

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez
Ricardo David Fernández Cruz

Madrid 2013

XLIV.- OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. DINAMARCA.
2013

PROBLEMA 1

INTRODUCCIÓN

Un meteoróide es una partícula pequeña (en general inferior a 1 m) procedente de un cometa o de un asteroide. Un meteoróide que impacta en la Tierra se denomina meteorito.

En la noche del 17 de Enero de 2009 numerosas personas, situadas cerca del mar Báltico, observaron una estela ardiente o bola de fuego de un meteoróide cayendo a través de la atmósfera terrestre. En Suecia una cámara de vigilancia registró este suceso en un video (ver figura 1.1 a). A partir de estas imágenes y de los testimonios de los testigos fue posible acotar el área de impacto y seis semanas después se encontró, en las proximidades de la ciudad de Maribo (en el sur de Dinamarca) un meteorito con una masa de 0,025 kg . Las mediciones realizadas en el meteorito, hoy denominado de Maribo, y su trayectoria durante la entrada en la atmósfera dan lugar a resultados interesantes. Su velocidad de entrada en la atmósfera terrestre fue excepcionalmente alta y su edad $4,567 \cdot 10^9$ años, indica que se formó poco después del nacimiento del sistema solar. El meteorito Maribo quizás proceda del cometa Encke.

LA VELOCIDAD DE MARIBO.

La bola de fuego se desplazó en dirección Oeste, 285° respecto al Norte, dirigiéndose hacia la localidad donde posteriormente fue encontrado.

Un esquema de la trayectoria del meteoróide se muestra en la figura 1.1. El meteorito se encontró a una distancia de 195 km de la cámara de vigilancia en la dirección 230° respecto al norte.

1.1.- Utilice este dato y los de la figura 1.1 para calcular la velocidad media de Maribo, entre los intervalos de tiempos correspondientes a los fotogramas 155 y 161. No considere ni la curvatura de la Tierra ni la fuerza de la gravedad sobre el meteorito.

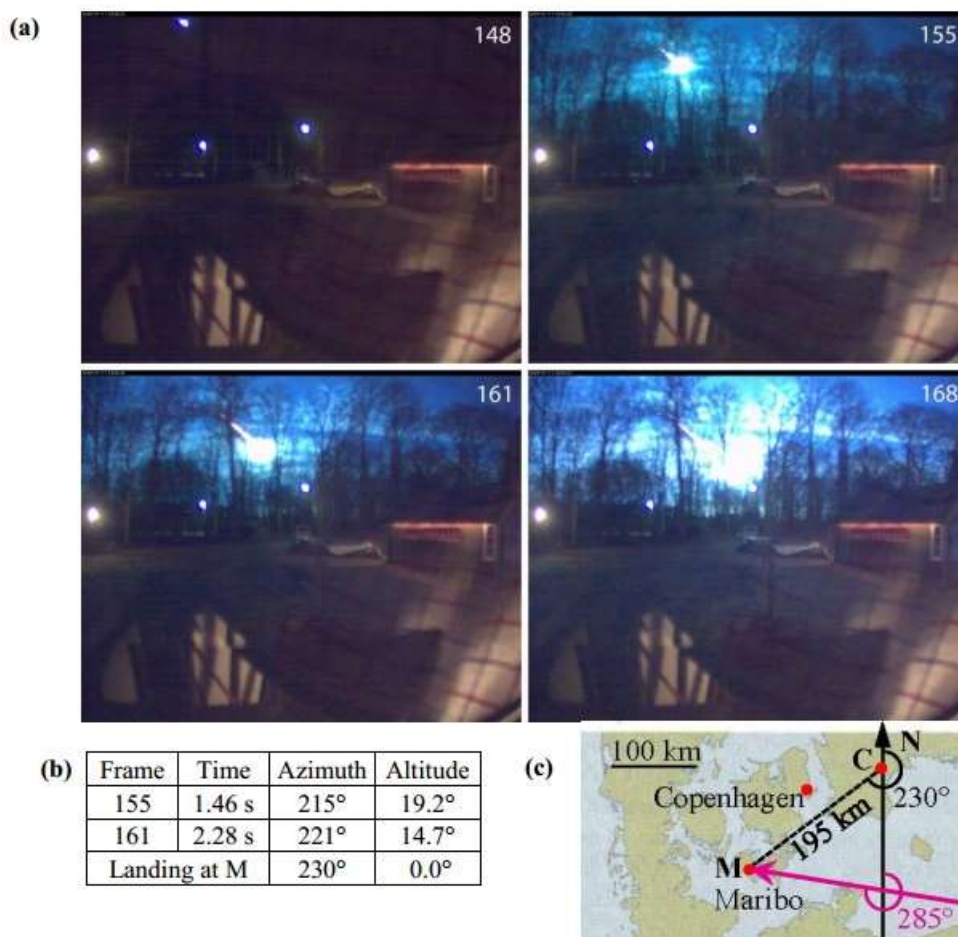


Fig 1,1

b)

Fotograma	Tiempo	Azimut	Altitud
155	1,46 s	215°	19,2°
161	2,28 s	221°	14,7°
Maribo en tierra, M		230°	0,0°

a) *Figura 1.1(a).*- Azimut es la posición angular en el sentido de las agujas de un reloj contado desde el Norte en un plano horizontal y altitud es la posición angular por encima del horizonte. Una serie de fotogramas registrados por la cámara

de vigilancia en Suecia, muestran el desplazamiento de Maribo como una bola de fuego en su recorrido por la atmósfera b) Los datos correspondientes a los dos fotogramas indican el tiempo, la dirección (azimut) en grados, vistos por la cámara C, y la altura por encima del horizonte (altitud) en grados

c) Esquema de la dirección de Maribo relativa al Norte N (flecha magenta) y su posición en tierra M en Dinamarca visto por la cámara C.

