléctricas.

Las fuerzas que el tubito 1 ejerce sobre el 2 están representadas en la figura.



$$F_{1-3} = F_{2-4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{l^2}; \quad F_{2-3} = F_{1-4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(\sqrt{2}l)^2}$$

La suma vectorial de las fuerzas conduce al módulo de la fuerza resultante:

$$\frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{l^2} - 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{2l^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{l^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{(4 - \sqrt{2})Q^2}{8\pi\epsilon_0 l^2} \quad (2)$$

La fuerza está dirigida hacia la izquierda, por tanto es una fuerza atractiva.

Observamos que los tubitos se comportan como solenoides de espiras apretadas. Si la longitud del solenoide es l y su sección S y n es número de espiras y por él circula una corriente I , su momento magnético vale $N = nIS$. Por analogía con el momento eléctrico de un dipolo $Q \cdot l$ escribimos:

$$N = nIS = \frac{nISl}{l} = pl; \quad \text{siendo} \quad p = \frac{nIS}{l}$$

La magnitud p mide la carga magnética que aparenta existir en cada uno de los polos. Podemos considerar las cargas de los polos como creadores de un campo magnético, pues por los extremos del solenoide (o de los tubitos) salen o entran líneas de fuerza. En el vacío en el interior del solenoide (o de los tubitos) el campo es:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l} \text{ y el flujo } \Phi = BS = \mu_0 \frac{nI}{l} S = \mu_0 p$$

La llamada ley de Coulomb del magnetismo es:

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{pp'}{l^2} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\mu_0 p \cdot \mu_0 p'}{l^2} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi \cdot \Phi}{l^2} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\Phi^2}{l^2}$$

Comparando (3) con la F_{1-3} , resulta que nos basta sustituir en (2) $\frac{Q^2}{\epsilon_0}$ por $\frac{\Phi^2}{\mu_0}$

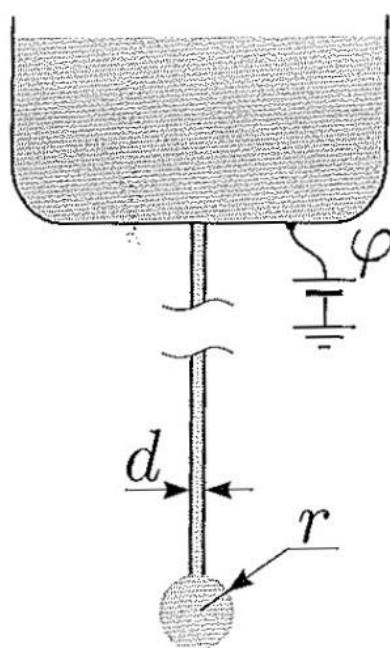
$$F = \frac{(4 - \sqrt{2})\Phi^2}{8\pi\mu_0 l^2}$$

Heureka

PROBLEMA 2

Generador por goteo de Kelvin

Los siguientes hechos sobre la tensión superficial pueden ser útiles para este problema. La posición de las moléculas de un líquido es físicamente diferente si están en el interior del mismo o en la interfase liquido-aire. La interfase se describe mediante la llamada energía de superficie $U = \sigma \cdot S$ en la que S es el área de la interfase y σ es el coeficiente de tensión superficial del líquido. Por otra parte, dos fragmentos de la superficie del líquido tiran uno del otro con una fuerza $F = \sigma \cdot l$, donde l es la longitud en línea recta que separa ambos fragmentos.



En la figura un tubo muy largo de diámetro d , colocado verticalmente lleva agua, la cual gotea por una boquilla situada en la parte inferior. Consideramos que el agua es conductora siendo su densidad ρ y su tensión superficial σ . Por debajo de la boquilla se ha dibujado una gota de agua de radio r . A medida que pasa el tiempo el radio de la gota crece y llega un momento en que se desprende de la boquilla y cae libremente con aceleración g . Se supone que $d \ll r$.

Parte A. Un solo tubo.

I.- Encontrar el radio máximo r_{max} de una gota justamente cuando está a punto de separarse de la boquilla.

El peso de la gota de agua que está a punto de caer y que suponemos que es esférica vale:

$$P = \frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 \rho g$$

Unido al tubo existe un círculo de diámetro d cuya fuerza de tensión superficial es:

$$F = \pi d \sigma$$

Igualando ambas ecuaciones resulta

$$\frac{4}{3} \pi r_{\max}^3 \rho g = \pi d \sigma \Rightarrow r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3d\sigma}{4\rho g}}$$

II.- El potencial electrostático del tubo es φ . Respecto de un punto alejado del mismo. Encontrar la carga Q de una gota cuando su radio es r .

