PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez
Ricardo David Fernández Cruz

Madrid 2014

XLV. OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. 2014. KAZAKHSTAN

PROBLEMA 1

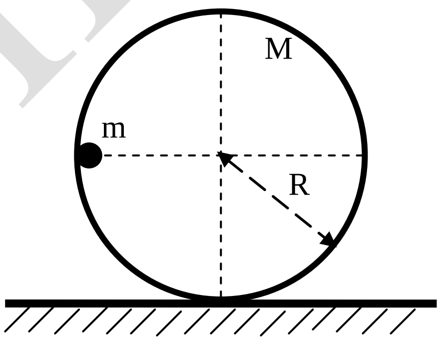
Este problema consta de tres partes independientes

PARTE A. Mecánica

Sobre la parte interior de un cilindro hueco de masa M y radio R, con un espesor de pared pequeño, se coloca un disco de masa m. Inicialmente el cilindro está en reposo sobre un suelo horizontal y el disco se encuentra localizado a una altura R por encima del suelo, tal como puede observarse en la figura

Encontrar la fuerza de interacción entre el disco y el cilindro justamente en el instante en que el disco pasa por la parte inferior de su trayectoria.

Suponer que entre el disco y la parte interior del cilindro no existe rozamiento y que el cilindro se desplaza por el suelo sin deslizar.



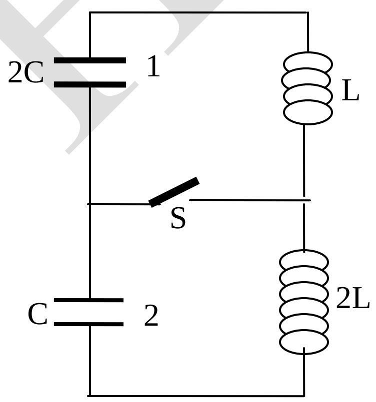
PARTE B. Física molecular

Una burbuja de radio r= 5,00 cm contiene un gas ideal diatómico, la película jabonosa tiene un espesor h= 10,0 μm, dicha burbuja está situada en el vacío. La tensión superficial de la disolución jabonosa es σ= 4,00.10^{-2} N/m y su densidad ρ = 1,10 g/cm^3. 1) Determinar la capacidad molar del gas del interior de la burbuja de tal forma que cuando a éste se le suministra calor de forma muy lenta, la burbuja permanece en equilibrio mecánico. 2) Encontrar la expresión de la frecuencia angular ω de las pequeñas oscilaciones radiales de la burbuja, en el supuesto de que la capacidad calorífica de la película jabonosa sea mucho mayor que la del gas. Suponer que el equilibrio térmico se alcanza en un periodo de tiempo mucho menor que el periodo de las oscilaciones.

Ayuda. Laplace demostró que existe una diferencia de presión dentro y fuera de una superficie curvada originada por la tensión superficial de la interfase entre el líquido y el gas, según la expresión $\Delta p = \dfrac{2\sigma}{r}$

PARTE C. Electricidad

En el instante inicial el interruptor S (ver figura) está abierto y el condensador 1 de capacidad 2C posee una carga q_o ; el condensador 2 de capacidad C está descargado y por las bobinas, de coeficientes de autoinducción L y 2L respectivamente, no pasa corriente.



El condensador 1 comienza a descargarse y justamente cuando la corriente que circula por las bobinas es máxima, se cierra de forma instantánea el interruptor S. Determinar la intensidad máxima de corriente que circula por S.

PROBLEMA 2. Ecuación de estado de van der Waals

La conocida ecuación de estado de los gases ideales parte de la suposición de que las moléculas ni tienen tamaño ni interactúan entre sí. En realidad sí que tienen un tamaño finito e interaccionan entre ellas.
Todas las partes de este problema se refieren a un mol de agua.