A TRAVÉS DE LA ATMÓSFERA ¿ SE FUNDIRÁ?

La fuerza de rozamiento del meteorioide cuando se desplaza por las capas altas de la atmósfera depende de una manera compleja de su forma, su velocidad y también de la temperatura y densidad de la atmósfera.

Con una aproximación razonable, la fuerza de rozamiento en la parte superior de la atmósfera puede expresarse mediante la ecuación $F = k \rho_{atm} A v^2$, en la que k es una constante, ρ_{atm} es la densidad de la atmósfera, A , la sección del meteorito y v su velocidad.

Las siguientes simplificaciones se utilizan para analizar el meteorioide: La masa al entrar en la atmósfera $M_N = 30$ kg, Radio $R_M = 0,13$ m, temperatura $T_0 = 200$ K, $v_M = 2,91 \cdot 10^4$ m/s. La densidad de la atmósfera se considera constante, siendo su valor a 40 km por encima de la superficie terrestre, $\rho_{atm} = 4,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. El coeficiente de fricción $k = 0,60$.

1.2a.- Estime cuánto tiempo transcurre desde su entrada en la atmósfera para que su velocidad se reduzca un 10%, desde v_M a $v_M = 0,90 v_M$. No tenga en cuenta la fuerza de la gravedad y suponga que su masa y su forma no se ven alteradas.

1.2b.- Calcule cuántas veces es mayor su energía cinética E_{kin} al entrar en la atmósfera que su energía E_{melt} necesaria para fundirlo completamente.

Datos: Calor específico, $c_{sm}=1,2 \cdot 10^3 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Temperatura de fusión $T_{sm}=1,7 \cdot 10^3 \text{ K}$

Calor latente de fusión $L_{sm}=2,6 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$

CALENTAMIENTO DE MARIBO EN SU RECORRIDO POR LA ATMÓSFERA

Cuando Maribo penetró en la atmósfera terrestre, a velocidad supersónica, aparece como una bola de fuego debido a que el aire que lo rodea estaba incandescente. No obstante, solamente la parte exterior se calentaba. Se puede suponer a efectos del cálculo que Maribo es una esfera homogénea de densidad $\rho_{sm}=3,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, calor específico $c_{sm}=1,2 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, y conductividad térmica $k_{sm}=2,0 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Su temperatura al penetrar en la atmósfera fue $T_0=200 \text{ K}$ y durante el tiempo de caída en la atmósfera su temperatura superficial fue constante $T_s=1000 \text{ K}$ debido a su fricción con el aire y lo que se calentaba gradualmente era su interior..

Después de un tiempo de caída t en la atmósfera, la capa más externa de Maribo de espesor x se ha calentó a una temperatura notablemente mayor que T_0 . Este espesor se puede estimar, aplicando el análisis dimensional, como producto de potencias de los parámetros termodinámicos $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$

1.3a.-Determinar mediante el análisis dimensional los valores de las cuatro potencias , $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. 1.3b.- Calcular el espesor x después de una caída de $t = 5 \text{ s}$ y determinar el cociente x/R_M .

LA EDAD DEL METORITO

Las propiedades químicas de los elementos radiactivos pueden ser distintas. Así en el proceso de cristalización de los minerales de un meteorito, algunos de estos minerales poseerán una concentración alta de un elemento radiactivo y otros baja. Esta diferencia puede servir para determinar su edad mediante la datación radiactiva de sus minerales.

Como ejemplo específico, estudiamos el isótopo ^{87}Rb (elemento número 37) el cual decae en el isótopo estable ^{87}Sr (elemento número 38) con una vida media $T_{1/2} = 4,9 \cdot 10^{10}$ años, relativo al isótopo estable ^{86}Sr . En

el momento de la cristalización el cociente $\frac{^{87}\text{S}_r}{^{86}\text{S}_r}$ era el mismo para

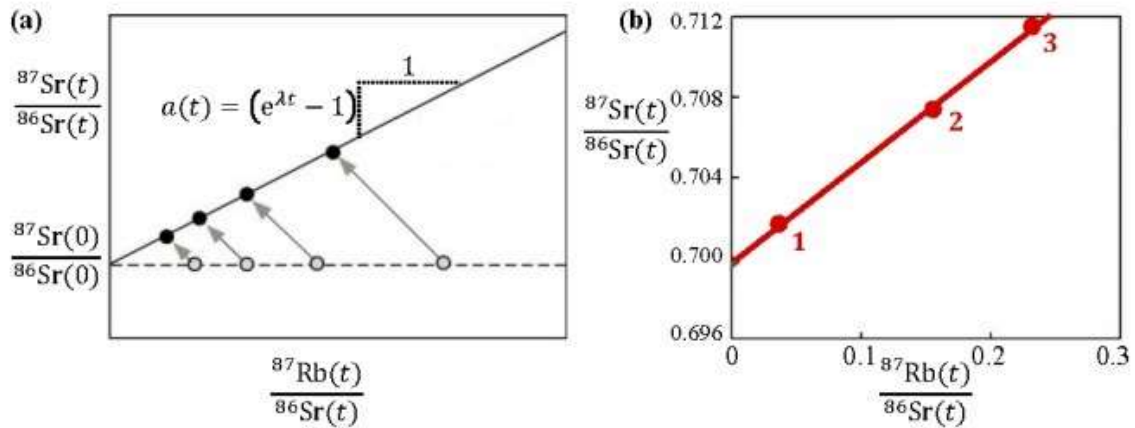
todos los minerales, pero no así el cociente $\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{S}_r}$. A medida que

transcurre el tiempo la cantidad de ^{87}Rb disminuye y como consecuencia aumenta la cantidad de ^{87}Sr . El resultado es que el

cociente $\frac{^{87}\text{S}_r}{^{86}\text{S}_r}$ es diferente hoy día. En la figura 1.2 (a), los puntos

situados en la línea horizontal indican el cociente $\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{S}_r}$ de diferentes

minerales cristalizados en función del tiempo.