Considerando a la gota esférica y a igual potencial que el tubo. La capacidad de una esfera conductora cargada es:

$$C = \frac{Q}{\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}} = 4\pi\epsilon_0 R \Rightarrow Q = 4\pi\epsilon_0 r \varphi$$

III.- Considerar una situación en la que r se mantiene constante y φ se aumenta de forma paulatina. La gota alcanza un estado inestable y se rompe. Encontrar el potencial crítico φ_{\max} cuando esto sucede.

Debido a la tensión superficial y a la curvatura que presenta una gota, aparece sobre ella una presión normal dirigida hacia el centro de la gota y que recibe el nombre de *presión capilar* cuyo valor es:

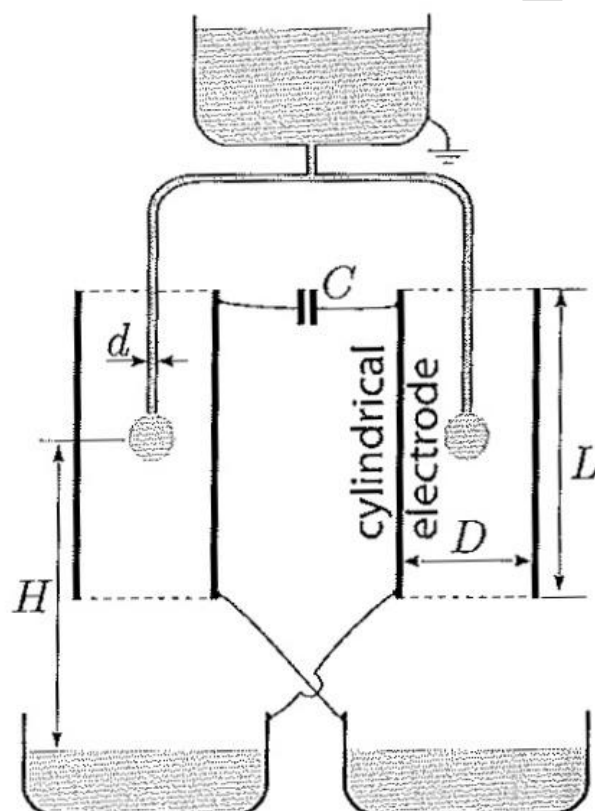
$$\frac{2\sigma}{r}$$

Por otra parte en la superficie de la gota existe una fuerza por unidad de área dirigida hacia el exterior y de valor: $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{\varphi^2}{r^2}$. En el límite de la rotura de la gota

$$\frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{\varphi_{\max}^2}{r^2} = \frac{2\sigma}{r} \Rightarrow \varphi_{\max} = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{\epsilon_0}}$$

Parte B. Dos tubos.

Un aparato denominado generador de goteo de Kelvin consiste en dos tubos idénticos al descrito en la parte A y conectados entre sí mediante una T. Los extremos de ambos tubos están situados en los centros de dos electrodos cilíndricos, de altura H y diámetro D , cumpliéndose que $L \gg D \gg r$. Para ambos tubos la velocidad de goteo es n gotas por unidad de tiempo. Las gotas caen desde una altura H en dos recipientes situados debajo de las boquillas de los tubos y conectados entre sí de forma cruzada, como indica la figura. Los electrodos están conectados entre sí mediante un condensador de capacidad C . No existe carga ni en los recipientes ni en los electrodos. El recipiente del agua del contenedor está unido a tierra. Las primeras gotitas que caen tienen alguna carga microscópica que causará alguna ambivalencia entre los dos lados y una pequeña separación de carga a través del condensador.



I.- Determinar el valor absoluto de la carga Q_0 de las gotas separadas de los tubos en el instante en que la carga del condensador es q . Expresar Q_0 en función de r_{max} (parte A.I) y no considerar el efecto descrito en parte A.III.

