

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**  
**Ricardo David Fernández Cruz**

Madrid 2014

### **PROBLEMA 1**

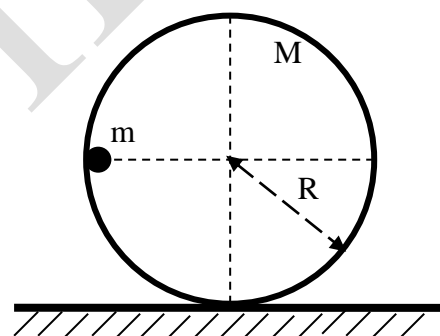
*Este problema consta de tres partes independientes*

#### **PARTE A. Mecánica**

*Sobre la parte interior de un cilindro hueco de masa  $M$  y radio  $R$ , con un espesor de pared pequeño, se coloca un disco de masa  $m$ . Inicialmente el cilindro está en reposo sobre un suelo horizontal y el disco se encuentra localizado a una altura  $R$  por encima del suelo, tal como puede observarse en la figura*

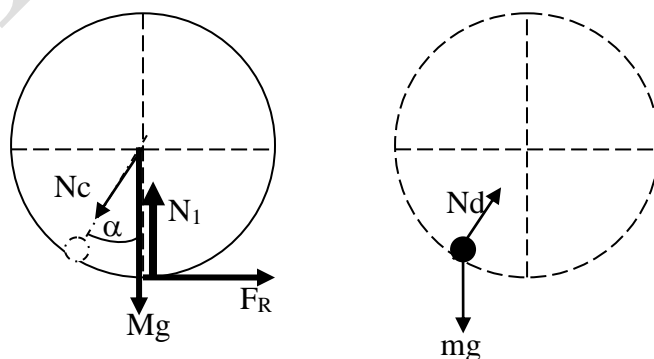
*Encontrar la fuerza de interacción entre el disco y el cilindro justamente en el instante en que el disco pasa por la parte inferior de su trayectoria.*

*Suponer que entre el disco y la parte interior del cilindro no existe rozamiento y que el cilindro se desplaza por el suelo sin deslizar.*



Consideramos un sistema de referencia cartesiano ligado al suelo, dicho sistema de referencia es inercial. Las fuerzas reales que actúan sobre el cilindro son: peso  $Mg$ , fuerza de rozamiento del cilindro con el suelo  $F_R$ , fuerza con que el disco empuja al cilindro  $N_c$ , y la fuerza con que el suelo empuja al cilindro  $N_1$ .

Las fuerzas que actúan sobre el disco son: su peso  $mg$  y la fuerza con que el cilindro empuja al disco,  $N_d$ . (ver la figura  $A_1$ ).



**Fig. A<sub>1</sub>**

Las fuerzas  $N_c$  y  $N_d$  son acción y reacción, por tanto, sus módulos son iguales:  $N_c=N_d=N$ . La fuerza de rozamiento se dirige hacia la derecha porque cuando el disco se desplaza por el interior del cilindro, éste se mueve hacia la izquierda.

Al cilindro de la figura A<sub>1</sub>, aplicamos las leyes de Newton.

$$N \operatorname{sen} \alpha - F_R = M a_c; F_R R = I \gamma; \Rightarrow F_R = \frac{I \gamma}{R} = \frac{M R^2 \gamma}{R} = M R \gamma; a_c = \gamma R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_R = M R \frac{a_c}{R} = M a_c \Rightarrow N \operatorname{sen} \alpha - M a_c = M a_c \Rightarrow N \operatorname{sen} \alpha = 2 M a_c \quad (1)$$

La aceleración del cilindro es un vector paralelo al suelo y dirigido de derecha a izquierda

Procedemos igual con el disco

$$N \operatorname{sen} \alpha = m a_x \quad (2)$$

La aceleración del disco respecto del suelo es un vector paralelo al suelo y dirigido de izquierda a derecha

Comparando (1) y (2)

$$2 M a_c = m a_x \Rightarrow \int 2 M \frac{dv_c}{dt} = \int m \frac{dv_x}{dt} \Rightarrow 2 M v_c = m v_x + Cte$$

En el instante inicial las velocidades del cilindro y del disco son cero, luego  $Cte=0$

$$2 M v_c = m v_x \quad (3)$$

El vector velocidad del cilindro es paralelo al suelo y dirigido de derecha a izquierda y el vector velocidad del disco es paralelo al suelo y dirigido de izquierda a derecha. Ambos vectores se han determinado con respecto al sistema inercial ligado al suelo.