a) *Figura 1.2(a).- El cociente $\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}$ en diferentes minerales en el tiempo $t=0$ de la cristalización (círculos vsin relleno) y en el tiempo actual (círculos con relleno) (b). La línea isocrónica para tres muestras tomadas de minerales diferentes de un meteorito en el tiempo actual.*

1.4a.-Escribir el esquema del decaimiento para la transformación de $^{87}_{37}\text{Rb}$ a $^{87}_{38}\text{Sr}$:

1.4b Mostrar que en el tiempo presente la razón $\frac{^{87}\text{Sr}}{^{86}\text{Sr}}$ dibujada frente al tiempo actual $\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{Sr}}$, en diferentes muestras de mineral del mismo meteorito, es una línea recta con pendiente $\alpha(t) = e^{\lambda t} - 1$. Donde t es el tiempo que ha transcurrido desde la formación de los minerales y λ es la constante de desintegración radiactiva inversa de la vida media $T_{1/2}$:

1.4c.- Determinar la edad τ_M del meteorito utilizando la línea isocrónica de la figura 1.2(b).

EL COMETA ENCKE DEL QUE PUEDE PROCEDER MARIBO

En su órbita alrededor del Sol, las distancias mínima y máxima entre el cometa Encke y el Sol son respectivamente:

$$a_{\min}=4,95 \cdot 10^{10} \text{ y } a_{\max}=6,16 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Datos. $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$; Masa del Sol , $m_s=1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

1.5.- Calcular el periodo orbital t_{Encke} del cometa Encke

CONSECUENCIAS DEL CHOQUE DE UN ASTEROIDE CON LA TIERRA.

Hace 65 millones de años chocó contra la Tierra un enorme asteroide de densidad $\rho_{\text{ast}}=3,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, radio $R_{\text{ast}}=5,0 \text{ km}$ y con velocidad final $v_{\text{ast}}=2,5 \cdot 10^4 \text{ m/s}$. El impacto resultante dio lugar a la extinción de gran cantidad de especies y la formación de un enorme cráter llamado Cráter de Chicxulub.

Suponer que hoy día ocurriese un choque elástico contra la Tierra de un asteroide similar al anterior y utilizar el hecho de que la Tierra tiene, un momento de inercia 0,83 veces del de una esfera homogénea de la misma masa y radio. El momento de inercia de una esfera homogénea es $(2/5) M R^2$. No considere ningún cambio en la órbita de la Tierra.

1.6a.- Si el asteroide choca en el Polo Norte, encontrar el cambio máximo en la orientación del eje de la Tierra después del impacto.

Datos. Masa de la Tierra , $m_E=5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; Radio de la Tierra, $R_E=6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$

1.6b.- Si el asteroide golpea de forma radial en el Ecuador, calcular el cambio $\Delta \tau_{\text{vrt}}$ en la duración de una revolución de la Tierra después del impacto.

1.6c.- Si el asteroide golpea de forma tangencial en el plano ecuatorial, calcular el cambio $\Delta\tau_{\text{tan}}$ en la duración de una revolución de la Tierra después del impacto.

LA VELOCIDAD MÁXIMA DE UN CHOQUE

Considerar un cuerpo celeste, en el límite del sistema solar, el cual choca contra la Tierra con una velocidad v_{imp} . Inicialmente el efecto del campo gravitatorio de la Tierra y del cuerpo se pueden despreciar. Ignore la fricción con la atmósfera, la influencia de otros cuerpos y la rotación de la Tierra.

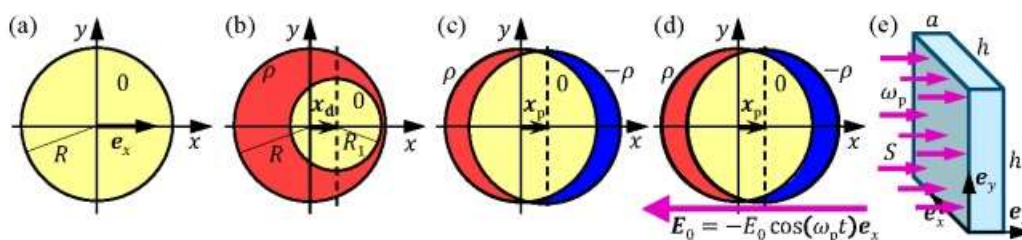
Datos. Masa del Sol, $m_S=1,99 \cdot 10^{30}$ kg ; Distancia media Sol-Tierra, $a_E=1,50 \cdot 10^{11}$ m

1.7.- Calcular $v_{\text{imp}}^{\text{max}}$ que es el valor mayor posible de la v_{imp}