Parte A. Ecuación de estado de un gas no ideal

Teniendo en cuenta el tamaño finito de las moléculas la ecuación de estado de un gas se escribe como

$$P(V-b)=RT$$

P es la presión del gas, V el volumen ocupado por el gas y T la temperatura, R es la constante de los gases, b representa una constante extraída a partir del volumen de las moléculas.

A1. Estimar b y expresarla en función del diámetro d de las moléculas

Van der Waals propuso una ecuación, en la que se incluía un término en la presión para considerar las fuerzas intermoleculares, que de forma aproximada describe los estados gaseoso y líquido de la materia.

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$$

En dicha ecuación a es una constante.

A una temperatura T inferior a la de un valor crítico T_C la ecuación de van der Waals, cundo se representa en un diagrama P-V, proporciona una isoterma (curva 1 de la figura 1) denominada isoterma de van der Waals, En la misma gráfica la curva 2 representa a un gas ideal para esa misma temperatura.

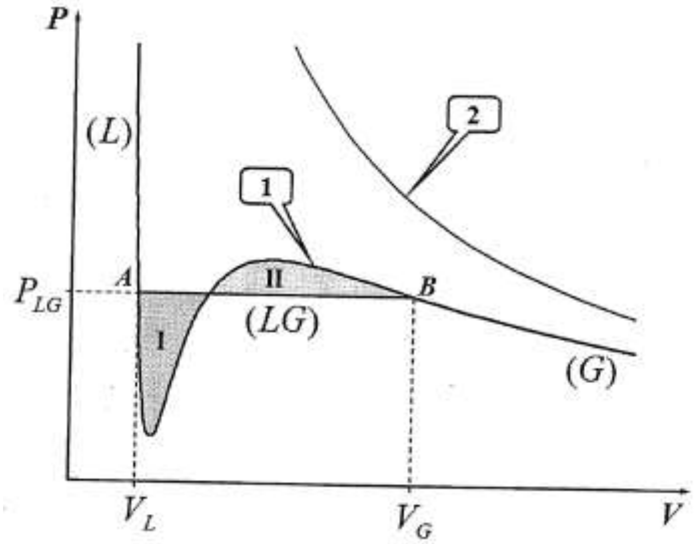


Fig.1.- Isoterma de van der Waals de gas líquido (curva 1) y la isoterma de un gas ideal (curva 2).

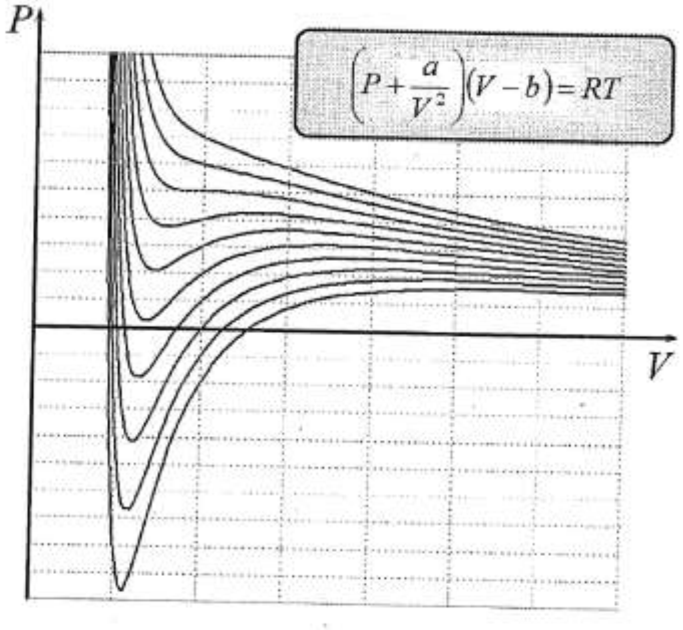


Fig.2.- Diferentes isotermas de la ecuación de van der Waals

La isoterma 1 de la figura 1 se separa de la isoterma real porque entre B y A existe una línea recta trazada a una presión constante P_{LG} Este segmento recto se localiza entre los volúmenes V_L (líquido) y V_G (gas) y representa que en esa zona coexisten en equilibrio las fases líquida y gaseosa. A partir de la segunda ley de la termodinámica J. Maxwell demostró que P_{LG} debe escogerse cuando las áreas I y II (sombradas en la figura 1) sean iguales.

