

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**  
**Ricardo David Fernández Cruz**

Madrid 2013

XLIV.- OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. DINAMARCA.  
2013

## PROBLEMA 1

### INTRODUCCIÓN

*Un meteoróide es una partícula pequeña (en general inferior a 1 m) procedente de un cometa o de un asteroide. Un meteoróide que impacta en la Tierra se denomina meteorito.*

*En la noche del 17 de Enero de 2009 numerosas personas, situadas cerca del mar Báltico, observaron una estela ardiente o bola de fuego de un meteoróide cayendo a través de la atmósfera terrestre. En Suecia una cámara de vigilancia registró este suceso en un video (ver figura 1.1 a). A partir de estas imágenes y de los testimonios de los testigos fue posible acotar el área de impacto y seis semanas después se encontró, en las proximidades de la ciudad de Maribo (en el sur de Dinamarca) un meteorito con una masa de 0,025 kg . Las mediciones realizadas en el meteorito, hoy denominado de Maribo, y su trayectoria durante la entrada en la atmósfera dan lugar a resultados interesantes. Su velocidad de entrada en la atmósfera terrestre fue excepcionalmente alta y su edad  $4,567 \cdot 10^9$  años, indica que se formó poco después del nacimiento del sistema solar. El meteorito Maribo quizás proceda del cometa Encke.*

### **LA VELOCIDAD DE MARIBO.**

*La bola de fuego se desplazó en dirección Oeste,  $285^\circ$  respecto al Norte, dirigiéndose hacia la localidad donde posteriormente fue encontrado.*

*Un esquema de la trayectoria del meteoróide se muestra en la figura 1.1. El meteorito se encontró a una distancia de 195 km de la cámara de vigilancia en la dirección  $230^\circ$  respecto al norte.*

**1.1.- Utilice este dato y los de la figura 1.1 para calcular la velocidad media de Maribo, entre los intervalos de tiempos correspondientes a los fotogramas 155 y 161. No considere ni la curvatura de la Tierra ni la fuerza de la gravedad sobre el meteorito.**

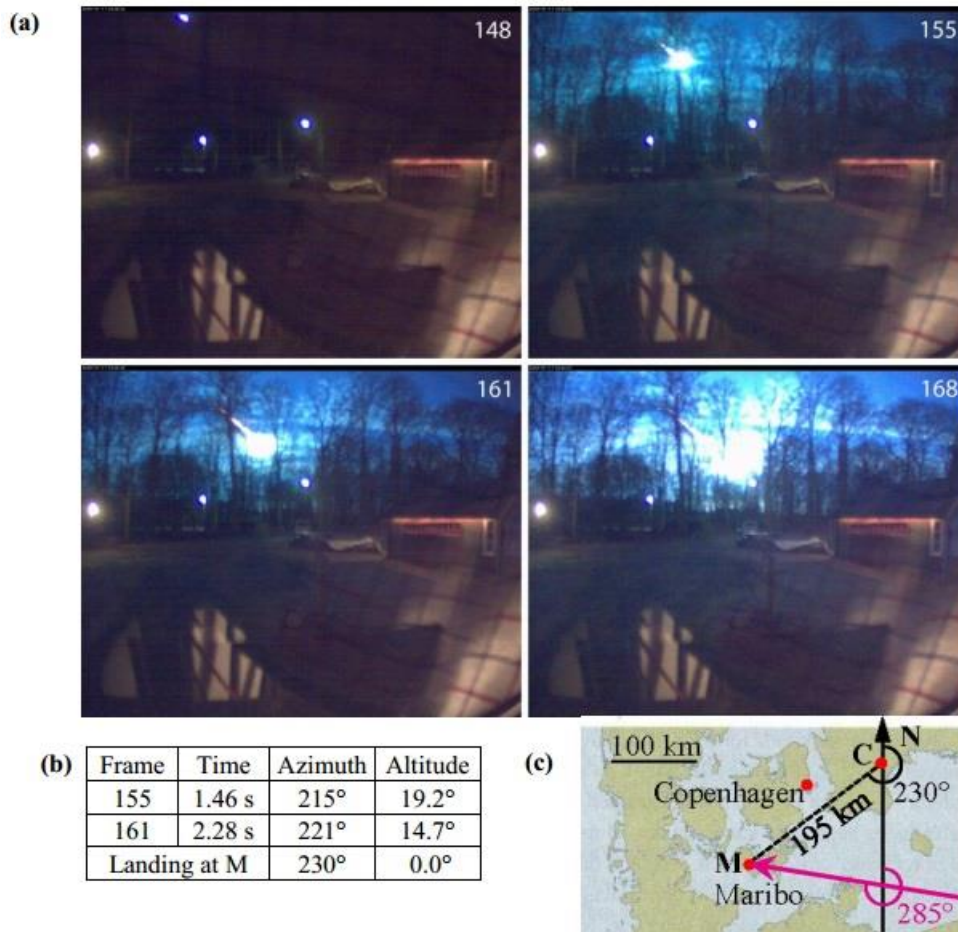


Fig 1,1

b)

| Fotograma           | Tiempo | Azimut | Altitud |
|---------------------|--------|--------|---------|
| 155                 | 1,46 s | 215°   | 19,2°   |
| 161                 | 2,28 s | 221°   | 14,7°   |
| Maribo en tierra, M |        | 230°   | 0,0°    |

a) Figura 1.1(a).- Azimut es la posición angular en el sentido de las agujas de un reloj contado desde el Norte en un plano horizontal y altitud es la posición angular por encima del horizonte. Una serie de fotogramas registrados por la cámara de vigilancia en Suecia, muestran el desplazamiento de Maribo como una bola de fuego en su recorrido por la atmósfera b) Los datos correspondientes a los dos fotogramas indican el tiempo, la dirección (azimut) en grados, vistos por la cámara C, y la altura por encima del horizonte (altitud) en grados

**c) Esquema de la dirección de Maribo relativa al Norte N (flecha magenta) y su posición en tierra M en Dinamarca visto por la cámara C.**

Vamos a utilizar la figura 1.1.(c).del enunciado.

La línea CM con la CI (I está puesto en la figura 1S1) en forma un ángulo de  $50^\circ$ , ya que el ángulo en C vale  $360-230=130^\circ$

Y CM con CI vale  $180^\circ-130^\circ=50^\circ$ . El ángulo MIN vale  $360-285=75^\circ$ , luego el ángulo CMI vale  $180-(75+50)=55^\circ$ . Todo aparece reflejado en la figura 1 S1.

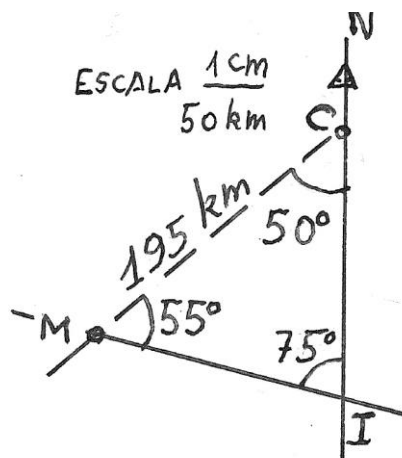


Fig. 1S1

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo CIM:

$$\frac{\text{sen}75^\circ}{195\text{km}} = \frac{\text{sen}50^\circ}{\text{MI}} \Rightarrow \text{MI} = 154,6\text{km} \quad ; \quad \frac{\text{sen}75^\circ}{195\text{km}} = \frac{\text{sen}55^\circ}{\text{CI}} \Rightarrow \text{CI} = 165,4\text{km}$$

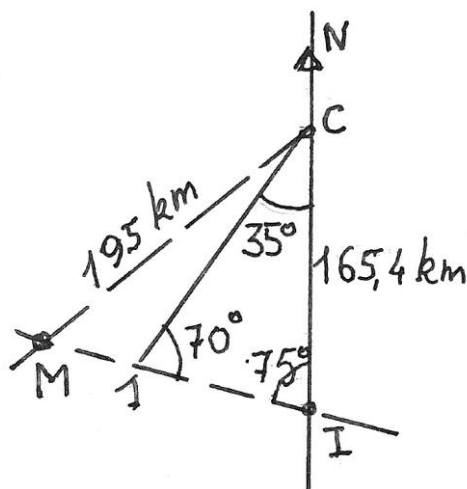


Fig. 1S2

La figura 1S2 contiene la información de la 1S1 y además la línea C1 la cual se ha determinado a partir de los datos del problema 1.1 (b):  $215-180 = 35^\circ$  y de aquí el ángulo  $C1I = 180 + (75 + 35) = 70^\circ$ .

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo C1I:

$$\frac{\text{sen}70^\circ}{165,4\text{km}} = \frac{\text{sen}75^\circ}{C1} \Rightarrow C1 = 170 \text{ km} \quad ; \quad \frac{\text{sen}70^\circ}{165,4\text{km}} = \frac{\text{sen}35^\circ}{I1} \Rightarrow I1 = 100,96 \text{ km}$$

Como la altitud es  $19,2^\circ$ :  $\text{tag}19,2 = \frac{h_1}{C1} \Rightarrow h_1 = 59,2 \text{ km}$

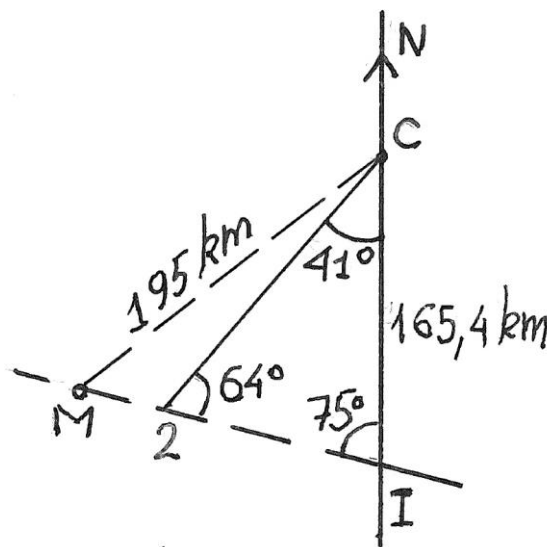


Fig.1S3

La figura 1S3 contiene la información de la 1S1 y además la línea C2 la cual se ha determinado a partir de los datos del problema 1.1 (b):  $221-180 = 41^\circ$  y de aquí el ángulo  $C2I = 180 + (75 + 41) = 64^\circ$ .

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo C2I:

$$\frac{\text{sen}64^\circ}{165,4\text{km}} = \frac{\text{sen}75^\circ}{C2} \Rightarrow C2 = 177,8 \text{ km} \quad \frac{\text{sen}64^\circ}{165,4\text{km}} = \frac{\text{sen}41^\circ}{I2} \Rightarrow I2 = 120,73 \text{ km}$$

Como la altitud es  $14,7^\circ$ :  $\text{tag}14,7 = \frac{h_2}{C2} \Rightarrow h_2 = 46,6 \text{ km}$

La distancia 12 medida en tierra es :  $120,73 - 100,96 = 19,77 \text{ km}$

La distancia medida en lo alto que es la distancia de la bola de fuego entre los fotogramas 155 y 161

$$\sqrt{(h_2 - h_1)^2 + 19,77^2} = \sqrt{(59,2 - 46,6)^2 + 19,77^2} = 23,4 \text{ km}$$

Como esa distancia la ha recorrido el meteorito en  $\Delta t = 2,28 - 1,46 \text{ s} = 0,82 \text{ s}$ , La velocidad media es:

$$v_m = \frac{23,4 \text{ km}}{0,82 \text{ s}} = 28,6 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

### **A TRAVÉS DE LA ATMÓSFERA ¿ SE FUNDIRÁ?**

*La fuerza de rozamiento del meteorito cuando se desplaza por las capas altas de la atmósfera depende de una manera compleja de su forma, su velocidad y también de la temperatura y densidad de la atmósfera.*

*Con una aproximación razonable, la fuerza de rozamiento en la parte superior de la atmósfera puede expresarse mediante la ecuación*

*$F = k \rho_{atm} A v^2$ , en la que  $k$  es una constante,  $\rho_{atm}$  es la densidad de la atmósfera,  $A$ , la sección del meteorito y  $v$  su velocidad.*

*Las siguientes simplificaciones se utilizan para analizar el meteorito: La masa al entrar en la atmósfera  $M_N = 30 \text{ kg}$ , Radio  $R_M = 0,13 \text{ m}$ , temperatura  $T_0 = 200 \text{ K}$ ,  $v_M = 2,91 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ . La densidad de la atmósfera se considera constante, siendo su valor a  $40 \text{ km}$  por encima de la superficie terrestre,  $\rho_{atm} = 4,1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . El coeficiente de fricción  $k = 0,60$ .*

**1.2a.- Estime cuánto tiempo transcurre desde su entrada en la atmósfera para que su velocidad se reduzca un 10%, desde  $v_M$  a  $v_M = 0,90 v_M$ . No tenga en cuenta la fuerza de la gravedad y suponga que su masa y su forma no se ven alteradas.**