La fuerza de rozamiento actúa en el sentido de proporcionar un momento de fuerza para que el cilindro gire, pero no es una fuerza disipativa..

La energía potencial del sistema es  $mgR$  y cuando el disco pase por la parte inferior de su trayectoria, la energía es: cinética de traslación del cilindro, cinética de traslación del disco y cinética de rotación del disco

$$m g R = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} M R^2 \frac{v_c^2}{R^2} = M v_c^2 + \frac{1}{2} m v_x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 m g R = 2 M v_c^2 + m v_x^2 \quad (4)$$

Despajamos  $v_x$  de la ecuación (3) y sustituimos en la ecuación (4).

$$v_x = 2 \frac{M}{m} v_c \Rightarrow 2mgR = 2Mv_c^2 + m \left( 2 \frac{M}{m} v_c \right)^2 = 2Mv_c^2 + \frac{4M^2 v_c^2}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mgR = Mv_c^2 + 2v_c^2 \frac{M^2}{m} = v_c^2 \left( M + \frac{2M^2}{m} \right) \Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{mgR}{M \left( 1 + \frac{2M}{m} \right)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_c = \sqrt{\frac{m^2 g R}{M(2M + m)}} = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{MgR}{2M + m}} \quad (5)$$

Sustituyendo (5) en (3)

$$2M \frac{m}{M} \sqrt{\frac{MgR}{2M + m}} = m v_x \Rightarrow v_x = 2 \sqrt{\frac{MgR}{2M + m}} \quad (6)$$

Vamos ahora a determinar la velocidad del disco respecto del cilindro cuando el disco pase por la parte inferior, pero antes explicamos con un ejemplo el proceso.

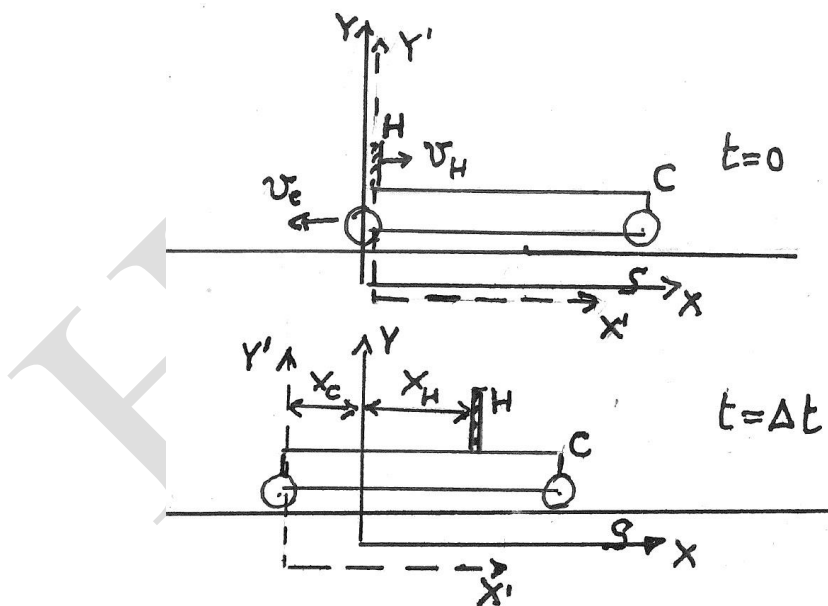


Fig A2

En la figura A.2, S indica el suelo y ligado a él se ha considerado un sistema de referencia inercial OXY. C es un carrito que en el instante t=0 tiene una velocidad  $v_c$  respecto de OXY y ligado a él se considera un sistema de referencia O'X'Y'. H representa a un hombre que se desplaza sobre el carrito con una velocidad  $v_H$  respecto

de OXY. Al cabo de un corto tiempo las posiciones del H y del carrito C se indican en la segunda figura de A2.

La posición del hombre respecto del sistema ligado al carrito (O'X'Y') es:

$$X = X_c + X_H = v_c t + v_H t = (v_c + v_H) t = v_{rel} t$$

En el problema, el carrito es el cilindro hueco y el hombre el disco, por tanto, la velocidad relativa del disco respecto del cilindro es la suma de  $v_c$  y  $v_x$ .