Cada electrodo cilíndrico está al mismo potencial que la armadura del condensador al que está unido. Sea U el potencial de una armadura, la otra armadura y el otro cilindro están a potencial $-U$. La capacidad del condensador es: $C = \frac{q}{U - (-U)} = \frac{q}{2U}$

Aplicando la ecuación de la parte A II

$$Q_0 = 4\pi\epsilon_0 r_{\max} U = 4\pi\epsilon_0 r_{\max} \frac{q}{2C} = 2\pi\epsilon_0 r_{\max} \frac{q}{C}$$

II.- Encontrar la dependencia de q respecto del tiempo expresándola mediante una función continua $q(t)$ y suponiendo que $q(t=0) = q_0$

Cada vez que caen unas gotas con carga estas pasan al sistema (digamos que al condensador). Supongamos que la carga del condensador es q , de acuerdo con la ecuación del apartado anterior la carga de las gotas es Q_0 . Supongamos un tiempo muy pequeño dt y sea n el número de gotas que caen por unidad de tiempo, entonces la carga que aportan al condensador es: $dq = nQ_0 dt = 2\pi\epsilon_0 r_{\max} \frac{q}{C} n dt$. La carga del condensador en función del tiempo se obtiene integrando la ecuación anterior

$$\int \frac{dq}{q} = \int \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max} n}{C} dt \Rightarrow \ln q = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max} n}{C} t + Cte \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{cuando } t = 0 \Rightarrow \ln q(0) = Cte \Rightarrow \ln \frac{q}{q(0)} = \frac{2\pi\epsilon_0 r_{\max} n}{C} t \Rightarrow q = q(0)e^{\gamma t}$$

Sustituimos en γ el valor de r_{\max} .

$$\gamma = \frac{2\pi\epsilon_0 n}{C} \sqrt[3]{\frac{3d\sigma}{4\rho g}} = \frac{\pi\epsilon_0 n}{C} \sqrt[3]{\frac{6d\sigma}{\rho g}}$$

III.- La formación de gotas puede ser obstaculizada por el efecto indicado en el apartado A-III. Adicionalmente existe un límite máximo para el potencial que se puede obtener entre una gota y el recipiente inferior, U_{\max} .

Encontrar U_{\max}

Pérdida de energía de una gota mgH ; Energía de una gota $Q*U$

$$mgH = Q_{\max} \cdot U_{\max} = 2\pi\epsilon_0 r_{\max} \cdot U_{\max}^2 \Rightarrow U_{\max} = \sqrt{\frac{mgH}{2\pi\epsilon_0 r_{\max}}}$$

Sustituyendo r_{\max} del apartado I: $r_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3d\sigma}{4\rho g}}$, y $mg = \pi d\sigma$

$$U_{\max} = \sqrt{\frac{d\sigma H}{2\varepsilon_0 \sqrt[3]{\frac{3d\sigma}{4\rho g}}}} = \sqrt{\frac{d\sigma H 4^{\frac{1}{3}} \rho^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{3}}}{2\varepsilon_0 3^{\frac{1}{3}} \sigma^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}}}} = \sqrt[6]{\frac{d^3 \sigma^3 H^3 4\rho g}{8\varepsilon_0^3 \cdot 3 \cdot \sigma d}} = \sqrt[6]{\frac{d^2 \sigma^2 H^3 \rho g}{6\varepsilon_0^3}}$$

Heureka

PROBLEMA 3

Formación de protoestrellas

Un modelo para la formación de estrellas puede ser el siguiente: Una nube esférica de gas interestelar disperso, inicialmente en reposo, comienza a colapsarse debido a su propia gravedad. El radio inicial de la nube esférica es r_0 y su masa m . La temperatura de los alrededores (más dispersa que el gas) y la inicial del gas es uniforme T_0 . El gas se considera ideal, su masa molar promedio μ y su índice adiabático $\gamma > 4/3$. Suponer que

$$\frac{Gm\mu}{r_0} \gg RT_0$$

G constante de gravitación y R constante de los gases.

I.- Durante gran parte del colapso, el gas es transparente de modo que todo el calor generado es inmediatamente radiado al exterior. La bola de gas se encuentra en equilibrio termodinámico con los alrededores.

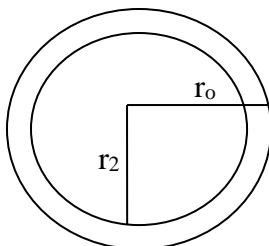
Si el radio de la bola se reduce a la mitad $r_1 = 0,5 r_0$; determinar el valor de n que es la relación entre la presión final y la inicial. Se supone que la densidad del gas permanece uniforme.