Aplicamos la segunda ley de Newton

$$-k\rho_{atm} A v^2 = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -\int_0^{\Delta t} \frac{k\rho_{atm} A}{m} = \int_{v_M}^{0,9v_M} \frac{dv}{v^2} \Rightarrow \frac{k\rho_{atm} A}{m} \Delta t = \left( \frac{1}{0,9v_M} - \frac{1}{v_M} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{\left( \frac{1}{0,9v_M} - \frac{1}{v_M} \right) m}{k\rho_{atm} A} = \frac{\left( \frac{1}{0,9} - 1 \right) 30}{2,91 \cdot 10^4 \cdot 0,6 \cdot 4,1 \cdot 10^{-3} \cdot \pi \cdot 0,13^2} = 0,88 \text{ s}$$

**1.2b.- Calcule cuántas veces es mayor su energía cinética  $E_{kin}$  al entrar en la atmósfera que su energía  $E_{melt}$  necesaria para fundirlo completamente.**

**Datos: Calor específico,  $c_{sm} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}$**

**Temperatura de fusión  $T_{sm} = 1,7 \cdot 10^3 \text{ K}$**

**Calor latente de fusión  $L_{sm} = 2,6 \cdot 10^5 \text{ Jkg}^{-1}$**

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v_M^2 ; E_{\text{melt}} = m c_{sm} (T_{sm} - T_0) + m L_{sm} \Rightarrow \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{\frac{1}{2} v_M^2}{c_{sm} (T_{sm} - T_0) + L_{sm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{melt}}} = \frac{(2,91 \cdot 10^4)^2}{2 [1,2 \cdot 10^3 (1,7 \cdot 10^3 - 200) + 2,6 \cdot 10^5]} = 205$$

### **CALENTAMIENTO DE MARIBO EN SU RECORRIDO POR LA ATMÓSFERA**

*Cuando Maribo penetró en la atmósfera terrestre, a velocidad supersónica, aparece como una bola de fuego debido a que el aire que lo rodea estaba incandescente. No obstante, solamente la parte exterior se calentaba. Se puede suponer a efectos del cálculo que Maribo es una esfera homogénea de densidad  $\rho_{sm} = 3,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , calor específico  $c_{sm} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , y conductividad térmica  $k_{sm} = 2,0 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Su temperatura al penetrar en la atmósfera fue  $T_0 = 200 \text{ K}$  y durante el tiempo de caída en la atmósfera su temperatura superficial fue constante  $T_s = 1000 \text{ K}$  debido a su fricción con el aire y lo que se calentaba gradualmente era su interior..*

*Después de un tiempo de caída  $t$  en la atmósfera, la capa más externa de Maribo de espesor  $x$  se ha calentó a una temperatura notablemente mayor que  $T_0$ . Este espesor se puede estimar, aplicando el análisis dimensional, como producto de potencias de los parámetros termodinámicos  $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$*

**1.3a.-Determinar mediante el análisis dimensional los valores de las cuatro potencias ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . 1.3b.- Calcular el espesor  $x$  después de una caída de  $t = 5 \text{ s}$  y determinar el cociente  $x/R_M$ .**

$$[m] = t^\alpha [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]^\beta [\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]^\gamma [\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]^\delta$$

$$J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \quad ; \quad W = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \Rightarrow$$

$$[m] = t^\alpha [\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]^\beta [\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]^\gamma [\text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-3} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]^\delta \Rightarrow$$

$$[m] = \text{K}^{-\gamma-\delta} \cdot \text{kg}^{\beta+\gamma} \cdot \text{m}^{-3\beta+2\gamma+\delta} \cdot \text{s}^{\alpha-3\delta-2\gamma}$$

Identificando exponentes resulta:

$$\gamma = \delta \quad ; \quad \beta + \gamma = 0 \quad ; \quad -3\beta + 2\gamma + \delta = 1 \quad ; \quad \alpha - 3\delta - 2\gamma = 0 \Rightarrow \text{Resolviend o}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \quad ; \quad \beta = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \gamma = -\frac{1}{2} \quad ; \quad \delta = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$x(t) = \text{Cte} \cdot t^{\frac{1}{2}} \cdot \rho_{\text{sm}}^{-\frac{1}{2}} \cdot c_{\text{sm}}^{-\frac{1}{2}} \cdot k_{\text{sm}}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x(t) = \text{Cte} \sqrt{\frac{t k_{\text{sm}}}{\rho_{\text{sm}} c_{\text{sm}}}} = \text{Cte} \sqrt{\frac{5 \cdot 2,0}{3,3 \cdot 10^3 \cdot 1,2 \cdot 10^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \text{Cte} \cdot 1,58 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow \frac{x(t)}{R_M} = \frac{\text{Cte} \cdot 1,58 \cdot 10^{-3}}{0,13} = \text{Cte} \cdot 0,012$$

## LA EDAD DEL METORITO

*Las propiedades químicas de los elementos radiactivos pueden ser distintas. Así en el proceso de cristalización de los minerales de un meteorito, algunos de estos minerales poseerán una concentración alta de un elemento radiactivo y otros baja. Esta diferencia puede servir para determinar su edad mediante la datación radiactiva de sus minerales.*

*Como ejemplo específico, estudiamos el isótopo  $^{87}\text{Rb}$  (elemento número 37) el cual decae en el isótopo estable  $^{87}\text{Sr}$  (elemento número 38) con una vida media  $T_{1/2} = 4,9 \cdot 10^{10}$  años, relativo al isótopo estable  $^{86}\text{Sr}$ . En*

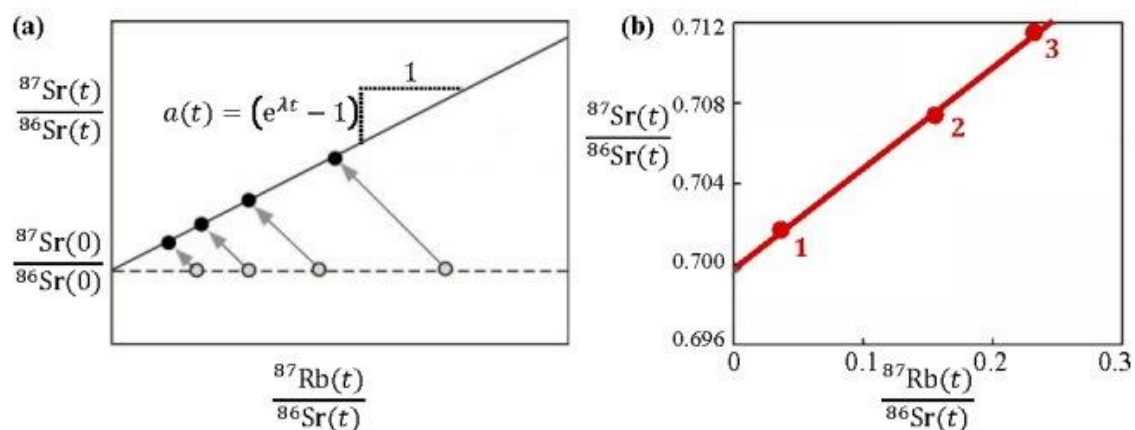
*el momento de la cristalización el cociente  $\frac{^{87}\text{S}_r}{^{86}\text{S}_r}$  era el mismo para*

*todos los minerales, pero no así el cociente  $\frac{^{87}\text{Rb}}{^{86}\text{S}_r}$ . A medida que*

*transcurre el tiempo la cantidad de  $^{87}\text{Rb}$  disminuye y como consecuencia aumenta la cantidad de  $^{87}\text{Sr}$ . El resultado es que el*



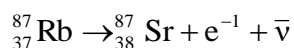
cociente  $\frac{{}^{87}\text{Sr}}{{}^{86}\text{Sr}}$  es diferente hoy día. En la figura 1.2 (a), los puntos situados en la línea horizontal indican el cociente  $\frac{{}^{87}\text{Rb}}{{}^{86}\text{Sr}}$  de diferentes minerales cristalizados en función del tiempo.



a) Figura 1.2(a).- El cociente  $\frac{{}^{87}\text{Sr}}{{}^{86}\text{Sr}}$  en diferentes minerales en el tiempo  $t=0$  de la cristalización (círculos vsin relleno) y en el tiempo actual (círculos con relleno) (b). La línea isocrónica para tres muestras tomadas de minerales diferentes de un meteorito en el tiempo actual.

**1.4a.-Escribir el esquema del decaimiento para la transformación de  ${}_{37}^{87}\text{Rb}$  a  ${}_{38}^{87}\text{Sr}$ :**

El proceso radiactivo consiste en la transformación de un neutrón en un protón acompañado de la emisión de un electrón y un antineutrino.



**1.4b Mostrar que en el tiempo presente la razón  $\frac{{}^{87}\text{Sr}}{{}^{86}\text{Sr}}$  dibujada frente al tiempo actual  $\frac{{}^{87}\text{Rb}}{{}^{86}\text{Sr}}$  en diferentes muestras de mineral del mismo meteorito, es una línea recta con pendiente  $\alpha(t) = e^{\lambda t} - 1$ . Donde  $t$  es el**

**tiempo que ha transcurrido desde la formación de los minerales y  $\lambda$  es la constante de desintegración radiactiva inversa de la vida media  $T_{1/2}$ :**

Para cualquier mineral de los que pueda contener el meteorito la relación Sr87/Sr 86 es la misma, en cambio la relación Rb 87/Sr 86 es distinta; esto ocurre en el momento de la cristalización, cuando  $t=0$ . Dado que el rubidio 87 es radiactivo y su relación es distinta para cada mineral, a medida que transcurre el tiempo disminuyen los átomos de rubidio y aumentan los de Sr 87. Naturalmente la relación entre Rb 87/Sr86 seguirá siendo diferente para cada mineral. La desintegración del Rb87 se verifica por la misma ley radiactiva en cada mineral. La figura 1.2(a) representa una línea horizontal la relación Sr 87/Sr86 para cada mineral ya que esta relación es la misma en todos ellos. Pero la situación de cada mineral es distinta en esa recta, ya que la relación Rb 87/Sr/86 es diferente (círculos blancos). Ahora consideramos que ha transcurrido un tiempo  $t$  desde la cristalización, la relación Rb87/Sr86 **es menor**, puesto que el Rb se ha desintegrado, pero la ley de desintegración es la misma para todos los minerales, por ello al cabo de ese tiempo la relación Sr87/Sr86 **aumenta** y la representación es una línea recta inclinada (círculos negros).

Designamos con  $N_{Rb}(0)$  el número de átomos de Rb en cualquiera de los minerales en el tiempo  $t=0$ ,  $N_{Rb}(t)$  al número de átomos de ese elemento cuando ha transcurrido un tiempo  $t$ . La relación entre ambos números está dada por la ley de desintegración radiactiva

$$N_{Rb}(t) = N_{Rb}(0)e^{-\lambda t}$$

En ese mineral y en el intervalo de tiempo  $t=0$  a  $t$ , han desaparecido  $N_{Rb}(0) - N_{Rb}(t) = N_{Rb}(0) - N_{Rb}(0)e^{-\lambda t} = N_{Rb}(0)[1 - e^{-\lambda t}]$  y es este número los que han aparecido de Sr87, por tanto, si en el tiempo  $t=0$  había  $N_{Sr87}(0)$ , ahora en el tiempo  $t$ , habrá:

$$N_{Sr87}(t) = N_{Sr87}(0) + N_{Rb}(0)[1 - e^{-\lambda t}] = N_{Sr87}(0) + \frac{N_{Rb}(t)}{e^{-\lambda t}}[1 - e^{-\lambda t}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_{Sr87}(t) = N_{Sr87}(0) + N_{Rb}(t)[e^{\lambda t} - 1] \Rightarrow \frac{N_{Sr87}(t)}{N_{Sr86}} = \frac{N_{Sr87}(0)}{N_{Sr86}} + \frac{N_{Rb}(t)}{N_{Sr86}}[e^{\lambda t} - 1] \quad (1)$$

La ecuación (1) es la ecuación de la recta denominada isocrónica, cuya pendiente es:

$$\alpha = [e^{\lambda t} - 1] = \left[ e^{\frac{t}{T_{1/2}}} - 1 \right] \quad (2)$$

**1.4c.- Determinar la edad  $t_M$  del meteorito utilizando la línea isocrónica de la figura 1.2(b).**

La ordenada de la recta de la figura 1.2(b) se calcula directamente,  $y = 0,712 - 0,700 = 0,012$ . La abscisa, medimos en la gráfica los centímetros del eje  $0-0,3$  y los centímetros de  $0,712$  a la intersección de la recta.

$$\frac{0,3}{6 \text{ cm}} = \frac{x}{2,9} \Rightarrow x = 0,145 \Rightarrow \alpha = \frac{0,012}{0,145} = 0,0828$$

De la ecuación (2)

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= e^{\frac{\tau_M}{T_{1/2}}} \Rightarrow \ln(\alpha + 1) = \frac{\tau_M}{T_{1/2}} \Rightarrow \tau_M = T_{1/2} \cdot \ln(\alpha + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tau_M = 4,9 \cdot 10^{10} \cdot \ln(0,0828 + 1) = 3,9 \cdot 10^9 \text{ años} \end{aligned}$$

## **EL COMETA ENCKE DEL QUE PUEDE PROCEDER MARIBO**

*En su órbita alrededor del Sol, las distancias mínima y máxima entre el cometa Encke y el Sol son respectivamente:*

$$a_{\min} = 4,95 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad \text{y} \quad a_{\max} = 6,16 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