La fuerza que el cilindro ejerce sobre el disco es la suma del peso del disco más la fuerza centrípeta

$$\begin{aligned} F &= m g + m \frac{v_{enl}^2}{R} = m g + \frac{m}{R} \left[ \frac{m}{M} \sqrt{\frac{M g R}{2 M + m}} + 2 \sqrt{\frac{M g R}{2 M + m}} \right]^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= m g + \frac{m}{R} \left[ \sqrt{\frac{M g R}{2 M + m}} \left( \frac{m}{M} + 2 \right) \right]^2 = m g + \frac{m}{R} \cdot \frac{M g R}{2 M + m} \left[ \frac{2 M + m}{M} \right]^2 = \\ \Rightarrow F &= m g + \frac{m}{R} \cdot \frac{g R (2 M + m)}{M} = m g + 2 m g + \frac{m^2 g}{M} = m g \left( 3 + \frac{m}{M} \right) = 3 m g \left( 1 + \frac{m}{3 M} \right) \end{aligned}$$

### PARTE B. Física molecular

*Una burbuja de radio  $r = 5,00 \text{ cm}$  contiene un gas ideal diatómico, la película jabonosa tiene un espesor  $h = 10,0 \text{ }\mu\text{m}$ , dicha burbuja está situada en el vacío. La tensión superficial de la disolución jabonosa es  $\sigma = 4,00 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$  y su densidad  $\rho = 1,10 \text{ g/cm}^3$ . 1) Determinar la capacidad molar del gas del interior de la burbuja de tal forma que cuando a éste se le suministra calor de forma muy lenta, la burbuja permanece en equilibrio mecánico. 2) Encontrar la expresión de la frecuencia angular  $\omega$  de las pequeñas oscilaciones radiales de la burbuja, en el supuesto de que la capacidad calorífica de la película jabonosa sea mucho mayor que la del gas. Suponer que el equilibrio térmico se alcanza en un periodo de tiempo mucho menor que el periodo de las oscilaciones.*

*Ayuda. Laplace demostró que existe una diferencia de presión dentro y fuera de una superficie curvada originada por la tensión superficial de la interfase entre el líquido y el gas, según la expresión  $\Delta p = \frac{2\sigma}{r}$*

1. La película jabonosa tiene dos curvaturas por lo que la presión capilar es:  $\frac{4\sigma}{r}$ . Dado que la presión externa es nula y existe equilibrio mecánico, esa es la presión del gas contenido en la burbuja

Aplicamos el primer principio de la termodinámica

$$dQ = nC dT = nC_v dT + p dV \Rightarrow C = C_v + \frac{p}{n} \frac{dV}{dT} \quad (1)$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos al que está contenido en la burbuja

$$\frac{4\sigma}{r} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = nRT \Rightarrow \frac{16}{3} \pi \sigma r^2 = nRT \Rightarrow \frac{32}{3} \pi r \sigma dr = nR dT \Rightarrow dT = \frac{\frac{32}{3} \pi r \sigma dr}{nR}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dV = \frac{12}{3} \pi r^2 dr$$

Sustituyendo en (1)

$$C = C_v + \frac{4\sigma}{nR} \frac{\frac{12}{3} \pi r^2 dr}{\frac{32}{3} \pi r \sigma dr} = C_v + \frac{3}{2} R = \frac{5}{2} R + \frac{3}{2} R = 4R$$

2) Al suministrar una cantidad de calor al gas contenido en la burbuja aumenta su temperatura e intercambia energía calorífica con la solución jabonosa

$$m_G c_G \Delta t = m_J c_J \Delta t' \Rightarrow \Delta t' = \frac{m_G c_G \Delta t}{m_J c_J}$$

Teniendo en cuenta, según el enunciado, que  $c_J \gg c_G$ ,  $\Delta t'$  tiendo a cero, esto significa que la película jabonosa mantiene su temperatura y además el gas también la mantiene, por tanto, consideramos el proceso isotérmico

Imaginemos que la burbuja aumenta su radio de  $r$  a  $r+x$ , siendo  $x$  pequeño comparado con  $r$ .

La diferencia entre la fuerza debida a la presión del gas (ahora designado con  $p'$ ) y la debida a la tensión superficial crea una fuerza resultante que tiende a llevar a la burbuja a su radio primitivo

$$p' \cdot \pi(r+x)^2 - 2\sigma \cdot 2\pi(r+x) = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

Veamos la relación entre  $p'$  y la presión del gas cuando el radio es  $r$

$$pV = p'V' \Rightarrow p' = p \frac{V}{V'} = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi (r+x)^3} = \frac{r^3}{r^3 + x^3 + 3r^2x + 3rx^2}$$