PROBLEMA 2

INTRODUCCIÓN

En este problema se estudia un proceso eficaz de producción de vapor cuyo funcionamiento empírico ha sido demostrado. Una disolución acuosa de esferas de plata de tamaño del orden de los nanómetros (nanopartículas) con 10^{13} partículas por litro se ilumina con un haz direccional de luz. Una fracción de la luz la absorben las nanopartículas las cuales se calientan y generan vapor de forma local alrededor de ellas sin que se caliente el resto de la disolución. El vapor se extrae del sistema en forma de burbujas que abandonan la disolución. El proceso no se conoce en todos sus detalles pero sí su fundamento que es debido a la absorción de luz por medio de un proceso llamado oscilaciones colectivas de los electrones de las nanopartículas metálicas. Este dispositivo se conoce como generación de vapor plasmónico



a) *Figura 2.1.- (a). Una nanopartícula de forma esférica y sin carga de radio R está situada en el centro de un sistema de coordenadas .b) Una esfera con densidad de carga uniforme ρ (rojo) contiene una esfera más pequeña sin carga (O , amarilla) de radio R_1 , con su centro desplazado por $\vec{x}_d = x_d \vec{e}_x$.(c). La esfera con densidad de carga positiva de los iones de plata de la nanopartícula está fija en el centro del sistema de coordenadas . El centro de la región esférica con densidad de carga negativa (azul) de la nube de electrones está desplazada \vec{x}_p , donde $x_p \ll R$. (d). Un campo eléctrico externo homogéneo $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x$. Por la dependencia de E_0 del tiempo la nube de electrones se mueve con velocidad $\vec{v} = \frac{dx_p}{dt} \vec{e}_x$ e) El recipiente rectangular ($h \times h \times a$) contiene la disolución acuosa de las nanopartículas y está iluminada por luz monocromática que se propaga a largo del eje z , siendo su frecuencia angular ω_p y su intensidad S .*

UNA ÚNICA NANOPARTÍCULA DE FORMA ESFÉRICA.

Consideramos una nanopartícula de forma esférica de plata de radio $R=10,0$ nm con su centro fijo en el origen de coordenadas (ver figura 2.1(a)). Todos los movimientos, fuerza y campos son paralelos al eje horizontal x (vector unitario \vec{e}_x). La nanopartícula contiene electrones libres (conducción) que se desplazan dentro de todo su volumen sin que estén alrededor de un átomo concreto de la misma. Cada átomo de plata ha cedido un electrón convirtiéndose en un ión positivo.

2.1.- Encontrar el volumen V y la masa M de la nanopartícula, el número N y densidad de carga ρ de los iones plata en la partícula, y para los electrones libres su concentración n , su carga total Q y su masa total m_0 .

EL CAMPO ELÉCTRICO EN UNA REGIÓN DE CARGA NEUTRA DENTRO DE UNA ESFERA CARGADA.

En el resto del problema se supone que la permitividad relativa de todos los materiales es $\epsilon_r=1$. En el interior de una esfera de radio R con densidad de carga uniforme ρ se crea otra pequeña esfera de carga neutra y radio R_1 por adición de una carga opuesta de densidad $-\rho$ con su centro desplazado $\bar{x}_d = x_d \bar{e}_x$ respecto al centro de la esfera R (ver figura 2.1 (b)).

2.2.- Mostrar que el campo eléctrico dentro de la región de carga neutra es homogéneo de la forma $\bar{E} = A \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \bar{x}_d$ y determinar el factor A .

LA FUERZA RECUPERADORA SOBRE LA NUBE ELECTRÓNICA DESPLAZADA.

En lo que sigue estudiamos el movimiento colectivo de los electrones libres, utilizando un modelo de una única esfera cargada negativamente con densidad de carga homogénea $-\rho$ y con su centro localizado en \bar{x}_p , la cual se desplaza a lo largo del eje x con relación a la esfera positivamente cargada (iones plata) que está localizada en el origen de coordenadas, figura 2.1 (c). Suponga que una fuerza externa \bar{F}_{ext} desplaza la nube electrónica a una nueva posición de equilibrio $\bar{x}_p = x_p \bar{e}_x$ con $x_p \ll R$. Excepto para pequeñas cargas, en el extremo opuesto de la nanopartícula, la mayor parte de su interior permanece neutra.

2.3.- Expresar en términos de \bar{x}_p y n las dos cantidades siguientes: La fuerza de restauración ejercida sobre la nube electrónica y el trabajo realizado sobre la nube electrónica durante el desplazamiento.

LA NANOPARTÍCULA ESFÉRICA DE PLATA EN UN CAMPO ELÉCTRICO EXTERNO CONSTANTE.

Una nanopartícula se coloca en el vacío y se somete a la acción de una fuerza externa, producida por un campo eléctrico homogéneo $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x$ el cual desplaza la nube de electrones una pequeña distancia x_p siendo $x_p \ll R$.

2.4.- Encontrar el desplazamiento x_p de la nube electrónica en función de E_0 y n y determinar la cantidad $-\Delta Q$ de carga electrónica desplazada a través del plano y - z en el centro de la nanopartícula en función de n , R y x_p .

LA CAPACIDAD EQUIVALENTE E INDUCTANCIA DE LA NANOPARTÍCULA DE PLATA.

Para un campo \vec{E}_0 , tanto si varía con el tiempo como si no, es posible crear un modelo para la nanopartícula, equivalente a un circuito eléctrico. La capacidad equivalente se puede obtener relacionando el trabajo W_{el} necesario para la separación de las cargas ΔQ con la energía de un condensador portando cargas $\pm \Delta Q$. La separación de cargas ocasionará un voltaje V_0 en el condensador equivalente.

Dato: $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$

2.5a.- Expresar la capacidad equivalente del sistema C en función de ϵ_0 y R, y determinar su valor.