Si la bola de gas se considera como un gas ideal y está en equilibrio **térmico** con los alrededores, su ecuación es

$$P_0 V_0 = P_1 V_1 \Rightarrow P_0 \frac{4}{3} \pi r_0^3 = P_1 \frac{4}{3} \pi \left(\frac{1}{2} r_0\right)^3 \Rightarrow P_0 = \frac{P_1}{8}:$$

II.- Estimar el tiempo necesario para que el radio de la nube de gas sea $r_2 = 0,95 r_0$. Despreciar el cambio del campo gravitatorio de una partícula de gas que cae.

Una masa del gas se colapsa debido a la gravedad creada por el resto de la masa de gas. Además la presión del gas se considera pequeña y por tanto no se opone al colapso, por lo que éste puede considerarse como una caída libre en el campo gravitatorio del resto de la bola del gas.



La masa que crea el campo gravitatorio es la abarcada por la esfera de radio r_2 . Si admitimos una distribución homogénea de la masa, tendremos que la densidad de la bola es:

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

La masa de la esfera que crea el campo es:

$$m' = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \cdot \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} = m \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^3$$

La intensidad del campo gravitatorio creado por la masa m' es:

$$g = G \frac{m'}{r_2^2} = \frac{Gm}{r_2^2} \left(\frac{r_2}{r_0}\right)^3 = Gm \frac{r_2}{r_0^3}$$

El colapso de la masa es una caída libre en el campo gravitatorio g , por tanto:

$$r_0 - r_2 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(r_0 - r_2)}{g}} = \sqrt{\frac{2(r_0 - r_2)}{Gm \frac{r_2}{r_0^3}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,05 r_0}{Gm \frac{0,95 r_0}{r_0^3}}} = \sqrt{\frac{0,105 \cdot r_0^3}{Gm}}$$

III.- Suponiendo que la presión es despreciable encontrar el tiempo $t_{r \rightarrow 0}$ empleado por la bola para colapsarse desde el radio inicial r_0 hasta un radio mucho más pequeño, utilizando las leyes de Kepler.

Consideramos una distribución esférica de materia que está inicialmente en reposo siendo su masa M y su radio r_0 . Cuando $t=0$, la masa esférica comienza a colapsarse debido a la acción de su propia gravedad, permaneciendo la distribución esférica y homogénea durante el colapso.

Supongamos una pequeña porción de masa que designamos con μ y que se distribuye por la superficie de la masa M , siendo $\mu \ll M$, formando una capa. Inicialmente la energía potencial de dicha masa es: $-G \frac{M\mu}{r_0}$; valor que le proporciona la energía

mecánica, que va a permanecer constante durante el colapso. Cuando esta masa se colapsa adquiere energía cinética y tiene energía potencial; y la masa inicial al colapsar, tiene un radio variable que designamos con r . Aplicamos el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM\mu}{r} = -G \frac{M\mu}{r_0} \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Como la velocidad es negativa ya que el radio disminuye, consideramos el signo negativo en la anterior ecuación

$$\int dt = - \int_{r_0}^0 \frac{dr}{\sqrt{GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)}}$$

Para resolver la integral anterior, en los libros de matemáticas se encuentra el siguiente cambio de variable:

$$r = r_0 \sin^2 \theta \Rightarrow dr = 2 r_0 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

Cuando $t = 0$ es $r = r_0$ lo que implica que $\sin^2 \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Cuando $r = 0$, que es el tiempo del colapso, $\sin^2 \theta = 0, \Rightarrow \theta = 0$

$$\begin{aligned} t &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2 r_0 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{GM \left[\frac{1}{r_0 \sin^2 \theta} - \frac{1}{r_0} \right]}} = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2 r_0 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{GM r_0 \left[\frac{1 - \sin^2 \theta}{r_0 \sin^2 \theta} \right]}} = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2 r_0 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{GM r_0} \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2 r_0 \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{GM r_0}} = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{2 r_0 \sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{GM r_0}} = - \frac{2 r_0}{\sqrt{GM r_0}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

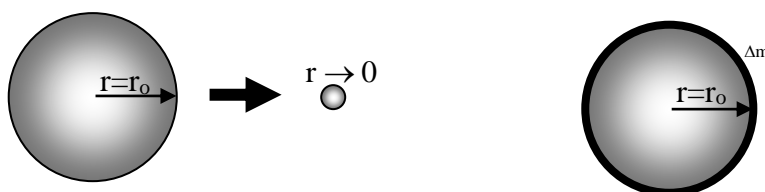
En las tablas de integrales matemáticas se encuentra que:

$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin 2ax$. Aplicamos esta relación a la integral anterior:

$$\begin{aligned} t &= - \frac{2 r_0}{\sqrt{GM r_0}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta d\theta = - \frac{2 r_0}{\sqrt{GM r_0}} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = - \frac{2 r_0}{\sqrt{GM r_0}} \left[\frac{0}{2} - \frac{1}{4} \sin 0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi \right] = \frac{2 r_0 \frac{\pi}{4}}{\sqrt{GM r_0}} = \frac{\pi}{2} \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}} \end{aligned}$$

Desde el punto de vista de las leyes de Kepler

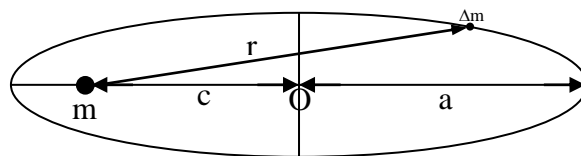
Inicialmente la bola tiene de masa M y radio $r = r_0$ y al colapsar $r \rightarrow 0$. Vamos a suponer a la masa concentrada en el c.d.m de la bola y a un elemento de masa Δm situado a una distancia r_0 del c.d.m.



Consideremos ahora las leyes de Kepler:

1ª) Los planetas giran alrededor del Sol, en órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos. Aquí podríamos hacer un símil, en el que en lugar del Sol consideramos a una masa m , situada en el foco de la elipse y la masa del planeta, la del elemento Δm situada inicialmente a la distancia r_0 del foco.

2ª) El radio vector que va del Sol al planeta, barre áreas iguales en tiempos iguales.



La excentricidad de la elipse $\varepsilon = \frac{c}{a}$ y el tiempo que emplea el planeta en dar una vuelta completa a la órbita es el periodo T .

Ahora bien, en este caso al colapsar Δm cae sobre m , de modo que en ese momento $r \rightarrow 0$ y el foco de la elipse tiene que pasar por el extremo de la trayectoria elíptica y entonces el parámetro $c = a$. La excentricidad de la elipse en estas condiciones sería $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{a}{a} = 1$ y la elipse degenera en una recta, y la longitud del segmento es igual a la distancia entre los dos focos.

Como además en nuestro modelo esférico, la mayor distancia de Δm al c.d.m. no puede ser mayor que r_0 debería suceder en el símil, que el otro foco de la elipse, estaría a $r = r_0$ del foco que tiene la masa m de modo que el semieje mayor de la elipse sería la mitad de la distancia entre los focos (en este caso también vértices) resulta $a = \frac{r_0}{2}$.

En cuanto al tiempo t_c transcurrido en colapsar toda la masa gaseosa de radio r_0 ; sería el mismo que tardaría en llegar el planeta imaginario Δm , desde un foco (un vértice) hasta el otro, donde ya queda incorporado Δm a la masa m . Coincide en nuestro símil, con la mitad del periodo del planeta, $t_c = \frac{T}{2}$

3ª) Esta ley dice: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

Sustituyendo $a = \frac{r_0}{2}$ y $T = 2t_c$ Resulta:

$$\frac{\left(\frac{r_0}{2}\right)^3}{(2t_c)^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{r_0^3}{8t_c^2} = \frac{GM}{\pi^2} \Rightarrow t_c = \pi \sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}}$$

IV.- Para un radio r_3 siendo $r_3 \ll r_0$, el gas se hace lo suficientemente denso para que sea opaco a la radiación. Calcular la cantidad de calor Q radiado hacia fuera durante el colapso de r_0 a r_3 .

Dado que desde que la bola tiene un radio r_0 hasta que se reduce a r_3 , el calor se evacua al exterior, la transformación es isoterma, se realiza a la temperatura T_0 . Para un radio menor a r_3 el gas sufre una transformación adiabática ya que no manda calor al exterior.

$$W = -\int p dV = -\int_{V_0}^{V_3} \frac{mR T_0}{\mu} \frac{dV}{V} = \frac{mR T_0}{\mu} \ln \frac{V_0}{V_3} = \frac{mR T_0}{\mu} \ln \left(\frac{r_0}{r_3} \right)^3$$

V.- Para radios más pequeños que r_3 se puede despreciar las pérdidas de calor por radiación. Determinar cómo la temperatura T de la bola depende de su radio para $r < r_3$.