Puesto que  $x \ll r$ , los términos de  $x$  al cubo y al cuadrado los suprimimos

$$p' \approx p \frac{r^3}{r^3 + 3r^2x} = p \frac{1}{1 + \frac{3x}{r}} = p \frac{1 - \frac{3x}{r}}{\left(1 + \frac{3x}{r}\right)\left(1 - \frac{3x}{r}\right)} = p \frac{1 - \frac{3x}{r}}{1 - 9\frac{x^2}{r^2}} \approx p \left(1 - \frac{3x}{r}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p' \approx \frac{4\sigma}{r} \left(1 - \frac{3x}{r}\right)$$

La masa  $m$  de la película jabonosa es:  $m = V\rho = 4\pi r^2\rho h$

Sustituyendo en (1)

$$\frac{4\sigma}{r} \left(1 - \frac{3x}{r}\right) \cdot \pi(r+x)^2 - 4\sigma\pi(r+x) = 4\pi r^2\rho h \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\sigma \left(1 - \frac{3x}{r}\right) \left(\frac{r^2}{r} + \frac{x^2}{r} + 2x\right) - \sigma r - \sigma x = r^2\rho h \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

$$\sigma \left(\frac{r^2}{r} + \frac{x^2}{r} + 2x - 3x - \frac{3x^3}{r^2} - \frac{6x^2}{r}\right) - \sigma r - \sigma x = r^2\rho h \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \sigma r - \sigma x - \sigma r - \sigma x = r^2\rho h \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow$$

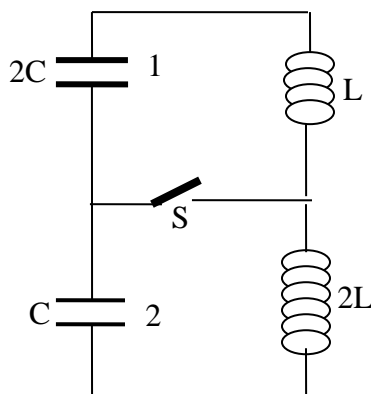
$$-\frac{2\sigma}{r^2\rho h} x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2)$$

La ecuación (2) es la de un movimiento armónico simple

$$\omega = \sqrt{\frac{2\sigma}{r^2\rho h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}}{25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 1100 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \cdot 10^{-6} \text{ m}}} = 54 \text{ s}^{-1}$$

### PARTE C. Electricidad

*En el instante inicial el interruptor  $S$  (ver figura) está abierto y el condensador 1 de capacidad  $2C$  posee una carga  $q_0$ ; el condensador 2 de capacidad  $C$  está descargado y por las bobinas, de coeficientes de autoinducción  $L$  y  $2L$  respectivamente, no pasa corriente.*



*El condensador 1 comienza a descargarse y justamente cuando la corriente que circula por las bobinas es máxima, se cierra de forma instantánea el interruptor S. Determinar la intensidad máxima de corriente que circula por S.*

Cuando S esté abierto el circuito de la figura superior es un circuito oscilante con capacidad  $C_E$  y autoinducción  $L_E = L + 2L = 3L$ .

$$\frac{1}{C_E} = \frac{1}{2C} + \frac{1}{C} \Rightarrow C_E = \frac{2}{3}C$$

El periodo de dicho circuito es:

$$T = 2\pi\sqrt{L_E C_E} = 2\pi\sqrt{3L \frac{2}{3}C} = 2\pi\sqrt{2LC} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}$$

Designamos con  $t$  al tiempo transcurrido desde que se ha iniciado la descarga, con  $q_1$  la carga eléctrica del condensador 1, con  $q_2$  la del condensador 2 y con  $I$  la intensidad de la corriente eléctrica que circula por las bobinas.

Según el principio de conservación de la carga

$$q_o = q_1 + q_2$$

Dado que no existen resistencias en el circuito, aplicamos el principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2} \frac{q_o^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{2C} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{C} + \frac{1}{2} 3LI^2 \Rightarrow \frac{q_o^2}{2C} = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{(q_o - q_1)^2}{C} + 3LI^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3LI^2 = \frac{q_o^2 - q_1^2 - 2(q_o^2 + q_1^2 - 2q_o q_1)}{2C} = \frac{-q_o^2 - 3q_1^2 + 4q_o q_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\frac{-q_o^2 - 3q_1^2 + 4q_o q_1}{6LC}} \quad (1)$$

Para determinar la intensidad máxima de la corriente derivamos la ecuación (1) respecto de  $q_1$  e igualamos a cero



$$\frac{dI}{dq_1} = \sqrt{\frac{1}{6LC}} \left[ \frac{-6q_1 + 4q_0}{2\sqrt{-q_0^2 - 3q_1^2 + 4q_0q_1}} \right] = 0 \Rightarrow -6q_1 + 4q_0 = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{2}{3}q_0$$

$$\Rightarrow q_2 = q_0 - \frac{2}{3}q_0 = \frac{1}{3}q_0$$

Sustituimos estos valores de las cargas en I..