**Datos.**  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  ; Masa del Sol ,  $m_s = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

### **1.5.- Calcular el periodo orbital $t_{\text{Encke}}$ del cometa Encke**

Vamos a realizar un cálculo sencillo: Supongamos un cuerpo celeste que describe una órbita circular alrededor del Sol. La fuerza centrípeta es proporcionada por la fuerza de atracción gravitatoria entre el Sol y el cuerpo

$$\frac{m v^2}{R} = G \frac{m_s m}{R^2} \quad ; \quad v = \frac{2 \pi R}{T} \Rightarrow \frac{4 \pi^2 R^2}{T^2 R} = G \frac{m_s}{R^2} \Rightarrow T = \frac{2 \pi R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G m_s}}$$

Cuando se quiere calcular el periodo de un cuerpo que describe una órbita elíptica alrededor del Sol, basta cambiar en la formula anterior R por el semieje mayor de la elipse

Calculamos el semieje mayor de la elipse

$$a = \frac{a_{\max} + a_{\min}}{2} = \frac{6,16 \cdot 10^{11} + 4,95 \cdot 10^{10}}{2} = 3,33 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

El periodo se calcula por la ecuación:

$$T = \frac{2 \pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{G m_s}} = \frac{2 \pi \cdot (3,33 \cdot 10^{11})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}} = 1,05 \cdot 10^8 \text{ s}$$

## CONSECUENCIAS DEL CHOQUE DE UN ASTEROIDE CON LA TIERRA.

*Hace 65 millones de años chocó contra la Tierra un enorme asteroide de densidad  $\rho_{ast}=3,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , radio  $R_{ast}=5,0 \text{ km}$  y con velocidad final  $v_{ast}=2,5 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ . El impacto resultante dio lugar a la extinción de gran cantidad de especies y la formación de un enorme cráter llamado Cráter de Chicxulub.*

*Suponer que hoy día ocurriese un choque elástico contra la Tierra de un asteroide similar al anterior y utilizar el hecho de que la Tierra tiene, un momento de inercia 0,83 veces del de una esfera homogénea de la misma masa y radio. El momento de inercia de una esfera homogénea es  $(2/5) M R^2$ . No considere ningún cambio en la órbita de la Tierra.*

### 1.6a.- Si el asteroide choca en el Polo Norte, encontrar el cambio máximo en la orientación del eje de la Tierra después del impacto.

**Datos. Masa de la Tierra,  $m_E=5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ; Radio de la Tierra,  $R_E=6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$**

El momento angular de la Tierra es un vector que tiene la dirección del eje y el mismo sentido que el vector velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje. Su módulo vale:

$$L_E = I_E \omega_e = 0,83 \frac{2}{5} m_E R_E^2 \cdot \frac{2\pi}{T_E} = 0,85 \cdot \frac{2}{5} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2 \cdot \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_E = 5,87 \cdot 10^{33} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$$

El momento angular del asteroide es perpendicular al de la Tierra y su módulo vale

$$L_{ast} = m_{ast} v_{ast} R_e = \frac{4}{3} \pi R_{ast}^3 \rho_{ast} v_{ast} R_e = \frac{4}{3} \pi \cdot (5 \cdot 10^3)^3 \cdot 3,0 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^4 \cdot 6,38 \cdot 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{ast} = 2,51 \cdot 10^{26} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$$

El momento angular resultante después del impacto tiene por módulo

$$L_F = \sqrt{L_E^2 + L_{ast}^2}$$

El vector  $\vec{L}_F$  tendría la dirección del nuevo eje de la Tierra. Si  $\theta$  representa el ángulo entre los ejes de la Tierra antes y después del impacto

$$\text{tag } \theta = \frac{L_{ast}}{L_E} = \frac{2,51 \cdot 10^{26}}{5,87 \cdot 10^{33}} \Rightarrow \theta = 2,45 \cdot 10^{-6} \text{ grados}$$

### 1.6b.- Si el asteroide golpea de forma radial en el Ecuador, calcular el cambio $\Delta \tau_{vrt}$ en la duración de una revolución de la Tierra después del impacto.

Dado que la cantidad de movimiento del asteroide apunta al centro de masas de la Tierra, el resultado es que el momento angular de la Tierra no varía, aunque sí lo haga su velocidad de rotación que disminuirá y su momento de inercia que aumentará.

Matemáticamente

$$d(I_E \omega_E) = 0 \Rightarrow I_E \cdot d\omega_E + dI_E \cdot \omega_E = 0$$

Tomando incrementos

$$\Delta \omega_E = -\omega_E \frac{\Delta I_E}{I_E} = -\frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{m_{\text{ast}} R_E^2}{0,83 \cdot \frac{2}{5} m_E R_E^2} = -\frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \frac{\frac{4}{3} \pi R_{\text{ast}}^3 \rho_{\text{ast}}}{0,83 \cdot \frac{2}{5} m_E} \Rightarrow$$

$$\Delta \omega_E = -\frac{20\pi^2}{72 \cdot 3600} \frac{(5,0 \cdot 10^3)^3 \cdot 3,0 \cdot 10^3}{0,83 \cdot 5,97 \cdot 10^{24}} = -5,76 \cdot 10^{-14} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\Delta \tau_{\text{vit}} = \frac{2\pi}{\omega_E + \Delta \omega_E} - \frac{2\pi}{\omega_E} = \frac{-2\pi \Delta \omega_E}{\omega_E^2 + \omega_E \Delta \omega_E} = \frac{-2\pi \cdot (-5,76 \cdot 10^{-14})}{\left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\right)^2 + \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} (-5,76 \cdot 10^{-14})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \tau_{\text{vit}} = \frac{3,62 \cdot 10^{-13}}{5,29 \cdot 10^{-9} - 4,19 \cdot 10^{-18}} = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

**1.6c.- Si el asteroide golpea de forma tangencial en el plano ecuatorial, calcular el cambio  $\Delta \tau_{\text{tan}}$  en la duración de una revolución de la Tierra después del impacto.**

Cuando el asteroide golpea de forma tangencial el vector cantidad de movimiento vale

$$\vec{L}_{\text{ast}} = \vec{R}_E \times m \vec{v}_{\text{ast}} \Rightarrow L_{\text{ast}} = m_{\text{ast}} v_{\text{ast}} R_e$$

El vector  $\vec{L}_{\text{ast}}$  tiene la misma dirección y sentido que  $\vec{L}_E$ , luego el módulo del momento angular resultante es:  $L_F = L_E + L_{\text{ast}}$ . En este caso el momento angular aumenta y eso se traduce en que

$$d(I_E \omega_E) = \Delta L = L_E + L_{\text{ast}} - L_E = L_{\text{ast}}$$

Diferenciando y tomando incrementos

$$I_E \Delta \omega_E + \Delta I_E \omega_E = L_{\text{ast}} \Rightarrow \Delta \omega_E = \frac{L_{\text{ast}}}{I_e} - \frac{\Delta I_E \omega_E}{I_E}$$

Calculamos los valores numéricos del segundo miembro

$$\frac{L_{ast}}{I_E} = \frac{m_{ast} v_{ast} R_e}{0,83 \cdot \frac{2}{5} m_E R_E^2} = \frac{4,016 \pi R_{ast}^3 \rho_{ast} v_{ast}}{m_E R_E} = \frac{4,016 \cdot \pi \cdot (5,0 \cdot 10^3)^3 \cdot 3,0 \cdot 10^3 \cdot 2,5 \cdot 10^4}{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 6,38 \cdot 10^6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L_{ast}}{I_E} = 3,11 \cdot 10^{-12}$$

$$\frac{\Delta I_E \omega_E}{I_E} = \frac{m_{ast} R_E^2 \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}}{0,83 \cdot \frac{2}{5} m_E R_E^2} = \frac{\frac{4}{3} \pi R_{ast}^3 \rho_{ast} \frac{2\pi}{24 \cdot 3600}}{0,83 \cdot \frac{2}{5} m_E} = \frac{9,18 \cdot 10^{-4} \cdot (5,0 \cdot 10^3)^3 \cdot 3,0 \cdot 10^3}{5,97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta I_E \omega_E}{I_E} = 5,76 \cdot 10^{-14}$$

$$\Delta \omega_E = 3,11 \cdot 10^{-12} - 5,76 \cdot 10^{-14} = 3,05 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta \tau_{tan} = 2\pi \left( \frac{1}{\omega_E + \Delta \omega_E} - \frac{1}{\omega_E} \right) = 2\pi \left( \frac{-\Delta \omega_E}{\omega_E^2 + \omega_E \Delta \omega_E} \right) \approx -\frac{2\pi \Delta \omega_E}{\omega_E^2} = -\frac{2\pi 3,05 \cdot 10^{-12}}{\left( \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \tau_{tan} = -3,62 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

## LA VELOCIDAD MÁXIMA DE UN CHOQUE

*Considerar un cuerpo celeste, en el límite del sistema solar, el cual choca contra la Tierra con una velocidad  $v_{imp}$ . Inicialmente el efecto del campo gravitatorio de la Tierra y del cuerpo se pueden despreciar. Ignore la fricción con la atmósfera, la influencia de otros cuerpos y la rotación de la Tierra.*

**Datos.** Masa del Sol,  $m_S = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ; Distancia media Sol-Tierra,  $a_E = 1,50 \cdot 10^{11} \text{ m}$

**1.7.- Calcular  $v_{imp}^{max}$  que es el valor mayor posible de la  $v_{imp}$**

Admitimos que en el límite del sistema solar la energía potencial y cinética del cuerpo celestial es nula. Al acercarse a la Tierra su velocidad aumenta por efecto de la atracción del Sol y de la Tierra. Dado que se pretende que la velocidad del impacto sea máxima ambas contribuciones deben sumarse. Si  $m_C$  representa la masa del cuerpo celestial y  $v_{LL}$  la velocidad de llegada a la Tierra. El principio de conservación de la energía conduce a:

$$E_p^\infty + E_k^\infty = 0 + 0 = -\frac{G m_s m_c}{a_E} - \frac{G m_E m_c}{R_E} + \frac{1}{2} m_c v_{LL}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{LL} = \sqrt{2G \left( \frac{m_s}{a_E} + \frac{m_E}{R_E} \right)} = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \left( \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{1,50 \cdot 10^{11}} + \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{6,38 \cdot 10^6} \right)} = 4,35 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

El cuerpo celestial va a chocar contra la Tierra que está moviéndose alrededor del Sol con una velocidad

$$v_E = \frac{2\pi a_E}{365 \cdot 24 \cdot 3600} = 2,94 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

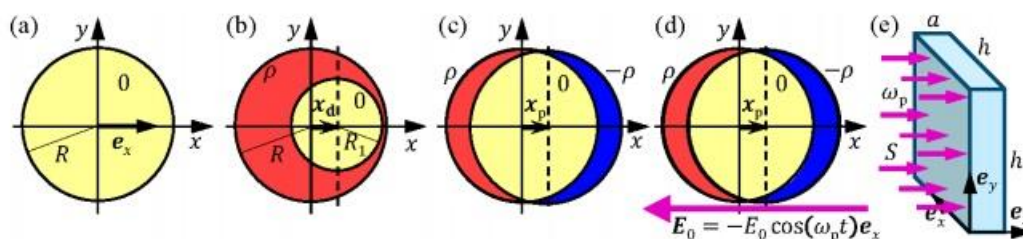
Visto desde la Tierra el impacto de máxima velocidad se producirá cuando ambas velocidades se sumen:

$$v_{\text{imp}}^{\text{max}} = v_{LL} + v_E = (4,35 + 2,94) \cdot 10^4 \frac{m}{s} = 7,29 \cdot 10^4 \frac{m}{s} = 72,9 \frac{km}{s}$$

## PROBLEMA 2

### INTRODUCCIÓN

*En este problema se estudia un proceso eficaz de producción de vapor cuyo funcionamiento empírico ha sido demostrado. Una disolución acuosa de esferas de plata de tamaño del orden de los nanómetros (nanopartículas) con  $10^{13}$  partículas por litro se ilumina con un haz direccional de luz. Una fracción de la luz la absorben las nanopartículas las cuales se calientan y generan vapor de forma local alrededor de ellas sin que se caliente el resto de la disolución. El vapor se extrae del sistema en forma de burbujas que abandonan la disolución. El proceso no se conoce en todos sus detalles pero sí su fundamento que es debido a la absorción de luz por medio de un proceso llamado oscilaciones colectivas de los electrones de las nanopartículas metálicas. Este dispositivo se conoce como generación de vapor plasmónico*



*a) Figura 2.1.- (a). Una nanopartícula de forma esférica y sin carga de radio  $R$  está situada en el centro de un sistema de coordenadas. b) Una esfera con densidad de carga uniforme  $\rho$  (rojo) contiene una esfera más pequeña sin carga ( $0$ , amarilla) de radio  $R_1$ , con su centro desplazado por  $\vec{x}_d = x_d \vec{e}_x$ . (c). La esfera con densidad de carga positiva de los iones de plata de la nanopartícula está fija en el centro del sistema de coordenadas. El centro de la región esférica con densidad de carga negativa (azul) de la nube de electrones está desplazada  $\vec{x}_p$ , donde  $x_p \ll R$ . (d). Un campo eléctrico externo homogéneo  $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x$ . Por la dependencia de  $E_0$  del tiempo la nube de electrones se mueve con velocidad  $\vec{v} = \frac{d\vec{x}_p}{dt} \vec{e}$ . (e) El recipiente rectangular ( $h \times h \times a$ ) contiene la disolución acuosa de las nanopartículas y está iluminada por luz monocromática que se propaga a largo del eje  $z$ , siendo su frecuencia angular  $\omega_p$  y su intensidad  $S$ .*

### UNA ÚNICA NANOPARTÍCULA DE FORMA ESFÉRICA.

*Consideramos una nanopartícula de forma esférica de plata de radio  $R=10,0$  nm con su centro fijo en el origen de coordenadas (ver figura*



**2.1(a).** Todos los movimientos, fuerza y campos son paralelos al eje horizontal  $x$  (vector unitario  $\bar{e}_x$ ). La nanopartícula contiene electrones libres (conducción) que se desplazan dentro de todo su volumen sin que estén alrededor de un átomo concreto de la misma. Cada átomo de plata ha cedido un electrón convirtiéndose en un ión positivo.