Si se aumenta la temperatura, el segmento recto AB de la isoterma se reduce a un punto en el que la temperatura y la presión son T_c y $P_{GL}=P_C$. Los parámetros T_C y P_C se denominan <u>críticos</u> y por la vía experimental se miden con gran precisió

A3. ***Para el agua, T_C=647 K y P_C=2,2.10^7 Pa. Calcular las constantes a y b del agua***

A4. ***Estimar el diámetro de una molécula de agua***

Parte B. **Propiedades de gas y líquido**

Esta parte del problema se refiere a las propiedades del agua en los estados gaseoso y líquido a la temperatura de T = 100ºC. La presión del vapor saturado a esa temperatura vale $P_{GL}= P_o = 1,0.10^5$ Pa y el volumen molar del agua es $\mu= 1,8.10^{-2}$ kg/mol.

Estado gaseoso

Resulta razonable suponer que V_G>>b es válida para la descripción de las propiedades del agua en el estado gaseoso

B1. ***Obtener la formula de V_G expresándola en función de R, T , p_o y a***

Si empleamos la ecuación de los gasea ideales se obtiene prácticamente el mismo volumen.

B2. ***Obtener el porcentaje de disminución del volumen debido a las fuerzas intermoleculares.*** $\dfrac{\Delta V_G}{V_{Go}} = \dfrac{V_{Go} - V_G}{V_{Go}}$

Si el volumen del sistema se reduce por debajo de V_G el gas comienza a condensase. No obstante un gas muy puro puede permanecer en ese estado metaestable, llamado vapor subenfriado, hasta que el volumen alcanza un cierto valor $V_{G\,min}$

B3. ***Evaluar cuántas veces el volumen del vapor de agua se puede reducir para que el gas permanezca en ese estado metaestable. En otras palabras determine el cociente V_G/V_{Gmin}***

<u>Estado líquido</u>

Para el estado líquido resulta razonable admitir que $P \ll a/V^2$

B4. ***Expresar el volumen del agua líquida V_L en función de a , b , R y T***

Suponiendo que $bRT \ll a$ encontrar las siguientes características del agua. ¡ <u>No se sorprenda si alguno de los datos obtenidos no coinciden con los valores tabulados conocidos</u>!

B5. ***Expresar la densidad del agua líquida en función de μ, a , b y R y calcular su valor***

.

Nosotros opinamos que no deberían haberse incluido estos apartados en el problema, dado que los valores obtenidos tan lejos de los reales pueden desorientar al alumno.

Parte C. **Sistema líquido –gas**

La regla de Maxwell implica que sean iguales las áreas I y II en la figura 1 determinadas por la recta AB que corta a la isoterma de van der Waals junto con las aproximaciones realizadas en la parte B, conducen a que la presión de vapor p_{LG} dependa de la temperatura según la ecuación

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}$$

en la que A y B son constantes que pueden expresarse en función de a y b

$$A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1 \quad ; \quad B = -\frac{a}{bR}$$

W.Thomson demostró que la presión del vapor saturado depende de la curvatura de la superficie del líquido. Considerese un líquido que no moja al capilar (ángulo de contacto 180º), al sumergir el capilar en el líquido el nivel disminuye respecto de la superficie libre del líquido debido a la tensión superficial.(ver la figura 3).