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{-q_0^2 - 3\left(\frac{4}{9}q_0^2\right) + 4q_0\left(\frac{2}{3}q_0\right)}{6LC}} = \frac{q_0}{\sqrt{18LC}} \quad (2)$$

Al cerrar instantáneamente el interruptor S, en el circuito superior el condensador tiene una carga  $(2/3)q_0$ , y la bobina almacena una energía de  $\frac{1}{2}I_{\max}^2 L^2$ . La intensidad máxima en el circuito superior  $I_{MS}$ , se producirá cuando la energía almacenada en el condensador pase a la bobina

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2}{3}q_0\right)^2}{2C} + \frac{1}{2} LI_{\max}^2 = \frac{1}{2} LI_{MS}^2 \Rightarrow \frac{4q_0^2}{18C} + L \left[ \frac{q_0}{\sqrt{18LC}} \right]^2 = LI_{MS}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{MS}^2 = \frac{4q_0^2}{18LC} + \frac{q_0^2}{18LC} \Rightarrow I_{MS} = \sqrt{\frac{5q_0^2}{18LC}} = \sqrt{5} \frac{q_0}{\sqrt{18LC}} = \sqrt{5} I_{\max}$$

En el circuito inferior la intensidad máxima  $I_{MI}$

$$\frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{3}q_0\right)^2}{C} + \frac{1}{2} 2LI_{\max}^2 = \frac{1}{2} 2LI_{MI}^2 \Rightarrow \frac{q_0^2}{9C} + 2L \left[ \frac{q_0}{\sqrt{18LC}} \right]^2 = 2LI_{MI}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{MI}^2 = \frac{q_0^2}{18LC} + \frac{q_0^2}{18LC} \Rightarrow I_{MI} = \sqrt{\frac{2q_0^2}{18LC}} = \sqrt{2} \frac{q_0}{\sqrt{18LC}} = \sqrt{2} I_{\max}$$

Las intensidades máximas anteriores no coinciden en el tiempo a través de S.

En el instante inicial (cierre instantáneo de S), en el circuito superior la energía del condensador supera a la energía almacenada en la bobina

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{2}{3}q_0\right)^2}{2C} = \frac{4q_0^2}{36C} = \frac{q_0^2}{9C}; \quad E_L = \frac{1}{2} LI_{\max}^2 = \frac{1}{2} L \frac{q_0^2}{18LC} = \frac{q_0^2}{36C}$$

Por consiguiente a partir del instante de cierre de S, el condensador 1 se sigue descargando. La ecuación de la intensidad de la corriente en el circuito superior es:

$$i_s = I_{MS} \sin(\omega t + \theta) = \sqrt{5} I_{\max} \sin(\omega t + \theta)$$

En el instante  $t=0$  (cierre de S) la ecuación anterior conduce a:

$$i_s = I_{\max} = \sqrt{5} I_{\max} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

En el instante inicial (cierre instantáneo de S), en el circuito inferior la energía de la bobina es igual que la del condensador

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{3} q_0\right)^2}{C} = \frac{q_0^2}{18C} \quad ; \quad E_{2L} = \frac{1}{2} 2L I_{\max}^2 = L \frac{q_0^2}{18LC} = \frac{q_0^2}{18C}$$

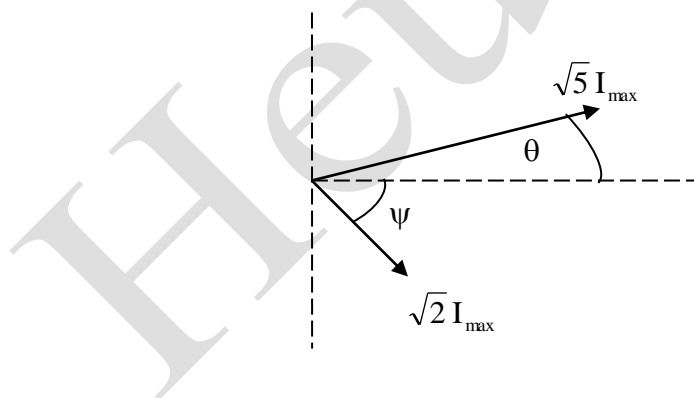
El condensador sigue recibiendo carga

$$i_1 = I_{MS} \sin(\omega t + \psi) = \sqrt{2} I_{\max} \sin(\omega t + \psi)$$

En el instante  $t=0$  (cierre de S) la ecuación anterior conduce a:

$$i_1 = I_{\max} = \sqrt{2} I_{\max} \sin \psi \Rightarrow \sin \psi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos \psi = \sqrt{1 - \frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