2.5b.- Para la capacidad anterior determinar en función de E_0 y R el voltaje equivalente V_0 que debería conectarse al condensador equivalente con la finalidad de acumular la carga ΔQ .

Para un campo \vec{E}_0 dependiente del tiempo, la nube de electrones se desplaza con velocidad $\vec{v} = v \vec{e}_x$, figura 2.1(d) y posee una energía cinética W_{kin} y forma una corriente eléctrica I fluyendo a través del plano y-z. La energía cinética de la nube de electrones puede considerarse como la energía de una bobina equivalente de coeficiente de inducción L portando una corriente I.

2.6a.- Expresar la energía cinética W_{kin} y la intensidad I en función de la velocidad v.

Dato: Masa del electrón, $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; carga del electrón $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

2.6b.- Expresar el coeficiente L en función del radio de R , la carga del electrón e y su masa m_e , la concentración de carga n y determinar su valor.

LA RESONANCIA PLASMÓNICA (PLASMON RESONANCE) DE LA NANOPARTÍCULA DE PLATA

Es posible crear un modelo que explique el desplazamiento de la nube de electrones desde su posición de equilibrio y su vuelta a ella. Dicho modelo es el de un circuito ideal L-C oscilando en resonancia. Este modelo dinámico se conoce con el nombre de resonancia plasmónica (plasmon resonance), el cual se verifica con una frecuencia de resonancia ω_p .

Dato: Velocidad de la luz, $c=2,889 \cdot 10^8$ m/s.

2.7a.- Encuentre una expresión para la frecuencia plasmónica ω_p de la nube de electrones en función de la carga del electrón e , de su masa m_e , de la concentración de carga n y de la permitividad ϵ_0 .

2.7b Calcule ω_p en rad/s y la longitud de onda λ_p en nm de luz en el vacío para una frecuencia angular $\omega = \omega_p$.

LA NANOPARTÍCULA DE PLATA ILUMINADA CON LUZ A LA FRECUENCIA PLASMÓNICA.

En el resto del problema, la nanopartícula está iluminada por luz monocromática de frecuencia angular plasmónica ω_p con una intensidad incidente $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1,00 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$. Teniendo presente que $\lambda_p \ll R$, se

considera que la nanopartícula está situada en un campo armónico homogéneo oscilante $\vec{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \vec{e}_x$. Por la acción de \vec{E}_0 el centro $\bar{x}_p(t)$ de la nube de electrones oscila a la misma frecuencia con

velocidad $\bar{v} = \frac{d\bar{x}_p}{dt}$ y amplitud constante x_0 . Este movimiento oscilatorio

de los electrones conlleva a la absorción de luz. La energía capturada por las nanopartículas se convierte en calor (efecto Joule) o es reemitida en forma de luz dispersa.

El calentamiento por efecto Joule se origina por las colisiones inelásticas al azar en las que cualquier electrón al chocar con un ión plata pierde toda su energía cinética, la cual se convierte en vibraciones del ión plata (calor). El tiempo promedio entre colisiones es $\tau \gg \frac{1}{\omega_p}$, y para la

nanopartícula de plata $\tau = 5,24 \cdot 10^{-15}$ s.

2.8a Encuentre una expresión para la potencia del efecto Joule P_{heat} producido en la nanopartícula, así como el cuadrado medio de la intensidad de la corriente (\bar{i}^2) de dicho efecto, lo que conlleva calcular explícitamente el cuadrado de la velocidad media (\bar{v}^2) de la nube de electrones.

2.8b Suponiendo que es posible modelizar el comportamiento del efecto Joule de una nanopartícula como una resistencia óhmica que disipa una potencia P_{heat} , calcule el valor de R_{heat} .

La potencia del haz de la luz incidente P_{scat} disminuye a lo largo del tiempo por dispersión de la nube oscilante de electrones (re-emisión). P_{scat} depende de la amplitud de la fuente dispersante x_0 , de la carga Q , de la frecuencia angular ω_p y de las propiedades de la luz, su velocidad c y la permitividad ϵ_0 en el vacío. P_{scat} se puede expresar en función de estas cuatro variables con la siguiente fórmula.

$$P_{scat} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3}$$

2.9a Utilizando la ecuación anterior, encuentre una expresión para la resistencia de dispersión R_{scat} (análoga a R_{heat}) en un modelo de resistencia equivalente, y calcule su valor numérico.

Un modelo para el circuito equivalente anteriormente mencionado es una combinación en serie LCR, la cual está sometida a la acción de un voltaje armónico oscilante $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ determinado por un campo eléctrico \vec{E}_0 de la luz incidente.

2.10a Obtenga las ecuaciones para las potencias promedio P_{heat} y P_{scat} en las que intervenga la amplitud E_0 del campo eléctrico de la luz incidente y la resonancia plasmónica $\omega = \omega_p$

2.10b Calcule los valores numéricos de E_0 , P_{heat} y P_{scat} .

PRODUCCIÓN DE VAPOR POR ACCIÓN DE LA LUZ.

Se prepara una disolución de nanopartículas de plata con una concentración $n_{np} = 7,3 \cdot 10^{15} \frac{\text{partículas}}{\text{m}^3}$, la cual se coloca dentro de un recipiente transparente de forma rectangular y tamaño $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1,0 \text{ cm}^3$, que se ilumina con luz de frecuencia plasmónica de intensidad $S = 1,00 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$ e incidencia perpendicular al recipiente (ver la figura 2.1(e)). La temperatura del agua es $T_{wa} = 20^\circ \text{C}$ y suponemos, basándonos en las observaciones, que en el estado estacionario todo el calentamiento por efecto Joule sobre la nanopartícula da lugar a la producción de vapor de agua a la temperatura de $T_{st} = 110^\circ \text{C}$ sin que aumente la temperatura del agua.