**2.1.- Encontrar el volumen  $V$  y la masa  $M$  de la nanopartícula, el número  $N$  y densidad de carga  $\rho$  de los iones plata en la partícula, y para los electrones libres su concentración  $n$ , su carga total  $Q$  y su masa total  $m_0$ .**

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi (10,0 \cdot 10^{-9})^3 = 4,19 \cdot 10^{-24} \text{ m}^3 \quad ;$$

$$M = V\rho = 4,19 \cdot 10^{-24} \text{ m}^3 \cdot 1,049 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 4,39 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \Rightarrow$$

$$\text{Moles de plata} = \frac{4,39 \cdot 10^{-20} \text{ kg}}{1,079 \cdot 10^{-1} \frac{\text{kg}}{\text{mol}}} = 4,07 \cdot 10^{-19} \text{ mol}$$

$$N = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \cdot 4,07 \cdot 10^{-19} \text{ mol} = 2,45 \cdot 10^5$$

$$\rho = \frac{N \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{4,19 \cdot 10^{-24} \text{ m}^3} = 9,37 \cdot 10^9 \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$$

$$n = \frac{2,45 \cdot 10^5}{4,19 \cdot 10^{-24}} = 5,85 \cdot 10^{28} \frac{\text{Electrones}}{\text{m}^3}$$

$$Q = 2,45 \cdot 10^5 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19} = 3,92 \cdot 10^{-14} \text{ C}$$

$$m_0 = 2,45 \cdot 10^5 \cdot 9,109 \cdot 10^{-21} \text{ kg} = 2,23 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$$

**EL CAMPO ELÉCTRICO EN UNA REGIÓN DE CARGA NEUTRA DENTRO DE UNA ESFERA CARGADA.**

En el resto del problema se supone que la permitividad relativa de todos los materiales es  $\epsilon_r=1$ . En el interior de una esfera de radio  $R$  con densidad de carga uniforme  $\rho$  se crea otra pequeña esfera de carga neutra y radio  $R_1$  por adición de una carga opuesta de densidad  $-\rho$  con su centro desplazado  $\bar{x}_d = x_d \bar{e}_x$  respecto al centro de la esfera  $R$  (ver figura 2.1 (b)).

**2.2.- Mostrar que el campo eléctrico dentro de la región de carga neutra es homogéneo de la forma  $\bar{E} = A \left( \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \bar{x}_d$  y determinar el factor  $A$ .**

Vamos a calcular el campo en el interior de una esfera de radio  $R$  que tiene una densidad de carga homogénea  $\rho$ . Sea  $r$  el radio de una esfera concéntrica con  $R$  y radio  $r < R$ . (figura 1). Aplicamos el teorema de Gauss.

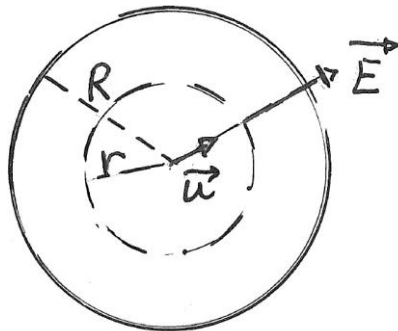


Fig.1

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow q = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$E$  representa el módulo de un vector cuya dirección y sentido lo indica el vector  $\vec{r} = r\vec{u}$ , siendo  $\vec{u}$  un vector unitario. Podemos escribir el resultado anterior en forma vectorial:

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{u}$$

En la figura 1 se encuentra una representación del vector  $\vec{E}$ .

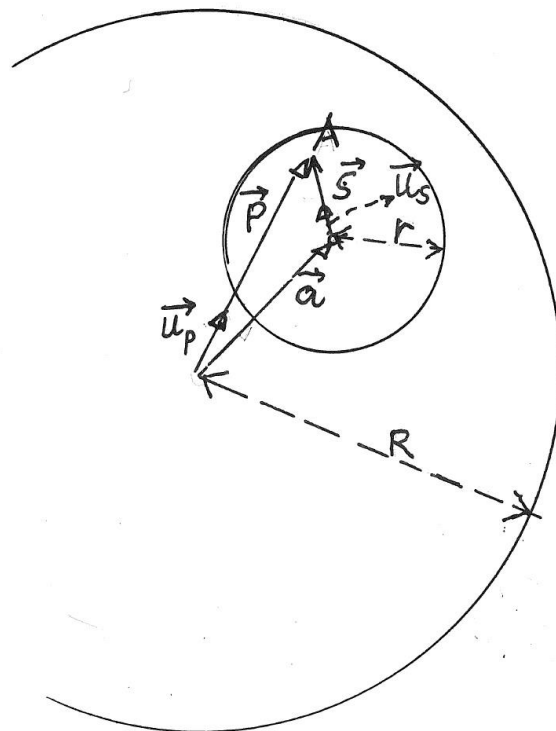


Fig.2

En la figura 2 hemos representado una esfera de radio R con densidad de carga  $\rho$  y una esfera en su interior con densidad de carga  $-\rho$ . El resultado es que en la esfera de radio  $r < R$  la carga resultante es nula. Consideramos un punto A interior a la esfera de radio r. El campo en dicho punto se obtiene aplicando el principio de superposición

$$\vec{E} = \frac{\rho P}{3\epsilon_0} \vec{u}_p + \left( \frac{-\rho s}{3\epsilon_0} \vec{u}_s \right) = \frac{\rho \vec{P}}{3\epsilon_0} - \frac{\rho \vec{S}}{3\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{P} - \vec{S}) = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}$$

Si aplicamos este resultado a la figura 2.1(b) del enunciado  $\vec{a} = \vec{x}_d$

$$\vec{E} = \frac{1}{3} \frac{\rho}{\epsilon_0} \vec{x}_d \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

### **LA FUERZA RECUPERADORA SOBRE LA NUBE ELECTRÓNICA DESPLAZADA.**

*En lo que sigue estudiamos el movimiento colectivo de los electrones libres, utilizando un modelo de una única esfera cargada negativamente con densidad de carga homogénea  $-\rho$  y con su centro localizado en  $\vec{x}_p$ , la cual se desplaza a lo largo del eje x con relación a la esfera positivamente cargada (iones plata) que está localizada en el origen de coordenadas, figura 2.1 (c). Suponga que una fuerza externa  $\vec{F}_{ext}$  desplaza la nube electrónica a una nueva posición de equilibrio  $\vec{x}_p = x_p \vec{e}_x$  con  $x_p \ll R$ . Excepto para pequeñas cargas, en el extremo opuesto de la nanopartícula, la mayor parte de su interior permanece neutra.*

#### **2.3.- Expresar en términos de $\vec{x}_p$ y n las dos cantidades siguientes: La fuerza de restauración ejercida sobre la nube electrónica y el trabajo realizado sobre la nube electrónica durante el desplazamiento.**

Para que pueda considerarse una esfera cargada homogéneamente con densidad de carga  $-\rho$  es necesario que el desplazamiento  $x_p$  sea muy pequeño comparado con el radio, pues de no ser así la zona de densidad de carga nula ya no sería una esfera.

Designamos con N al número de electrones contenidos en la esfera de radio R, el valor absoluto de la carga eléctrica es  $Q = Ne$ , la fuerza exterior aplicada a la esfera desplaza los electrones a la derecha una distancia  $x_p$ .

$$F_{ext} = QE = Q \frac{\rho}{3\epsilon_0} x_p$$

El valor absoluto de la densidad de carga es:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow F_{\text{ext}} = \frac{Q}{3\epsilon_0} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} x_p = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x_p \quad (1)$$

Si  $n$  representa el número de cargas por unidad de volumen

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3 e} \Rightarrow Q = n \frac{4}{3}\pi R^3 e \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en la ecuación (1)

$$F_{\text{ext}} = \frac{n^2 e^2 \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x_p = \frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p \quad (3)$$

El vector  $\vec{F}_{\text{ext}}$  tiene por módulo (2) y la dirección y sentido del unitario  $\vec{e}_x$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p \vec{e}_x$$

La fuerza de restauración será un vector de módulo (3) pero dirigido en sentido contrario del  $\vec{F}_{\text{ext}}$ .

El trabajo de desplazamiento es:

$$W = \int_0^{x_p} \frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x' dx' = \frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} \frac{x_p^2}{2} \quad (4)$$

## **LA NANOPARTÍCULA ESFÉRICA DE PLATA EN UN CAMPO ELÉCTRICO EXTERNO CONSTANTE.**

*Una nanopartícula se coloca en el vacío y se somete a la acción de una fuerza externa, producida por un campo eléctrico homogéneo  $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{e}_x$  el cual desplaza la nube de electrones una pequeña distancia  $x_p$  siendo  $x_p \ll R$ .*

**2.4.- Encontrar el desplazamiento  $x_p$  de la nube electrónica en función de  $E_0$  y  $n$  y determinar la cantidad  $-\Delta Q$  de carga electrónica desplazada a través del plan  $y$ - $z$  en el centro de la nanopartícula en función de  $n$ ,  $R$  y  $x_p$ .**

Hacemos uso de las ecuaciones (2) y (3) obtenidas en el apartado anterior.

$$F_{\text{ext}} = \frac{4\pi n^2 e^2 R^3}{9\epsilon_0} x_p ; Q = n \frac{4}{3}\pi R^3 e \Rightarrow x_p = \frac{9\epsilon_0 F_{\text{ext}}}{4\pi n^2 e^2 R^3}$$

La definición de campo eléctrico es fuerza por unidad de carga, luego  $F_{\text{ext}} = E_o Q = E_o n \frac{4}{3} \pi R^3 e$ , sustituyendo en  $x_p$ .

$$x_p = \frac{9 \varepsilon_o E_o n \frac{4}{3} \pi R^3 e}{4 \pi n^2 e^2 R^3} = \frac{3 \varepsilon_o E_o}{n e} \quad (5)$$

Cuando el centro de la nanopartícula está en el origen de coordenadas el círculo máximo de radio  $R$  está situado en el plano  $yz$ , cuando se desplaza la nanopartícula ese círculo máximo pasa por la posición  $x=x_p$ , por tanto la carga desplazada es la contenida en un cilindro de radio  $R$  y altura  $x_p$ .

$$-\Delta Q = n \pi R^2 x_p e \quad (6)$$

### **LA CAPACIDAD EQUIVALENTE E INDUCTANCIA DE LA NANOPARTÍCULA DE PLATA.**

*Para un campo  $\vec{E}_o$ , tanto si varía con el tiempo como si no, es posible crear un modelo para la nanopartícula, equivalente a un circuito eléctrico. La capacidad equivalente se puede obtener relacionando el trabajo  $W_{el}$  necesario para la separación de las cargas  $\Delta Q$  con la energía de un condensador portando cargas  $\pm \Delta Q$ . La separación de cargas ocasionará un voltaje  $V_o$  en el condensador equivalente.*

**Dato:**  $\varepsilon_o = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$

#### **2.5a.- Expresar la capacidad equivalente del sistema C en función de $\varepsilon_o$ y R, y determinar su valor.**

La energía almacenada en un condensador es:

$$E = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \Rightarrow C = \frac{\Delta Q}{\Delta V} \rightarrow \Delta V = \frac{\Delta Q}{C} \Rightarrow E = \frac{1}{2} C \frac{\Delta Q^2}{C^2} \rightarrow C = \frac{\Delta Q^2}{2E} \quad (7)$$

En la ecuación (7), sustituimos (5) y (6)

$$C = \frac{1}{2} \frac{\left( \frac{4 \pi n^2 e^2 R^3 x_p^2}{9 \varepsilon_o} \right)^2}{n \pi R^2 x_p e} = \frac{1}{2} \frac{(n \pi R^2 x_p e)^2}{4 \pi n^2 e^2 R^3 \frac{x_p^2}{9 \varepsilon_o}} = \frac{9}{4} \pi R \varepsilon_o \Rightarrow$$

$$C = \frac{9 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}{4} = 6,26 \cdot 10^{-19} \text{ F}$$