El diagrama rotatorio para las dos intensidades es:



$$I_s(X) = \sqrt{5} I_{\max} \cos \theta + \sqrt{2} I_{\max} \cos \psi = I_{\max} \left( \sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 3I_{\max}$$

$$I_s(Y) = \sqrt{5} I_{\max} \sin \theta + \sqrt{2} I_{\max} \sin \psi = I_{\max} \left( \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$I_s = 3I_{\max} = 3 \frac{q_0}{\sqrt{18LC}} = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}$$

## **PROBLEMA 2. Ecuación de estado de van der Waals**

*La conocida ecuación de estado de los gases ideales parte de la suposición de que las moléculas ni tienen tamaño ni interactúan entre sí. En realidad sí que tienen un tamaño finito e interactúan entre ellas.*

*Todas las partes de este problema se refieren a un mol de agua.*

### **Parte A. Ecuación de estado de un gas no ideal**

*Teniendo en cuenta el tamaño finito de las moléculas la ecuación de estado de un gas se escribe como*

$$P(V - b) = RT$$

*P es la presión del gas, V el volumen ocupado por el gas y T la temperatura, R es la constante de los gases, b representa una constante extraída a partir del volumen de las moléculas.*

#### **A1. Estimar b y expresarla en función del diámetro d de las moléculas**

El término b se introduce en la ecuación de los gases ideales restando del volumen V medido del gas un volumen relacionado con el tamaño de las moléculas. A primera vista se podría restar el volumen de las  $N_A$  moléculas que existen en el mol de gas, pero esto no es correcto porque las moléculas, consideradas como esferas rígidas, no pueden aproximarse tanto como para tocarse entre sí, puesto que aparecen fuerzas eléctricas repulsivas, esto conlleva a considerar a b mayor que el volumen de las moléculas. Las estimaciones más sencillas suponen que b es cuatro veces el volumen de las moléculas. (Puede consultarse el razonamiento en Química-Física de S.Glasstone, página 270 .Editorial Aguilar).

$$b = 4 \cdot \frac{4}{3} \pi \left( \frac{d}{2} \right)^3 N_A \approx 2N_A d^3$$

*Van der Waals propuso una ecuación, en la que se incluía un término en la presión para considerar las fuerzas intermoleculares, que de forma aproximada describe los estados gaseoso y líquido de la materia.*

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) = RT$$

*En dicha ecuación a es una constante.*

*A una temperatura T inferior a la de un valor crítico  $T_c$  la ecuación de van der Waals, cuando se representa en un diagrama P-V, proporciona una isoterma (curva 1 de la figura 1) denominada isoterma de van der*

Waals, En la misma gráfica la curva 2 representa a un gas ideal para esa misma temperatura.

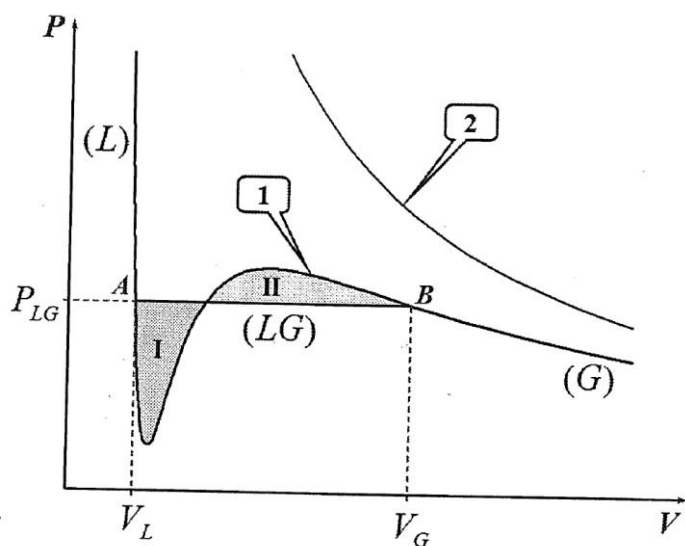


Fig.1.- Isoterma de van der Waals de gas líquido (curva 1) y la isoterma de un gas ideal (curva 2).