Teniendo en cuenta que no hay calor hacia el exterior ya que se desprecia el calor evacuado por radiación, la transformación de la bola es adiabática.

Aplicamos la ecuación de la adiabática desde el radio de la bola r_3 (que está a la temperatura T_0) hasta el radio r en que la bola está a la temperatura T .

$$T_0 \left(\frac{4}{3} \pi r_0^3 \right)^{\gamma-1} = T \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)^{\gamma-1} \Rightarrow T_0 r_0^{3\gamma-3} = T r^{3\gamma-3} \Rightarrow T = T_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{3\gamma-3}$$

VI.- Al fin y al cabo no podemos despreciar el efecto de la presión en la dinámica del gas y el colapso del mismo se detiene para un valor $r = r_4$ (siendo $r_4 \ll r_3$). No obstante, las perdidas por radiación todavía pueden considerarse despreciables y la temperatura no es lo suficientemente alta para iniciar las reacciones nucleares de fusión. La presión de una protoestrella como esta no es uniforme, pero es posible hacer estimaciones que aun pueden valer con los datos numéricos anteriores. Estimar el radio final r_4 y la temperatura T_4 .

Según el teorema del virial: la energía cinética media de la bola con radio r_4 es igual a la mitad de la energía potencial con signo menos, y esto es válido cuando las partículas están ligadas por una atracción que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Este teorema hay que entenderlo como que en la bola existe un estado estacionario que es cierto en sentido medio, esto es, no ocurren grandes cambios, pero no es un equilibrio estático en el que no existe movimiento.

Calculamos en primer lugar la energía potencial de la bola.

La energía potencial entre dos partículas (m_1 y m_2) que distan entre sí una distancia r y que se atraen con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es:

$$U = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Si consideramos que m_1 es una esfera de radio r y densidad constante ρ y que m_2 es una capa esférica de radio dr , resulta:

$$m_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \quad ; \quad dm_1 = 4\pi r^2 \rho dr \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow U &= - \int_0^{r_4} G \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho \cdot 4\pi r^2 \rho dr}{r} = - \frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 \int_0^{r_4} r^4 dr = - \frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 \frac{r_4^5}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow - \frac{16}{15} G \frac{(\pi \rho r_4^3)^2}{r_4} = - \frac{16}{15} G \frac{\left(\frac{4}{3} \pi \rho r_4^3\right)^2}{r_4} \cdot \frac{9}{16} = - \frac{3}{5} \frac{G m^2}{r_4} \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta el principio de equipartición de la energía, resulta que la energía de un mol gas es: $\frac{3}{2} RT_4$, siendo T_4 la temperatura promedio de la bola de gas de radio r_4 . La masa de la bola es m y la masa molar media de los gases μ , por tanto, el número de moles es: $\frac{m}{\mu}$

Según el teorema del virial podemos escribir:

$$\frac{3}{10} \frac{G m^2}{r_4} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{3}{2} RT_4 \Rightarrow \frac{2}{10} \frac{G m}{r_4} = \frac{R T_4}{\mu} \Rightarrow r_4 = \frac{2 G m \mu}{10 R T_4}$$

De acuerdo con el enunciado y el resultado del apartado V.

$$T_4 = T_0 \left(\frac{r_3}{r_4} \right)^{3\gamma-3}$$

Combinando las dos ecuaciones:

$$T_4 = T_0 \left(\frac{r_3 \cdot 10 R T_4}{2 G m \mu} \right)^{3\gamma-3} \Rightarrow \frac{T_4}{T_4^{3\gamma-3}} = T_0 \left(\frac{10 r_3 R}{2 G m \mu} \right)^{3\gamma-3} \Rightarrow T_4^{4-3\gamma} = T_0 \left(\frac{10 r_3 R}{2 G m \mu} \right)^{3\gamma-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_4 = T_0^{\frac{1}{4-3\gamma}} \left(\frac{10 r_3 R}{2 G m \mu} \right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}} \Rightarrow T_4 = \frac{T_0^{\frac{1}{4-3\gamma}} \left(\frac{10 r_3 R T_0}{2 G m \mu} \right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}}{T_0^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}} \Rightarrow T_4 = T_0 \left(\frac{5 r_3 R T_0}{G m \mu} \right)^{\frac{3\gamma-3}{4-3\gamma}}$$