**2.5b.- Para la capacidad anterior determinar en función de  $E_0$  y  $R$  el voltaje equivalente  $V_0$  que debería conectarse al condensador equivalente con la finalidad de acumular la carga  $\Delta Q$ .**

$$C = \frac{\Delta Q}{V_0} \Rightarrow V_0 = \frac{\Delta Q}{C} = \frac{n \pi R^2 e x_p}{\frac{9}{4} \pi R \epsilon_0} = \frac{4 n e R x_p}{9 \epsilon_0}$$

Sustituimos en la ecuación anterior la (5).

$$V_0 = \frac{4 n e R}{9 \epsilon_0} \frac{3 \epsilon_0 E_0}{n e} = \frac{4}{3} R E_0$$

*Para un campo  $\vec{E}_0$  dependiente del tiempo, la nube de electrones se desplaza con velocidad  $\vec{v} = v \vec{e}_x$ , figura 2.1(d) y posee una energía cinética  $W_{kin}$  y forma una corriente eléctrica  $I$  fluyendo a través del plano y-z. La energía cinética de la nube de electrones puede considerarse como la energía de una bobina equivalente de coeficiente de inducción  $L$  portando una corriente  $I$ .*

**2.6a.- Expresar la energía cinética  $W_{kin}$  y la intensidad  $I$  en función de la velocidad  $v$ .**

**Dato:** Masa del electrón,  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$  kg; carga del electrón  $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C

La energía cinética de la nube electrónica es el producto de la energía cinética de cada electrón por el número de electrones contenidos en la esfera de radio  $R$ .

$$W_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2 \cdot n \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi m_e v^2 R^3 n$$

La carga desplazada está dada por la ecuación (6) luego aplicamos que la intensidad es la derivada con relación al tiempo de la carga desplazada y tenemos en cuenta según el enunciado que  $v = dx_p/dt$ .

$$I = \frac{d}{dt} (n \pi e R^2 x_p) = \left| n \pi e R^2 \frac{dx_p}{dt} \right| = \left| n \pi e R^2 v \right|$$

**2.6b.- Expresar el coeficiente  $L$  en función del radio de  $R$ , la carga del electrón  $e$  y su masa  $m_e$ , la concentración de carga  $n$  y determinar su valor.**

La energía almacenada por una bobina recorrida por una corriente  $I$  es:

$$W = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L (n \pi e R^2 v)^2 \Rightarrow L = \frac{2W}{n^2 \pi^2 e^2 R^4 v^2}$$

La energía que puede almacenar la bobina es la de los electrones que la recorren

$$L = \frac{2 \cdot \frac{2}{3} \pi m_e v^2 R^3 n}{n^2 \pi^2 e^2 R^4 v^2} = \frac{4 m_e}{3 n \pi e^2 R} = \frac{4}{3} \frac{9,109 \cdot 10^{-31}}{5,85 \cdot 10^{28} \cdot \pi \cdot (1,602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 2,58 \cdot 10^{-14} \text{ H}$$

## **LA RESONANCIA PLASMÓNICA (PLASMON RESONANCE) DE LA NANOPARTÍCULA DE PLATA**

*Es posible crear un modelo que explique el desplazamiento de la nube de electrones desde su posición de equilibrio y su vuelta a ella. Dicho modelo es el de un circuito ideal L-C oscilando en resonancia. Este modelo dinámico se conoce con el nombre de resonancia plasmónica (plasmon resonance), el cual se verifica con una frecuencia de resonancia  $\omega_p$ .*

**Dato:** Velocidad de la luz ,  $c=2,889 \cdot 10^8$  m/s.

**2.7a.- Encuentre una expresión para la frecuencia plasmónica  $\omega_p$  de la nube de electrones en función de la carga del electrón  $e$ , de su masa  $m_e$ , de la concentración de carga  $n$  y de la permitividad  $\epsilon_0$ .**

En un circuito resonante se cumple que

$$L \omega_p = \frac{1}{C \omega_p} \Rightarrow \omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En el apartado 2.6b hemos deducido el valor de L y en el apartado 2.5a el de C . Sustituimos sus expresiones en la anterior ecuación

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{4 m_e}{3 n \pi e^2 R} \cdot \frac{9}{4} \pi R \epsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3 m_e \epsilon_0}{n e^2}}} = \frac{e \sqrt{n}}{\sqrt{3 m_e \epsilon_0}}$$

**2.7b Calcule  $\omega_p$  en rad/s y la longitud de onda  $\lambda_p$  en nm de luz en el vacío para una frecuencia angular  $\omega = \omega_p$ .**

$$\omega_p = \frac{1,602 \cdot 10^{-19} \sqrt{5,85 \cdot 10^{28}}}{\sqrt{3 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31} \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}} = 7,88 \cdot 10^{15} \frac{\text{rad}}{\text{s}} ; c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\lambda}{\frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot \pi \cdot 2,998 \cdot 10^8}{7,88 \cdot 10^{15}} = 2,39 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 239 \text{ nm}$$

## LA NANOPARTÍCULA DE PLATA ILUMINADA CON LUZ A LA FRECUENCIA PLASMÓNICA.

En el resto del problema, la nanopartícula está iluminada por luz monocromática de frecuencia angular plasmónica  $\omega_p$  con una intensidad incidente  $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1,00 \frac{MW}{m^2}$ . Teniendo presente que  $\lambda_p \ll R$ , se

considera que la nanopartícula está situada en un campo armónico homogéneo oscilante  $\vec{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \vec{e}_x$ . Por la acción de  $\vec{E}_0$  el centro  $\bar{x}_p(t)$  de la nube de electrones oscila a la misma frecuencia con

velocidad  $\bar{v} = \frac{d\bar{x}_p}{dt}$  y amplitud constante  $x_0$ . Este movimiento oscilatorio

de los electrones conlleva a la absorción de luz. La energía capturada por las nanopartículas se convierte en calor (efecto Joule) o es reemitida en forma de luz dispersa.

El calentamiento por efecto Joule se origina por las colisiones inelásticas al azar en las que cualquier electrón al chocar con un ión plata pierde toda su energía cinética, la cual se convierte en vibraciones del ión plata (calor). El tiempo promedio entre colisiones es  $\tau \gg \frac{1}{\omega_p}$ , y para la

nanopartícula de plata  $\tau = 5,24 \cdot 10^{-15}$  s.

**2.8a Encuentre una expresión para la potencia del efecto Joule  $P_{heat}$  producido en la nanopartícula, así como el cuadrado medio de la intensidad de la corriente ( $I^2$ ) de dicho efecto, lo que conlleva calcular explícitamente el cuadrado de la velocidad media ( $v^2$ ) de la nube de electrones.**

Un electrón de la nube electrónica pierde su energía cinética al chocar con un ión durante un tiempo promedio  $\tau$ .

La potencia media debido a un solo electrón es :  $P = \frac{\frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle}{\tau}$ . La potencia debida a todos los electrones de la nube es:

$$P_{heat} = N \cdot P = \frac{\left( n \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \cdot \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle}{\tau}$$

En el apartado 2.6 a hemos deducido que  $I = n \pi e R^2 v$



$$\langle I^2 \rangle = \frac{(n \pi e R^2)^2 v^2}{\tau} = (n \pi e R^2)^2 \langle v^2 \rangle$$

La ecuación (2) es:  $Q = \frac{4}{3} \pi n e R^3 \Rightarrow n = \frac{3Q}{4\pi e R^3}$ , combinamos con la ecuación anterior.

$$\langle I^2 \rangle = \left( \frac{3Q}{4\pi e R^3} \pi e R^2 \right)^2 \langle v^2 \rangle = \left( \frac{3Q}{4R} \right)^2 \langle v^2 \rangle \quad (8)$$

**2.8b Suponiendo que es posible modelizar el comportamiento del efecto Joule de una nanopartícula como una resistencia óhmica que disipa una potencia  $P_{heat}$ , calcule el valor de  $R_{heat}$ .**

La potencia está relacionada con la intensidad promedio

$$P_{hat} = \langle I^2 \rangle R_{heat} \Rightarrow R_{heat} = \frac{P_{heat}}{\langle I^2 \rangle} = \frac{\left( n \frac{4}{3} \pi R^3 \right) \cdot \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle}{(n \pi e R^2)^2 \langle v^2 \rangle} = \frac{2 m_e}{3 n \pi e^2 R \tau} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{heat} = \frac{2 \cdot 9,109 \cdot 10^{-31}}{3 \cdot 5,85 \cdot 10^{28} \cdot \pi \cdot (1,602 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 10 \cdot 10^{-9} \cdot 5,24 \cdot 10^{-15}} = 2,46 \Omega$$

*La potencia del haz de la luz incidente  $P_{scat}$  disminuye a lo largo del tiempo por dispersión de la nube oscilante de electrones (re-emisión).  $P_{scat}$  depende de la amplitud de la fuente dispersante  $x_0$ , de la carga  $Q$ , de la frecuencia angular  $\omega_p$  y de las propiedades de la luz, su velocidad  $c$  y la permitividad  $\epsilon_0$  en el vacío.  $P_{scat}$  se puede expresar en función de estas cuatro variables con la siguiente fórmula.*

$$P_{scat} = \frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3}$$

**2.9a Utilizando la ecuación anterior, encuentre una expresión para la resistencia de dispersión  $R_{scat}$  (análoga a  $R_{heat}$ ) en un modelo de resistencia equivalente, y calcule su valor numérico.**

$$R_{scat} = \frac{P_{scat}}{\langle I^2 \rangle} = \frac{\frac{Q^2 x_0^2 \omega_p^4}{12 \pi \epsilon_0 c^3}}{\left( \frac{3Q}{4R} \right)^2 \langle v^2 \rangle} = \frac{16 R^2 x_0^2 \omega_p^4}{108 \pi \epsilon_0 c^3 \langle v^2 \rangle} = \frac{4 R^2 x_0^2 \omega_p^4}{27 \pi \epsilon_0 c^3 \langle v^2 \rangle}$$

Teniendo presente que la nube electrónica al estar sometida a un campo armónico oscilante tiene una velocidad máxima  $v=x_0\omega_p$  y una velocidad nula, el valor medio de

$$\langle v^2 \rangle = \frac{x_0^2 \omega_p^2 + 0}{2} = \frac{1}{2} x_0^2 \omega_p^2 \Rightarrow R_{\text{scat}} = \frac{4R^2 x_0^2 \omega_p^4}{27\pi \epsilon_0 c^3 \frac{1}{2} x_0^2 \omega_p^2} = \frac{8R^2 \omega_p^2}{27\pi \epsilon_0 c^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\text{scat}} = \frac{8 \cdot (10 \cdot 10^{-9})^2 \cdot (7,88 \cdot 10^{15})^2}{27 \cdot \pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot (2,998 \cdot 10^8)^3} = 2,45 \Omega$$

*Un modelo para el circuito equivalente anteriormente mencionado es una combinación en serie LCR, la cual está sometida a la acción de un voltaje armónico oscilante  $V = V_0 \cos(\omega_p t)$  determinado por un campo eléctrico  $\vec{E}_0$  de la luz incidente.*

**2.10a Obtenga las ecuaciones para las potencias promedio  $P_{\text{heat}}$  y  $P_{\text{scat}}$  en las que intervenga la amplitud  $E_0$  del campo eléctrico de la luz incidente y la resonancia plasmónica  $\omega = \omega_p$**

Al ser un circuito resonante las resistencias inductiva y capacitiva son iguales y de signo contrario, por lo que solamente se debe tener en cuenta la parte real que es la de las resistencias óhmicas. De acuerdo con los valores promedios

$$\langle V^2 \rangle = (R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2 \langle I^2 \rangle \Rightarrow \langle I^2 \rangle = \frac{\langle V^2 \rangle}{(R_{\text{heat}} + R_{\text{scat}})^2}$$

De acuerdo con lo explicado en el apartado 2.9<sup>a</sup>, escribimos que  $\langle V^2 \rangle = \frac{V_0^2}{2}$ .