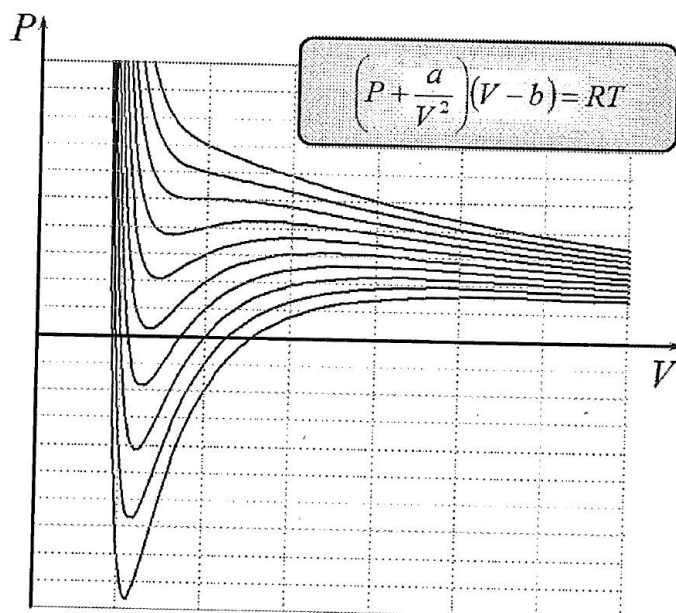


Fig.2.- Diferentes isotermas de la ecuación de van der Waals

La isoterma 1 de la figura 1 se separa de la isoterma real porque entre B y A existe una línea recta trazada a una presión constante  $P_{LG}$ . Este segmento recto se localiza entre los volúmenes  $V_L$  (líquido) y  $V_G$  (gas) y representa que en esa zona coexisten en equilibrio las fases líquida y gaseosa. A partir de la segunda ley de la termodinámica J. Maxwell demostró que  $P_{LG}$  debe escogerse cuando las áreas I y II (sombreadas en la figura 1) sean iguales.

*Si se aumenta la temperatura, el segmento recto AB de la isoterma se reduce a un punto en el que la temperatura y la presión son  $T_c$  y  $P_{GL}=P_c$ . Los parámetros  $T_c$  y  $P_c$  se denominan críticos y por la vía experimental se miden con gran precisión.*

**A2. Expresar las constantes  $a$  y  $b$  de la ecuación de van der Waals en función de  $T_c$  y  $P_c$**

La isoterma  $T_c$  presenta un punto de inflexión lo cual se traduce, desde el punto de vista matemático, en dos ecuaciones:

$$\left(\frac{dP_c}{dV_c}\right)_T = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{d^2P_c}{dV_c^2}\right)_T = 0$$

Despejamos  $P_c$  de la ecuación de van der Waals y hallamos las derivadas

$$P_c = \frac{RT_c}{V_c - b} - \frac{a}{V_c^2} \quad ; \quad \left(\frac{dP_c}{dV_c}\right)_T = \frac{-RT_c}{(V_c - b)^2} + \frac{2a}{V_c^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2a}{RT_c} = \frac{V_c^3}{(V_c - b)^2}$$

$$\left(\frac{d^2P_c}{dV_c^2}\right)_T = \frac{RT_c \cdot 2(V_c - b)}{(V_c - b)^4} - \frac{2a}{V_c^4} = \frac{2RT_c}{(V_c - b)^3} - \frac{6a}{V_c^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{3a}{RT_c} = \frac{V_c^4}{(V_c - b)^3}$$

Dividiendo miembro a miembro las dos últimas ecuaciones

$$\frac{\frac{3a}{RT_c}}{\frac{2a}{RT_c}} = \frac{\frac{V_c^4}{(V_c - b)^3}}{\frac{V_c^3}{(V_c - b)^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} = \frac{V_c}{V_c - b} \quad \Rightarrow \quad V_c = 3b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{RT_c} = \frac{27b^3}{(3b - b)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2a}{RT_c} = \frac{27}{4}b; \quad \Rightarrow \quad RT_c = \frac{8a}{27b}$$

Sustituyendo en la ecuación de van der Waals

$$P_c + \frac{a}{9b^2} = \frac{RT_c}{2b} \quad \Rightarrow \quad P_c + \frac{a}{9b^2} = \frac{8a}{27b \cdot 2b} \quad \Rightarrow \quad P_c = \frac{4a}{27b^2} - \frac{a}{9b^2} = \frac{a}{27b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 27b^2 P_c}{RT_c} = \frac{27}{4}b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{RT_c}{8P_c} \quad \Rightarrow \quad a = 27P_c \left(\frac{RT_c}{8P_c}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{27 R^2 T_c^2}{64 P_c}$$