La eficiencia termodinámica η del generador de vapor plasmónico se define por el cociente $\eta = \frac{P_{st}}{P_{tot}}$, donde P_{st} es la potencia dedicada a la producción de vapor y P_{tot} es la potencia total de la luz que penetra en el recipiente.

La mayor parte del tiempo las nanopartículas se encuentran rodeadas de vapor en vez de agua por lo que se puede suponer que se encuentran rodeadas de vacío.

2.11a Calcule la masa por segundo μ_{st} de vapor de agua producido por el generador plasmónico durante la iluminación por luz de intensidad S a la frecuencia plasmónica.

Datos: Calor específico del agua líquida, $c_{wa}=4,181 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Calor específico del agua vapor, $c_{st}=2,080 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Calor latente de vaporización del agua, $L_{wa}=2,260 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$

2.11 b Calcule el valor numérico de la eficacia termodinámica η del generador de vapor

PROBLEMA 3

INTRODUCCIÓN

Este problema está relacionado con la capa de hielo de Groenlandia, el segundo glaciar más grande del mundo. (figura 3.1 a). De forma ideal Groenlandia se puede modelizar como una isla de forma rectangular de ancho $2L$ y longitud $5L$, estando la tierra al nivel del mar y cubierta completamente por una capa incompresible de hielo de densidad ρ_{ice} (figura 3.1b). El perfil en altura $H(x)$ de la capa de hielo es independiente de la coordenada y , y aumenta desde cero en la costa $x = \pm L$ hasta H_m a lo largo del eje medio norte-sur (eje y) conocido como eje separación, ver figura 3.1 c.

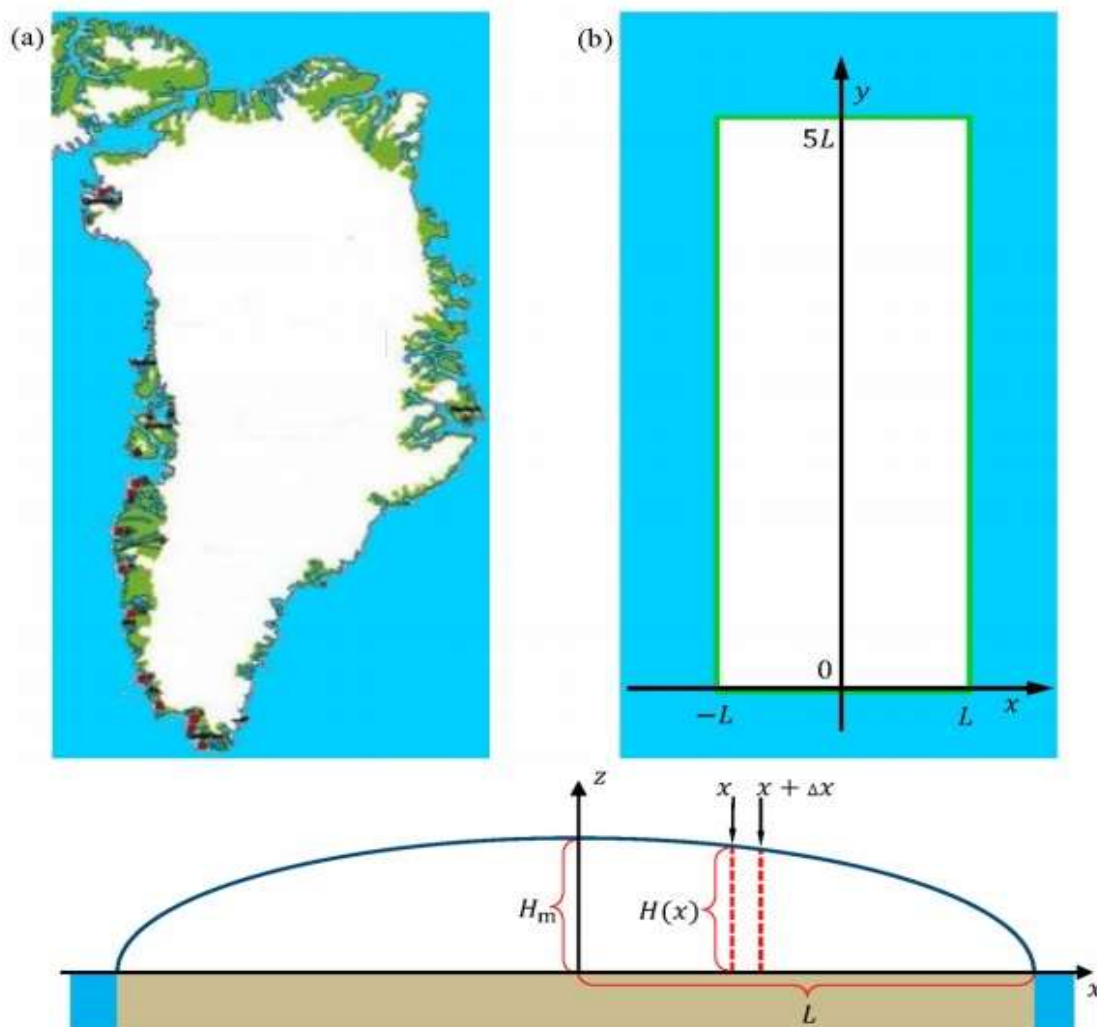


Figura 3.1(a).- Se muestra un mapa de Groenlandia en la que la capa de hielo aparece en blanco, las regiones libres de hielo (regiones costeras) en verde y toda la isla rodeada por el mar en azul. **(b).** Un modelo elemental de la capa de hielo de Groenlandia es un rectángulo situado en el plano x - y con dimensiones $5L$ y $2L$. La línea separación del hielo es la de máxima altura H_m , la cual está situada a lo largo del eje y . **(c).** Un corte vertical (plano x - z) a través de la capa de hielo muestra el perfil de su altura $H(x)$ (línea azul). $H(x)$ es independiente de la coordenada y y para $0 < y < 5L$ mientras que cae abruptamente hasta el valor cero cuando $y=0$ e $y = 5L$.. El eje z indica la posición de la línea de separación del hielo..