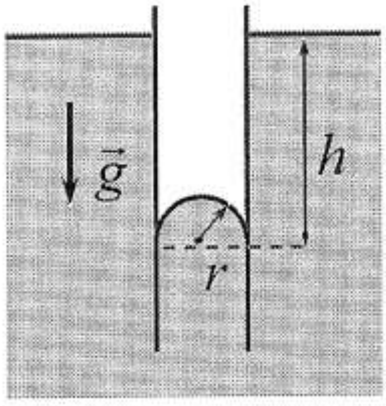


Fig.3.- Un tubo capilar está sumergido en un líquido que no moja al material del capilar.

C1. Encontrar el pequeño cambio de presión Δp_T del vapor saturado sobre la superficie curvada del líquido, expresándolo en función de la densidad del vapor, ρ_S, la densidad del líquido, ρ_L, la tensión superficial, σ y el radio de la superficie ,r.

Los estados metaestables considerados en el apartado B3 se utilizan ampliamente en experimentos reales como la cámara de niebla empleada en el registro de partículas elementales. También ocurre en fenómenos naturales, tales como la formación de rocío matinal en donde el vapor subenfriado se condensa formando gotas. Las gotas muy pequeñas se evaporan rápidamente pero las que tienen cierto tamaño pueden crecer aún más.

PROBLEMA 3. Un modelo simple de la descarga en un gas

Una corriente eléctrica que circula a través de un gas recibe el nombre de descarga eléctrica en un gas. Existen diversos tipos de descargas, como la de las lámparas incandescentes, la descarga en arco en la realización de soldaduras y la conocida descarga eléctrica entre las nubes y la tierra en forma de rayo.

Parte A. **<u>Descarga en un gas no autosmantenida</u>**

En esta parte del problema se estudia la descarga de un gas no automantenida. Para mantener la descarga de forma permanente se necesita que actúe un ionizador externo, Z_{ext} ,el cual crea por pares iones y electrones libres por unidad de volumen y por unidad de tiempo de forma uniforme en todo el volumen.
Cuando el ionizador externo está en funcionamiento, el número de electrones e iones en el gas aumenta. El aumento de la densidad de electrones y de iones en el gas se contrarresta debido a un proceso de recombinación por el que se unen electrones con iones para formar átomos neutros. El número de recombinaciones Z_{rec} en el gas por unidad de volumen y de tiempo esta dado por

$$Z_{rec} = r\, n_e\, n_i$$

En la anterior ecuación, r es una constante denominada coeficiente de recombinación, n_e y n_i son las densidades de los electrones y los iones respectivamente.
Suponer que el tiempo t=0, se conecta el ionizador externo y las densidades de los electrones y de los iones son nulas. La densidad de electrones $n_e(t)$ depende del tiempo según la ecuación:

$$n_e(t) = n_o + \alpha\, tagh\, bt$$

n_o, a y b son constantes y tagh es la tangente hipérbólica.

A1. Expresar n_o , a y b en función de Z_{ext} y de r.

Suponer que existen dos ionizadotes disponibles. Cuando el primero funciona la densidad de electrones en el gas alcanza un valor de equilibrio de n_{e1}=12.10^{10} cm^{-3}. Cuando lo hace el segundo el valor de equilibrio para la densidad de electrones es n_{e2}=16.10^{10} cm^{-3} .

¡Atención! A continuación se supone que el ionizador externo está funcionando durante un largo periodo de tiempo de modo que el proceso se encuentra en estado estacionario , esto es, no depende del tiempo. No se considera el campo eléctrico de los portadores de carga.

Se supone que el gas llena un cilindro que tiene dos platos conductores en sus extremos de área S cada uno y separados entre sí una distancia $L << \sqrt{S}$. Por medio de los platos se aplica al cilindro un voltaje U que crea un campo eléctrico E entre los mencionados platos. Admitir que las densidades de ambas clases de cargas permanecen prácticamente constantes a lo largo del cilindro.
Debido al campo eléctrico E, ambos portadores de cargas (electrones, e, e iones i) tienen la misma velocidad v proporcional al campo v= βE, expresión en la que β es una constante llamada movilidad de la carga.