En el apartado 2.5b encontramos que  $V_0 = \frac{4}{3} R E_0$

$$\langle I^2 \rangle = \frac{V_0^2}{2(R_{\text{hat}} + R_{\text{scat}})^2} = \frac{\frac{16}{9} R^2 E_0^2}{2(R_{\text{hat}} + R_{\text{scat}})^2} = \frac{8}{9} \frac{R^2 E_0^2}{(R_{\text{hat}} + R_{\text{scat}})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\text{heat}} = R_{\text{heat}} \langle I^2 \rangle = R_{\text{heat}} \frac{8}{9} \frac{R^2 E_0^2}{(R_{\text{hat}} + R_{\text{scat}})^2} = \frac{8}{9} \frac{R_{\text{heat}} R^2 E_0^2}{(R_{\text{hat}} + R_{\text{scat}})^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\text{scat}} = R_{\text{scat}} \langle I^2 \rangle = R_{\text{scat}} \frac{8}{9} \frac{R^2 E_0^2}{(R_{\text{hat}} + R_{\text{scat}})^2} = \frac{8}{9} \frac{R_{\text{scat}} R^2 E_0^2}{(R_{\text{hat}} + R_{\text{scat}})^2}$$

**2.10b Calcule los valores numéricos de  $E_o$ ,  $P_{heat}$  y  $P_{scat}$ .**

$$S = \frac{1}{2} c \epsilon_o E_o^2 = 1,00 \frac{MW}{m^2} \Rightarrow E_o = \sqrt{\frac{2 \cdot S}{c \epsilon_o}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^6}{2,998 \cdot 10^8 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_o = 2,74 \cdot 10^4 \frac{V}{m}$$

$$P_{heat} = \frac{8}{9} \frac{R^2 E_o^2}{(R_{hat} + R_{scat})^2} R_{heat} = \frac{8}{9} \frac{(10 \cdot 10^{-9})^2 \cdot (2,74 \cdot 10^4)^2}{(2,46 + 2,45)^2} \cdot 2,46 = 2,768 \cdot 10^{-9} \cdot 2,46 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{heat} = 6,81 \cdot 10^{-9} W = 6,81 \text{ nW}$$

$$P_{scat} = 2,768 \cdot 10^{-9} \cdot 2,45 = 6,78 \cdot 10^{-9} W = 6,78 \text{ nW}$$

**PRODUCCIÓN DE VAPOR POR ACCIÓN DE LA LUZ.**

*Se prepara una disolución de nanopartículas de plata con una concentración  $n_{np} = 7,3 \cdot 10^{15} \frac{\text{partículas}}{m^3}$ , la cual se coloca dentro de un recipiente transparente de forma rectangular y tamaño  $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1,0 \text{ cm}^3$ , que se ilumina con luz de frecuencia plasmónica de intensidad  $S = 1,00 \frac{MW}{m^2}$  e incidencia perpendicular al recipiente (ver la figura 2.1(e)). La temperatura del agua es  $T_{wa} = 20^\circ C$  y suponemos, basándonos en las observaciones, que en el estado estacionario todo el calentamiento por efecto Joule sobre la nanopartícula da lugar a la producción de vapor de agua a la temperatura de  $T_{st} = 110^\circ C$  sin que aumente la temperatura del agua.*

*La eficiencia termodinámica  $\eta$  del generador de vapor plasmónico se define por el cociente  $\eta = \frac{P_{st}}{P_{tot}}$ , donde  $P_{st}$  es la potencia dedicada a la*

*producción de vapor y  $P_{tot}$  es la potencia total de la luz que penetra en el recipiente.*

*La mayor parte del tiempo las nanopartículas se encuentran rodeadas de vapor en vez de agua por lo que se puede suponer que se encuentran rodeadas de vacío.*

**2.11a Calcule la masa por segundo  $\mu_{st}$  de vapor de agua producido por el generador plasmónico durante la iluminación por luz de intensidad  $S$  a la frecuencia plasmónica.**

**Datos: Calor específico del agua líquida,  $c_{wa}=4,181 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$**

**Calor específico del agua vapor,  $c_{st}=2,080 \cdot 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$**

**Calor latente de vaporización del agua,  $L_{wa}=2,260 \cdot 10^6 \text{ J kg}^{-1}$**

Hallamos las nanopartículas que existen en el recipiente:

$$N = n_{np} V_{recp} = 7,3 \cdot 10^{15} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10^{-6} = 7,3 \cdot 10^{11}$$

En el apartado anterior hemos calculado  $P_{heat}=6,81 \text{ nW}=6,81 \cdot 10^{-9} \text{ W}$

La energía por unidad de tiempo que generan todas las nanopartículas es:

$$7,3 \cdot 10^{11} \cdot 6,81 \cdot 10^{-9} = 4,98 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Esa energía se emplea en calentar el agua desde los 20° C iniciales a 100 °C finales, en pasar el agua del estado líquido a vapor y en calentar el vapor de agua desde 100°C a 110°C, siendo el consumo de energía:

$$\begin{aligned} \mu_{st} \cdot c_{wa} \cdot 80 + \mu_{st} L_{wa} + \mu_{st} c_{st} \cdot 10 &= \mu_{st} \cdot (4,181 \cdot 10^3 \cdot 80 + 2,260 \cdot 10^6 + 2,080 \cdot 10^3 \cdot 10) = \\ = \mu_{st} 2,62 \cdot 10^6 = 4,98 \cdot 10^3 &\Rightarrow \mu_{st} = \frac{4,98 \cdot 10^3}{2,62 \cdot 10^6} = 1,90 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{aligned}$$

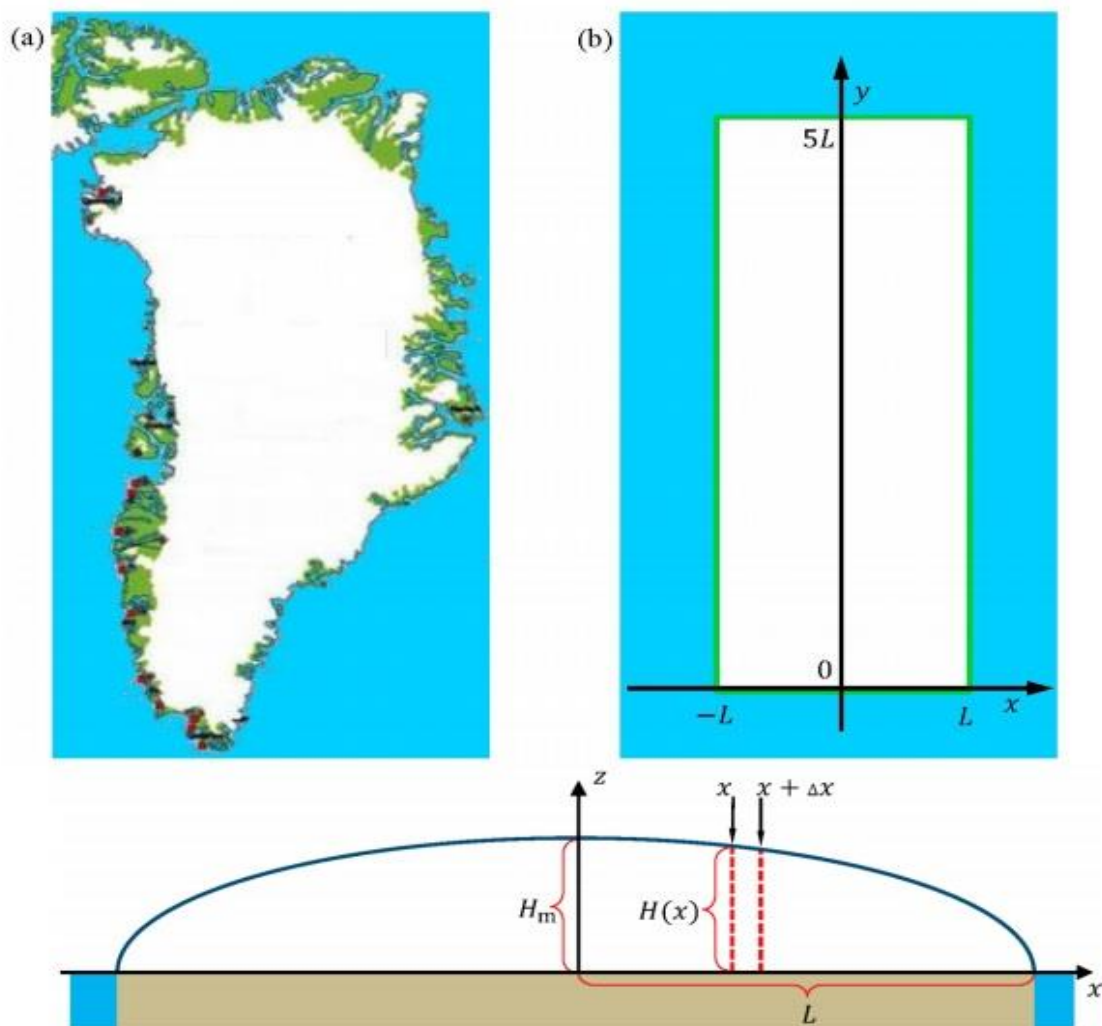
**2.11 b Calcule el valor numérico de la eficacia termodinámica  $\eta$  del generador de vapor**

$$\begin{aligned} P_{tot} = \text{Superficie} \cdot S &= h \times h \times S = 10 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 10^6 = 10^4 \text{ W} \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta &= \frac{4,98 \cdot 10^3}{10^4} = 0,498 \end{aligned}$$

### PROBLEMA 3

#### INTRODUCCIÓN

*Este problema está relacionado con la capa de hielo de Groenlandia, el segundo glaciar más grande del mundo. (figura 3.1 a). De forma ideal Groenlandia se puede modelizar como una isla de forma rectangular de ancho  $2L$  y longitud  $5L$ , estando la tierra al nivel del mar y cubierta completamente por una capa incompresible de hielo de densidad  $\rho_{ice}$  (figura 3.1b). El perfil en altura  $H(x)$  de la capa de hielo es independiente de la coordenada  $y$ , y aumenta desde cero en la costa  $x = \pm L$  hasta  $H_m$  a lo largo del eje medio norte-sur (eje  $y$ ) conocido como eje separación, ver figura 3.1 c.*



*Figura 3.1(a).- Se muestra un mapa de Groenlandia en la que la capa de hielo aparece en blanco, las regiones libres de hielo (regiones costeras) en verde y toda la isla rodeada por el mar en azul. (b). Un modelo elemental de la capa de hielo de Groenlandia es un*

*rectángulo situado en el plano x-y con dimensiones 5L y 2L. La línea separación del hielo es la de máxima altura  $H_m$ , la cual está situada a lo largo del eje y. (c). Un corte vertical (plano x-z) a través de la capa de hielo muestra el perfil de su altura  $H(x)$  (línea azul).  $H(x)$  es independiente de la coordenada y para  $0 < y < 5L$  mientras que cae abruptamente hasta el valor cero cuando  $y=0$  e  $y = 5L$ . El eje z indica la posición de la línea de separación del hielo.. Para mayor claridad las dimensiones en sentido vertical están aumentadas respecto de las horizontales. La densidad  $\rho_{ice}$  es constante. Ayuda. Estas dos fórmulas pueden ser de ayuda en este problema.*

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3} \quad ; \quad (1+x)^a = 1+ax, \text{ para } |ax| \ll 1$$

### **EL PERFIL DE ALTURA DE LA CAPA DE HIELO.**

*Con escalas de tiempo pequeñas es posible considerar el glaciar como sistema hidrostático incompresible, que tiene un perfil de altura determinado por la función  $H(x)$ .*

**3.1 Escriba una expresión para la presión  $p(x,z)$  dentro de la capa de hielo, en función de la altura vertical z por encima de la tierra y a una distancia x de la línea de separación . Desestimar el efecto de la presión atmosférica.**

Consideremos un punto P que está sobre la línea de altura  $H(x)$  y que dista del suelo z. Este punto dista  $H(x)-z$  respecto la superficie del hielo. La presión hidrostática en ese punto es:

$$p = \rho_{ice} g [H(x) - z]$$

*Considere un trozo (rebanada) vertical de la capa de hielo que se encuentra en equilibrio abarcando un área  $\Delta x \Delta y$  entre x y  $x+\Delta x$ , ver la línea de puntos de la figura 3.1 (c). El tamaño de  $\Delta y$  no tiene influencia en la cuestión.*

*La componente resultante horizontal  $\Delta F$  de los dos lados verticales de la rebanada, que es originada por la diferencia de alturas, está contrarrestada por una fuerza de rozamiento  $\Delta F = S_b \Delta x \Delta y$  de la tierra sobre la base  $\Delta x \Delta y$ , siendo  $S_b = 100 \text{ kPa}$ .*

**3.2a Para un determinado valor de x mostrar que en el límite  $\Delta x \rightarrow 0$  ;  $S_b = kH \frac{dH}{dx}$  y determinar k.**

**Datos: Densidad del hielo,  $\rho_{ice} = 0,917 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ; aceleración de la gravedad ,  $g = 9,82 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$**

En la figura 1.3 se hace un esquema de la rebanada considerada en la capa de hielo. Las dos paredes verticales distan  $\Delta x$  y su altura desde el suelo a la superficie del hielo es función de la coordenada  $x$  y se representa por  $H(x)$ . Sobre la pared izquierda se ha considerado un rectángulo de altura infinitesimal  $dz$  y que la distancia del suelo a él es  $z$ , esta variable tiene por límites  $z=0$  en el suelo y  $z=H(x)$  en la superficie del hielo.