Para mayor claridad las dimensiones en sentido vertical están aumentadas respecto de las horizontales. La densidad ρ_{ice} es constante.

Ayuda. Estas dos fórmulas pueden ser de ayuda en este problema.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3} \quad ; \quad (1+x)^a = 1+ax, \text{ para } |ax| \ll 1$$

EL PERFIL DE ALTURA DE LA CAPA DE HIELO.

Con escalas de tiempo pequeñas es posible considerar el glaciar como sistema hidrostático incompresible, que tiene un perfil de altura determinado por la función $H(x)$.

3.1 Escriba una expresión para la presión $p(x,z)$ dentro de la capa de hielo, en función de la altura vertical z por encima de la tierra y a una distancia x de la línea de separación . Desestimar el efecto de la presión atmosférica.

Considere un trozo (rebanada) vertical de la capa de hielo que se encuentra en equilibrio abarcando un área $\Delta x \Delta y$ entre x y $x+\Delta x$, ver la línea de puntos de la figura 3.1 (c). El tamaño de Δy no tiene influencia en la cuestión.

La componente resultante horizontal ΔF de los dos lados verticales de la rebanada, que es originada por la diferencia de alturas, está contrarrestada por una fuerza de rozamiento $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$ de la tierra sobre la base $\Delta x \Delta y$, siendo $S_b = 100$ kPa.

3.2a Para un determinado valor de x mostrar que en el límite

$$\Delta x \rightarrow 0 ; S_b = kH \frac{dH}{dx} \text{ y determinar } k.$$

Datos: Densidad del hielo $\rho_{ice}=0,917 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; aceleración de la gravedad , $g=9,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

3.2b Obtenga una expresión para la función que determina la altura del glaciar $H(x)$ en función de ρ_{ice} , g , L , S_b y la distancia x al eje separación . El resultado indicará que la máxima altura del glaciar H_m es proporcional a

$$H_m \propto L^{\frac{1}{2}}$$

3.2c Determine el exponente γ de proporcionalidad entre el volumen de la

capa de hielo V_{ice} y el área A de la superficie rectangular $V_{ice} \propto A^\gamma$

UNA CAPA DE HIELO DINÁMICA

Para una escala de tiempos grande, el hielo se comporta como un fluido viscoso incompresible, el cual por acción de la gravedad fluye desde el centro hasta la costa. En este modelo, el hielo mantiene constante la función $H(x)$ que determina su altura, ya que la acumulación de nieve de precipitación en la región central se equilibra con la que se funde en la costa. En resumen la geometría de la capa de hielo es la de la figura 3.1(b) y (c) sigue las siguientes suposiciones:

- 1) *El hielo fluye en el plano x - z desde el eje separación (eje y)*
- 2) *La tasa de acumulación c (m/año) en la región central es constante*
- 3) *El hielo solamente abandona el glaciar cuando se funde en la costa $x = \pm L$.*
- 4) *La componente horizontal de la velocidad $v_x(x) = dx/dt$ con que fluye el hielo es independiente de z .*
- 5) *La componente vertical $v_z(z) = dz/dt$ con que fluye el hielo es independiente de x .*

Considerar únicamente la región central $|x| \ll L$, próxima al medio de la capa de hielo, en donde las variaciones de altura de la capa de hielo son muy pequeñas y se pueden despreciar totalmente, es decir, $H(x) \approx H_m$.

3.3 Utilice la conservación de la masa para encontrar una expresión de la velocidad de flujo horizontal $v_x(x)$ en función de c , x y H_m .

Al suponer que el hielo es incompresible (o lo que es lo mismo que su densidad es constante), se deduce que la conservación de la masa implica la siguiente restricción en las componentes de la velocidad del flujo de hielo.

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0$$

3.4 Escriba una expresión de la dependencia de z de la velocidad $v_z(z)$

Una pequeña partícula de hielo situada en la superficie del glaciar, en la posición inicial (x_i, H_m) , se desplazará, a medida que el tiempo transcurre, a lo largo de una trayectoria $z(x)$ en el plano vertical xz .

3.5 Obtenga una expresión para la citada trayectoria de flujo $z(x)$.

INDICADORES DE LA EDAD Y CLIMA DE LA CAPA DE HIELO DINÁMICA.

Basándose en las componentes de la velocidad $v_x(x)$ y $v_z(z)$ se puede estimar la edad $\tau(z)$ del hielo para una determinada profundidad $H_m - z$ respecto de la superficie de la capa de hielo.

3.6 Obtenga una expresión para la edad $t(z)$ en función de la altura z por encima de la tierra justamente en el eje de separación $x=0$.