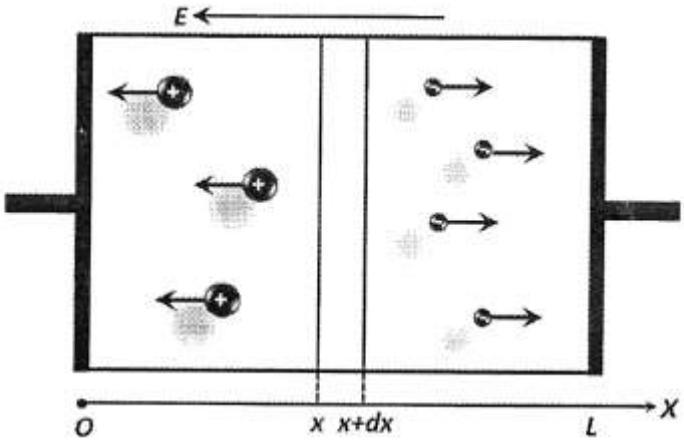
.

Parte B. **Descarga en un gas automantenida**

En esta parte del problema se considera cómo la ignición de una descarga del gas automantenida conduce a que la corriente eléctrica en el cilindro sea automantenida.

¡Atención! En lo que sigue se supone que el ionizador continua funcionando con la misma rapidez Z_{ext}, se desprecia el campo eléctrico debido a los portadores de carga por lo que el campo eléctrico a lo largo del cilindro es uniforme y la recombinación no se tendrá en cuenta.

En la descarga del gas automantenida existen dos procesos importantes que anteriormente no se habían considerado. El primero es la emisión secundaria de electrones y el segundo la formación de una avalancha de electrones.



La emisión secundaria ocurre cuando los iones chocan con el electrodo negativo, llamado cátodo, y los electrones rebotan hacia el electrodo positivo, llamado ánodo. El cociente entre el número de electrones que rebotan por unidad de tiempo Ne, y los que chocan contra el cátodo Ni es el denominado coeficiente de emisión electrónica secundaria $\gamma = \frac{N_e}{N_i}$.

La formación de la avalancha electrónica se explica a continuación. El campo eléctrico acelera a los electrones libres, los cuales adquieren la suficiente energía cinética para que al chocar contra los átomos del gas los ionicen, y como resultado de este proceso, el número de electrones que se desplazan hacia el ánodo aumenta considerablemente. Este proceso se describe mediante el denominado coeficiente de Townsend α, *el cual caracteriza un incremento en el número de electrones dN_e , debido a los electrones N_e que han atravesado la distancia dl*

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e$$

La corriente total I en una sección normal del cilindro que contiene el gas es la suma de dos corrientes: una iónica $I_e(x)$ y una electrónica $I_e(x)$. En el estado estacionario esta última corriente depende de la coordenada x, véase la figura superior.
La corriente electrónica $I_e(x)$ varía a lo largo del eje X según la ecuación

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2$$

Siendo A_1, A_2 y C_1 constantes.

B1. ***Encontrar A_1 y A_2 y expresarlas en función de Z_{ext} , α, e, L y S***

La corriente iónica I_i varía lo largo del eje X según la ecuación

$$I_i(x) = B_1 e^{B_2 x} + C_2$$

Siendo B_1, B_2 y C_2 constantes.

B2. ***Encontrar B_1 y B_2 y expresarlas en función de Z_{ext} , α, e, L, S y C_1***

.

B3. ***Encontrar el valor de $I_i(x)$ cuando $x= L$***

B4. ***Encontrar la relación de $I_i(x)$ y $I_e(x)$ cuando $x= 0$***

Sea el coeficiente a de Townsend constante. Si la longitud del cilindro crece y se alcanza un valor crítico L_C>L , entonces el ionizador externo puede desconectarse y la descarga es automantenida.

B6. ***Encontrar L_C y expresar su valor en función de Z_{ext}, α , γ , e , L y S***