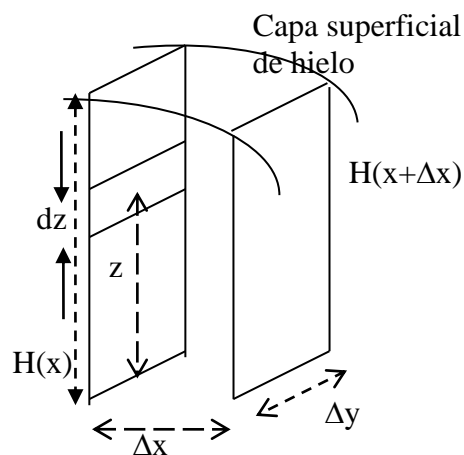


Fig.1.3

La presión en el rectángulo es  $p = \rho_{ice}g[H(x) - z]$  y la fuerza que actúa sobre él:

$$dF = \rho_{ice}g[H(x) - z] \cdot \Delta y \cdot dz$$

La fuerza sobre toda la pared vertical de la izquierda.

$$F = \int_0^{H(x)} \rho_{ice}g[H(x) - z] \cdot \Delta y \cdot dz = (\rho_{ice}g \Delta y) \left[ \int_0^{H(x)} [H(x) - z] \cdot dz \right] = (\rho_{ice}g \Delta y) \left[ H(x)z - \frac{z^2}{2} \right]_0^{H(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = (\rho_{ice}g \Delta y) \frac{H^2(x)}{2}$$

Sobre la pared vertical de la derecha actúa una fuerza que tiene la misma expresión pero es menor ya que  $H(x)$  es algo más pequeña que en la pared de la izquierda, por consiguiente, hay una diferencia de fuerzas dirigida hacia la derecha que es equilibrada por la fuerza de rozamiento que actúa hacia la izquierda. Si admitimos que la distancia entre las paredes es un infinitésimo, esto es,  $dx$ , y diferenciamos la ecuación anterior teniendo presente que  $H$  es función de la coordenada  $x$ , resulta.

$$dF = \frac{\rho_{ice}g \Delta y}{2} \cdot 2H \cdot \frac{dH}{dx} dx = S_b \Delta y dx \Rightarrow S_b = \rho_{ice}g H \frac{dH}{dx} = kH \frac{dH}{dx} \quad (1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 0,917 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3} \cdot 9,82 \frac{m}{s} = 9,00 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^2 s}$$

**3.2b Obtenga una expresión para la función que determina la altura del glaciar  $H(x)$  en función de  $\rho_{ice}$ ,  $g$ ,  $L$ ,  $S_b$  y la distancia  $x$  al eje separación. El resultado indicará que la máxima altura del glaciar  $H_m$  es proporcional a**

$$\underline{H_m \propto L^{\frac{1}{2}}}$$

En la ecuación (1) la variación de  $H$  con  $x$  es negativa ya que al crecer  $x$ ,  $H$  disminuye. Por consiguiente, si resolvemos (1) entonces debemos incluir el signo menos.

$$\int -\frac{S_b}{\rho_{ice} g} dx = \int H dH \Rightarrow -\frac{S_b}{\rho_{ice} g} x = \frac{H^2}{2} + Cte$$

Para hallar la constante utilizamos la condición de que cuando  $x = +L$  la altura de la capa de hielo es cero.

$$Cte = -\frac{S_b}{\rho_{ice} g} L \Rightarrow \frac{H^2}{2} = -\frac{S_b}{\rho_{ice} g} x + \frac{S_b}{\rho_{ice} g} L \Rightarrow H = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice} g} (L - x)} \quad (2)$$

Si en la ecuación (2) hacemos  $x = 0$ , estamos en el eje de separación, donde la altura de la capa de hielo es máxima,  $H_m$

$$H_m = \sqrt{\frac{2S_b L}{\rho_{ice} g}} \propto L^{\frac{1}{2}}$$

**3.2c Determine el exponente  $\gamma$  de proporcionalidad entre el volumen de la capa de hielo  $V_{ice}$  y el área  $A$  de la superficie rectangular  $V_{ice} \propto A^\gamma$**

Escogemos en la capa de hielo dos planos paralelos que distan entre sí  $dx$ . La altura de esos planos es  $H(x)$  y su longitud  $5L$ . El área vista de frente comprendida entre los dos planos es.

$$dS = H(x)dx = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice} g}} \sqrt{L - x} dx = K\sqrt{L - x} dx$$

El volumen del hielo comprendido entre esos planos es:

$$dV = dS \cdot 5L = 5KL\sqrt{L - x} dx$$

El volumen total del hielo lo obtenemos integrando la ecuación anterior entre 0 y  $L$  y multiplicando por 2.

$$V_{ice} = 10KL \int_0^L \sqrt{L - x} dx = 10KL \int_0^L \sqrt{L \left(1 - \frac{x}{L}\right)} dx = 10KL^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx$$

En la integral anterior hacemos el cambio de variable



$$1 - \frac{x}{L} = a^2 \Rightarrow -\frac{dx}{L} = 2ada \Rightarrow dx = -2La da$$

$$\int_0^L \sqrt{1 - \frac{x}{L}} dx = -2L \int_0^L a^2 da = -2L \left[ \frac{a^3}{3} \right]_0^L = -\frac{2}{3}L \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^L = -\frac{2}{3}L \left[ -\left(1^{\frac{3}{2}}\right) \right] = \frac{2}{3}L$$

$$V_{\text{ice}} = 10KL^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3}L = 10KL^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow V_{\text{ice}} \propto L^{\frac{5}{2}}$$

Para el área  $A \propto L^2$

$$V_{\text{ice}} \propto A^\gamma \Rightarrow L^{\frac{5}{2}} \propto L^{2\gamma} \Rightarrow \frac{5}{2} = 2\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{5}{4}$$

### UNA CAPA DE HIELO DINÁMICA

*Para una escala de tiempos grande, el hielo se comporta como un fluido viscoso incompresible, el cual por acción de la gravedad fluye desde el centro hasta la costa. En este modelo, el hielo mantiene constante la función  $H(x)$  que determina su altura, ya que la acumulación de nieve de precipitación en la región central se equilibra con la que se funde en la costa. En resumen la geometría de la capa de hielo es la de la figura 3.1(b) y (c) sigue las siguientes suposiciones:*

- 1) *El hielo fluye en el plano  $x$ - $z$  desde el eje separación ( eje  $y$ )*
- 2) *La tasa de acumulación  $c$ (m/año) en la región central es constante*
- 3) *El hielo solamente abandona el glaciar cuando se funde en la costa  $x = \pm L$ .*
- 4) *La componente horizontal de la velocidad  $v_x(x) = dx/dt$  con que fluye el hielo es independiente de  $z$ .*
- 5) *La componente vertical  $v_z(z) = dz/dt$  con que fluye el hielo es independiente de  $x$ .*

*Considerar únicamente la región central  $|x| \ll L$ , próxima al medio de la capa de hielo, en donde las variaciones de altura de la capa de hielo son muy pequeñas y se pueden despreciar totalmente, es decir,  $H(x) \approx H_m$ .*

#### 3.3 Utilice la conservación de la masa para encontrar una expresión de la velocidad de flujo horizontal $v_x(x)$ en función de $c$ , $x$ y $H_m$ .

La velocidad con que se desliza una rebanada de hielo del glaciar tiene dos componentes uno positivo por el desplazamiento hacia el mar siguiendo el eje  $x$  y otro en sentido negativo del eje  $z$ , ya que vamos desde alturas mayores a nulas en el mar.

La tasa de acumulación indica los metros que se cubre en el glaciar cada año. Supongamos una rebanada de altura  $H_m$  inicialmente en el eje y que se desplaza con velocidad horizontal

$$v_x(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - 0}{\Delta t}$$

Cuando se ha deslizado hacia la derecha y hacia abajo, deja un hueco que debe ser rellenado por la nieve ya que según el enunciado la tasa de acumulación es constante, y la densidad del hielo también, por tanto, en el tiempo  $\Delta t$  el hueco es cubierto hasta la altura  $H_m$ .

$$c \cdot \Delta t = H_m \Rightarrow \Delta t = \frac{H_m}{c} \Rightarrow v_x(x) = \frac{x}{\frac{H_m}{c}} = \frac{c x}{H_m} \quad (3)$$

*Al suponer que el hielo es incompresible (o lo que es lo mismo que su densidad es constante), se deduce que la conservación de la masa implica la siguiente restricción en las componentes de la velocidad del flujo de hielo.*

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0$$

### **3.4 Escriba una expresión de la dependencia de z de la velocidad $v_z(z)$**

$$\begin{aligned} \frac{dv(z)}{dz} &= -\frac{dv(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{c x}{H_m} \right) = -\frac{c}{H_m} \Rightarrow \int dv(z) = \int -\frac{c}{H_m} dz \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(z) = -\frac{c z}{H_m} \quad (4) \end{aligned}$$

*Una pequeña partícula de hielo situada en la superficie del glaciar, en la posición inicial  $(x_i, H_m)$ , se desplazará, a medida que el tiempo transcurre, a lo largo de una trayectoria  $z(x)$  en el plano vertical  $xz$ .*

### **3.5 Obtenga una expresión para la citada trayectoria de flujo $z(x)$ .**

A partir de la ecuación (3)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c x}{H_m} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \frac{c}{H_m} \int dt \Rightarrow \ln x = \frac{c t}{H_m} + Cte$$

Cuando  $t=0$ , la partícula de hielo está en la posición  $x_i$ .

$$\ln x = \frac{c t}{H_m} + \ln x_i \Rightarrow \ln \frac{x}{x_i} = \frac{c t}{H_m} \quad (5)$$

A partir de la ecuación (4).

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{cz}{H_m} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = -\frac{c}{H_m} \int dt \Rightarrow \ln z = -\frac{ct}{H_m} + Cte$$

Cuando  $t=0$ , la partícula de hielo está en la posición  $H_m$ .

$$\ln z = -\frac{ct}{H_m} + \ln H_m \Rightarrow \ln \frac{z}{H_m} = -\frac{ct}{H_m} \quad (6)$$

Dividimos la ecuación (5) entre la (6)

$$\frac{\ln \frac{x}{x_i}}{\ln \frac{z}{H_m}} = \frac{\frac{ct}{H_m}}{\frac{ct}{H_m}} = -1 \Rightarrow \ln \frac{x}{x_i} = -\ln \frac{z}{H_m} = \ln \frac{H_m}{z} \Rightarrow \frac{x}{x_i} = \frac{H_m}{z} \Rightarrow z = \frac{H_m x_i}{x}$$

## INDICADORES DE LA EDAD Y CLIMA DE LA CAPA DE HIELO DINÁMICA.

*Basándose en las componentes de la velocidad  $v_x(x)$  y  $v_z(z)$  se puede estimar la edad  $\tau(z)$  del hielo para una determinada profundidad  $H_m-z$  respecto de la superficie de la capa de hielo.*

### 3.6 Obtenga una expresión para la edad $t(z)$ en función de la altura $z$ por encima de la tierra justamente en el eje de separación $x=0$ .

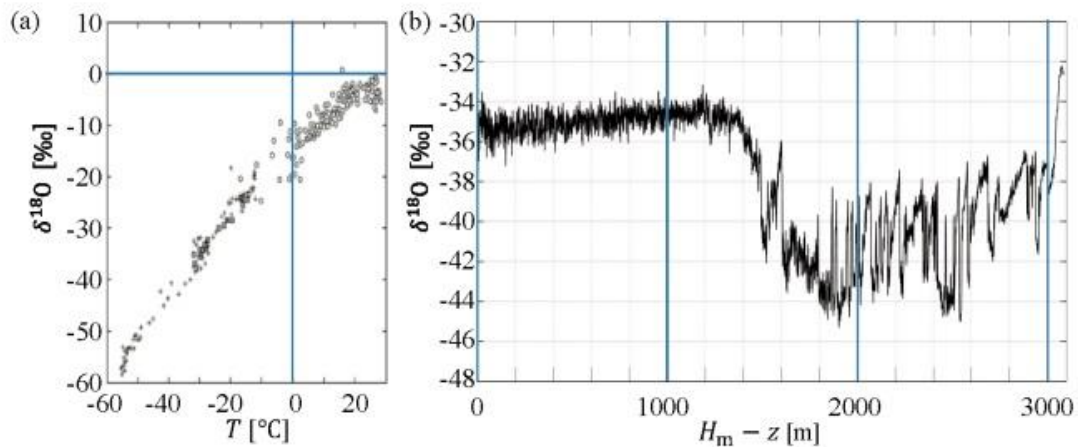
Hemos visto en 3.5 la ecuación  $\ln z = -\frac{ct}{H_m} + Cte$  y hemos hallado la Cte con la condición  $t=0, z = H_m$ , luego a una profundidad  $H_m-z$  respecto de la capa de hielo o lo que es lo mismo a una altura  $z$  respecto del suelo, el tiempo  $t = \tau$ .

$$\ln z = -\frac{c\tau}{H_m} + \ln H_m \Rightarrow -\frac{H_m}{c} \ln \frac{z}{H_m} = \tau \Rightarrow \tau = \frac{H_m}{c} \ln \frac{H_m}{z} \quad (7)$$

*Si se analiza un testigo de hielo que se ha extraído por una perforadora del interior de la capa de hielo de Groenlandia puede revelar cambios climáticos ocurridos en el pasado. Uno de los mejores indicadores es  $\delta^{18}O$  definido por la relación:*

$$\delta^{18}O = \frac{R_{ice} - R_{ref}}{R_{ef}}$$

Donde  $R = \frac{^{18}\text{O}}{^{16}\text{O}}$  indica la relativa abundancia de los dos isótopos del oxígeno. La referencia  $R_{ref}$  se basa en la composición isotópica de los océanos en las proximidades del Ecuador.