(7)

Si se analiza un testigo de hielo que se ha extraído por una perforadora del interior de la capa de hielo de Groenlandia puede revelar cambios climáticos ocurridos en el pasado. Uno de los mejores indicadores es $\delta^{18}\text{O}$ definido por la relación:

$$\delta^{18}\text{O} = \frac{R_{ice} - R_{ref}}{R_{ref}}$$

Donde $R = \frac{^{18}\text{O}}{^{16}\text{O}}$ indica la relativa abundancia de los dos isótopos del oxígeno. La referencia R_{ref} se basa en la composición isotópica de los océanos en las proximidades del Ecuador.

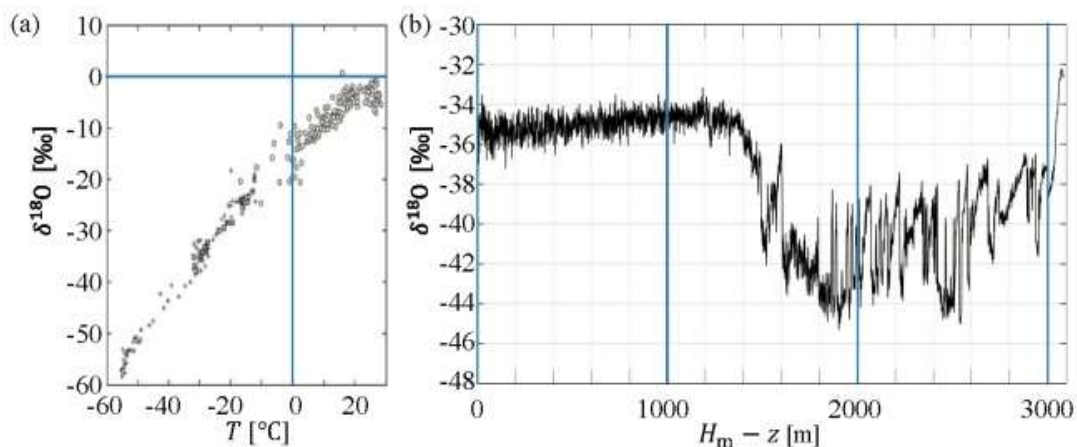


Figura 3.2(a).- *Relación observada entre $\delta^{18}\text{O}$ en la nieve frente a la temperatura media anual T . b) Medidas de $\delta^{18}\text{O}$ frente a la profundidad H_m-z obtenidas de muestras de hielo extraídas entre la superficie y la roca (tierra firme) en un lugar determinado del hielo de Groenlandia, donde $H_m=3060\text{m}$.*

Las observaciones sobre el hielo de Groenlandia indican que $\delta^{18}\text{O}$ en la nieve varía aproximadamente de forma lineal con la temperatura (fig.3.2 a) Admitiendo que esto siempre haya sido así, $\delta^{18}\text{O}$, medido en el testigo de hielo extraído a una profundidad H_m-z , nos permite estimar la temperatura T en las proximidades de Groenlandia en el tiempo $\tau(z)$.

Medidas realizadas a lo largo de los 3060 m de espesor en el hielo de Groenlandia indican que existe un cambio brusco de temperatura a la profundidad de 1492m (figura 3.2b), indicando el final de la última era glacial. La edad del hielo comenzó hace 120000 años correspondiente a una profundidad de 3040 m y la actual era interglacial empezó hace 11700 años correspondiendo a una profundidad de 1492 m.

Suponer que estos dos periodos se pueden describir mediante dos tasas distintas de acumulación, c_{ia} (edad del hielo) y c_{ig} (edad interglacial). Admitir que H_m es constante a lo largo de estos 120 000 años.

3.7a Determine las tasas de acumulación c_{ia} y c_{ig}

3.7b A partir de la figura 3.2 encuentre el cambio de temperatura en la transición de la edad del hielo a la edad interglacial.

ELEVACIÓN DEL NIVEL DEL MAR POR FUSIÓN DE LA CAPA DE HIELO DE GROENLANDIA.

La completa fusión del hielo de Groenlandia daría lugar a una elevación del nivel de los océanos. Una manera muy aproximada de calcular esta elevación es suponer que la elevación sería global y uniforme sobre una superficie de $A_0=3,61.10^{14} \text{ m}^2$.

3.8 Calcule la elevación global del nivel del mar si todo el hielo de Groenlandia se fundiese, siendo el área del rectángulo (según el modelo 3.1(b)) $A_G=1,71.10^{12} \text{ m}^2$.

Datos: Densidad del hielo $\rho_{ice}=0,917.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$; densidad del agua $\rho_{wa}=0,998.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

La masa del hielo de Groenlandia ejerce un empuje gravitacional sobre el océano que la rodea. Si la capa se fundiese, esta “marea” local se perdería y el nivel del mar bajaría en las proximidades de Groenlandia, un efecto que contrarrestaría parcialmente la elevación del nivel del mar calculado anteriormente

Para estimar la magnitud de este empuje gravitacional sobre el agua, se establece un modelo en el que la capa de hielo de Groenlandia se considera como si fuese una masa puntual localizada en el nivel del suelo. Copenhague se encuentra a una distancia de 3500 km medidos a lo largo de la superficie de la Tierra respecto a la posición de esa masa puntual. La Tierra se considera como una esfera, teniendo un océano global ocupando una superficie $A_E= 5,10.10^{14} \text{ m}^2$. Los posibles efectos de la rotación terrestre se desprecian.

3.9 Con este modelo determine la diferencia $h_{CPH}-h_{OPP}$ entre el nivel del mar en Copenhague (h_{CPH}) y en un lugar diametralmente opuesto a Groenlandia (h_{OPP})