**Figura 3.2(a).**- Relación observada entre  $\delta^{18}\text{O}$  en la nieve frente a la temperatura media anual  $T$ . **b)** Medidas de  $\delta^{18}\text{O}$  frente a la profundidad  $H_m - z$  obtenidas de muestras de hielo extraídas entre la superficie y la roca (tierra firme) en un lugar determinado del hielo de Groenlandia, donde  $H_m = 3060\text{m}$ .

Las observaciones sobre el hielo de Groenlandia indican que  $\delta^{18}\text{O}$  en la nieve varía aproximadamente de forma lineal con la temperatura (fig.3.2 a) Admitiendo que esto siempre haya sido así,  $\delta^{18}\text{O}$ , medido en el testigo de hielo extraído a una profundidad  $H_m - z$ , nos permite estimar la temperatura  $T$  en las proximidades de Groenlandia en el tiempo  $\tau(z)$ .

Medidas realizadas a lo largo de los 3060 m de espesor en el hielo de Groenlandia indican que existe un cambio brusco de temperatura a la profundidad de 1492m (figura 3.2b), indicando el final de la última era glacial. La edad del hielo comenzó hace 120000 años correspondiente a una profundidad de 3040 m y la actual era interglacial empezó hace 11700 años correspondiendo a una profundidad de 1492 m.

Suponer que estos dos periodos se pueden describir mediante dos tasas distintas de acumulación,  $c_{ia}$  (edad del hielo) y  $c_{ig}$  (edad interglacial). Admitir que  $H_m$  es constante a lo largo de estos 120 000 años.

### 3.7a Determine las tasas de acumulación $c_{ia}$ y $c_{ig}$

De la figura 3.2b se deduce que hay dos periodos perfectamente diferenciados. Los testigos de hielo extraídos profundizando en la capa de hielo desde la superficie nos indican que desde la altura cero (superficie del hielo) hasta una profundidad de 1492 m corresponde a un periodo denominado interglacial y de duración 11700 años el valor de  $\delta^{18}\text{O}$  se ha mantenido por término medio constante (aunque haya fluctuaciones) y ese valor llevado a la gráfica 3.2 a indica una temperatura alrededor de  $-30^\circ\text{C}$ . El segundo periodo que abarca 120 000 años y denominado era glacial el valor de  $\delta^{18}\text{O}$  se ha hecho más negativo y eso conlleva que la temperatura es más baja que en el periodo interglacial..

Para calcular  $c_{ig}$  hacemos uso de la ecuación (7).

$$c_{ig} = \frac{H_m}{\tau} \ln \frac{H_m}{z} = \frac{3060}{11700 \text{ años}} \ln \frac{3060}{z}$$

En la figura 32 b,  $H_m - z = 1492$  luego  $z = H_m - 1492$

$$c_{ig} = \frac{3060}{11700} \ln \frac{3060}{3060 - 1492} = 0,1749 \frac{\text{m}}{\text{año}}$$

Si desde la capa superficial de hielo tomamos testigos en profundidad observamos que existen dos periodos de tiempo, uno de 11700 años y otro de 120000 años, el primero con tasa de acumulación  $c_{ig} = 0,1749 \text{ m/año}$  y el segundo con tasa de acumulación  $c_{ia}$ .

Recurrimos a la ecuación del apartado 3.5

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{cz}{H_m} \Rightarrow -H_m \int \frac{dz}{z} = \int c dt$$

Los límites de la primera integral son desde  $z = H_m$  (capa de la superficie) hasta  $z = H_m - 3040$ . La segunda integral tiene dos términos: el interglacial desde cero a 11700 años y el glacial desde 11700 hasta 120 000 años.

$$-H_m \left| \ln z \right|_{H_m}^{H_m - 3040} = c_{ig} \left| t \right|_0^{11700} + c_{ia} \left| t \right|_{11700}^{120000} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_m \ln \frac{H_m}{H_m - 3040} = c_{ig} \cdot 11700 + c_{ia} (120000 - 11700) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_{ia} = \frac{3060 \cdot \ln \frac{3060}{3060 - 3040} - 0,1749 \cdot 11700}{108300} = 0,1232 \frac{\text{m}}{\text{año}}$$

**3.7b A partir de la figura 3.2 encuentre el cambio de temperatura en la transición de la edad del hielo a la edad interglacial.**

De la figura 3.2 b , en la edad interglacial  $\delta^{18}\text{O}$  es aproximadamente -35 y en la glacial aproximadamente -43. Llevados a la figura 3.2a se obtienen unas temperaturas aproximadas de  $-30^\circ\text{C}$  y  $-40^\circ\text{C}$  , luego al pasar de la edad glacial a la interglacial la temperatura aumento en  $-30(-40)$  , aproximadamente  $10^\circ\text{C}$ .

### **ELEVACIÓN DEL NIVEL DEL MAR POR FUSIÓN DE LA CAPA DE HIELO DE GROENLANDIA.**

*La completa fusión del hielo de Groenlandia daría lugar a una elevación del nivel de los océanos. Una manera muy aproximada de calcular esta elevación es suponer que la elevación sería global y uniforme sobre una superficie de  $A_o=3,61.10^{14} \text{ m}^2$ .*

**3.8 Calcule la elevación global del nivel del mar si todo el hielo de Groenlandia se fundiese, siendo el área del rectángulo (según el modelo 3.1(b) )  $A_G=1,71.10^{12} \text{ m}^2$ .**

**Datos: Densidad del hielo,  $\rho_{ice}=0,917.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  ; densidad del agua  $\rho_{wa}=0,998.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$**

En el apartado 3.2c hemos deducido que el volumen de la capa de hielo de Groenlandia es:

$$V_{ice} = 10 \text{ KL}^2 \cdot \frac{5}{3}$$

Siendo  $10 \text{ L}^2 = A_G$  y  $K = \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice} g}}$  , luego:

$$V_{ice} = \frac{20}{3} \sqrt{\frac{2S_b}{\rho_{ice} g}} \left( \frac{A_G}{10} \right)^{\frac{5}{4}} = \frac{20}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 10^3}{0,917 \cdot 10^3 \cdot 9,82}} \cdot \left( \frac{1,71 \cdot 10^{12}}{10} \right)^{\frac{5}{4}} = 3,45 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$$

Este hielo al convertirse en agua líquida disminuye su volumen.

$$V_{ice} \rho_{ice} = V_{wa} \rho_{ag} \Rightarrow V_{wa} = V_{ice} \frac{\rho_{ice}}{\rho_{wa}} = 3,45 \cdot 10^{15} \frac{0,917 \cdot 10^3}{0,998 \cdot 10^3} = 3,17 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$$

Este volumen de agua repartido de forma uniforme sobre el área  $A_o$  da lugar a una elevación de:

$$h = \frac{3,17 \cdot 10^{15}}{3,61 \cdot 10^{14}} = 8,78 \text{ m}$$

*La masa del hielo de Groenlandia ejerce un empuje gravitacional sobre el océano que la rodea. Si la capa se fundiese, esta “marea” local se perdería y el nivel del mar bajaría en las proximidades de*

*Groenlandia, un efecto que contrarrestaría parcialmente la elevación del nivel del mar calculado anteriormente*

*Para estimar la magnitud de este empuje gravitacional sobre el agua, se establece un modelo en el que la capa de hielo de Groenlandia se considera como si fuese una masa puntual localizada en el nivel del suelo. Copenhague se encuentra a una distancia de 3500 km medidos a lo largo de la superficie de la Tierra respecto a la posición de esa masa puntual. La Tierra se considera como una esfera, teniendo un océano global ocupando una superficie  $A_E = 5,10 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ . Los posibles efectos de la rotación terrestre se desprecian.*

**3.9 Con este modelo determine la diferencia  $h_{CPH} - h_{OPP}$  entre el nivel del mar en Copenhague ( $h_{CPH}$ ) y en un lugar diametralmente opuesto a Groenlandia ( $h_{OPP}$ )**

En la figura 2.3 se representa por un círculo pequeño la masa del hielo en Groenlandia ( $m_G$ ) y a 3500 km de distancia la ciudad de Copenhague. Representamos por  $h_{CPH}$  la altura de la capa de agua en Copenhague respecto de la superficie terrestre y por  $h_{OPP}$  en el punto opuesto a Groenlandia. Consideramos una masa  $m$  en lo alto de ambas capas de agua y evaluamos la energía potencial

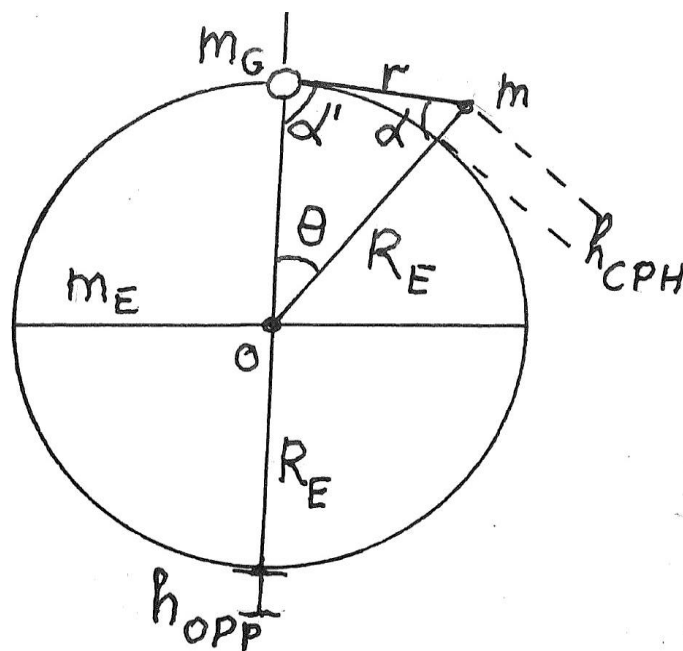


Fig. 2.3

$m_E$  es la masa de la Tierra,  $m_G$  la masa de la capa de hielo en Groenlandia,  $r$  la distancia en línea recta desde  $m_G$  a  $m$

$$U_C = -\frac{G m_E m}{R_E + h_{CPH}} - \frac{G m_G m}{r} ; U_O = -\frac{G m_E m}{R_E + h_{OPP}} - \frac{G m_G m}{2R_E}$$

El signo menos aparece porque se considera como referencia la energía potencial nula en el infinito.

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo OmGM.

$$\frac{\text{sen } \theta}{r} = \frac{\text{sen } \alpha}{R_E + h_{CPH}} \approx \frac{\text{sen } \alpha}{R_E} \Rightarrow r = \frac{R_E \text{ sen } \theta}{\text{sen } \alpha}$$

Dado que  $h_{CPH}$  es mucho menor que  $R_E$ , resulta que el triángulo OmGM puede considerarse que es isósceles  $\alpha \approx \alpha'$  y de ello se deduce que:

$$\theta + 2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$$

$$r = \frac{R_E \text{ sen } \theta}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{R_E \text{ sen } \theta}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

$$U_C - U_O = -\frac{G m_E m}{R_E + h_{CPH}} - \frac{G m_G m}{r} + \frac{G m_E m}{R_E + h_{OPP}} + \frac{G m_G m}{2R_E}$$

Sin apenas error,

$$R_E + h_{CPH} \approx R_E + h_{OPP} \Rightarrow \frac{G m_E m}{R_E + h_{CPH}} \approx \frac{G m_E m}{R_E + h_{OPP}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_C - U_O = -\frac{G m_G m \cos \frac{\theta}{2}}{R_E \text{ sen } \theta} + \frac{G m_G m}{2R_E} = -\frac{G m_G m}{R_E} \left( \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\text{sen } \theta} - \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

Tanto  $U_C$  como  $U_O$  son próximos a la superficie terrestre y por ello podemos escribir:

$$U_C - U_O = m g (h_{CPH} - h_{OPP}) \quad (9)$$

Siendo  $g$  la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre.

$$g = \frac{G m_E}{R_E^2}$$



Ahora el criterio de medir es diferente al de antes ya que se mide con respecto a la superficie terrestre, siendo la energía potencial cero en ella. Podemos igualar las ecuaciones (8) y (9) con sus valores absolutos

$$m \frac{G m_E}{R_E^2} (h_{CPH} - h_{OPP}) = \frac{G m_G m}{R_E} \left( \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\text{sen } \theta} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow h_{CPH} - h_{OPP} = \frac{m_G R_E}{m_E} \left( \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\text{sen } \theta} - \frac{1}{2} \right)$$

En el apartado 3.8 hemos calculado el volumen de hielo  $V_{ice} = 3,45 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ . El ángulo  $\theta$  que forma Copenhague con la masa de hielo es:

$$\text{arco} = \theta R_E \Rightarrow \theta = \frac{3500 \cdot 10^3}{6,38 \cdot 10^6} \text{ rad} = \frac{3500 \cdot 10^3}{6,38 \cdot 10^6} \frac{180}{\pi} \text{ }^\circ = 31,43^\circ$$

$$h_{CPH} - h_{OPP} = \frac{3,45 \cdot 10^{15} \cdot 0,917 \cdot 10^3 \cdot 6,38 \cdot 10^6}{5,97 \cdot 10^{24}} \left( \frac{\cos \frac{31,43^\circ}{2}}{\text{sen } 31,43^\circ} - \frac{1}{2} \right) = 4,55 \text{ m}$$