**A3. Para el agua,  $T_c=647$  K y  $P_c=2,2 \cdot 10^7$  Pa. Calcular las constantes  $a$  y  $b$  del agua**

$$a_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{27 \left( 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \right)^2 (647 \text{ K})^2}{64 \cdot 2,2 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0,55 \frac{\frac{\text{N}^2 \text{ m}^2}{\text{mol}^2}}{\frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 0,55 \frac{\text{N m}^4}{\text{mol}^2} = 0,55 \frac{\text{Pa m}^6}{\text{mol}^2}$$

$$b_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{8,31 \frac{\text{N m}}{\text{mol K}} \cdot 647 \text{ K}}{8 \cdot 2,2 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = 3,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$

**A4. Estimar el diámetro de una molécula de agua**

Según el apartado A1

$$d = \sqrt[3]{\frac{b}{2N_A}} = \sqrt[3]{\frac{3,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}}{2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}}} = 3,0 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

**Parte B. Propiedades de gas y líquido**

*Esta parte del problema se refiere a las propiedades del agua en los estados gaseoso y líquido a la temperatura de  $T = 100^\circ\text{C}$ . La presión del vapor saturado a esa temperatura vale  $P_{\text{GL}} = P_o = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  y el volumen molar del agua es  $\mu = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ kg/mol}$ .*

**Estado gaseoso**

*Resulta razonable suponer que  $V_G \gg b$  es válida para la descripción de las propiedades del agua en el estado gaseoso*

**B1. Obtener la fórmula de  $V_G$  expresándola en función de  $R$ ,  $T$ ,  $p_o$  y  $a$**

A partir de la ecuación de van der Waals

$$\left( p_o + \frac{a}{V_G^2} \right) (V_G - b) = R T$$

Teniendo en cuenta la suposición del enunciado  $V_G - b \approx V_G$

$$p_o V_G + \frac{a}{V_G} = RT \Rightarrow p_o V_G^2 - RT V_G + a = 0 \Rightarrow V_G = \frac{RT \pm \sqrt{R^2 T^2 - 4 p_o a}}{2 p_o}$$

Para decidir entre el signo más o el menos, apliquemos la ecuación obtenida a un gas ideal para el que  $a = 0$

$$2 p_o V_G = RT \pm RT$$

Si el signo fuese negativo  $V_G = 0$ , lo cual es imposible, por tanto, la solución es.

$$V_G = \frac{RT + \sqrt{R^2 T^2 - 4 p_o a}}{2 p_o} \quad (1)$$

Sustituyendo valores en la ecuación anterior

$$V_G = \frac{8,31 \cdot 373 + \sqrt{(8,31 \cdot 373)^2 - 4 \cdot 1,0 \cdot 10^5 \cdot 0,55}}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^5} = 0,0308 \text{ m}^3$$

Si utilizamos la ecuación de los gases ideales

$$V_{Go} = \frac{RT}{p_o} = \frac{8,31 \cdot 373}{1,0 \cdot 10^5} = 0,0310 \text{ m}^3$$

*Si empleamos la ecuación de los gases ideales se obtiene prácticamente el mismo volumen.*

**B2. Obtener el porcentaje de disminución del volumen debido a las fuerzas intermoleculares.**  $\frac{\Delta V_G}{V_{Go}} = \frac{V_{Go} - V_G}{V_{Go}}$

Calculamos anteriormente el volumen con la ecuación (1),  $V_G = 0,0308 \text{ m}^3$

Calculamos anteriormente el volumen con la ecuación de los gases ideales,  $V_{Go} = 0,0310 \text{ m}^3$

$$\% = \frac{0,0308 - 0,0310}{0,0308} \cdot 100 = -0,65$$

*Si el volumen del sistema se reduce por debajo de  $V_G$  el gas comienza a condensarse. No obstante un gas muy puro puede permanecer en ese estado metaestable, llamado vapor subenfriado, hasta que el volumen alcanza un cierto valor  $V_{Gmin}$*

**B3. Evaluar cuántas veces el volumen del vapor de agua se puede reducir para que el gas permanezca en ese estado metaestable. En otras palabras determine el cociente  $V_G/V_{Gmin}$**

En la figura 1, la isoterma de van der Waals penetra en la región en que coexisten las fases gas y líquido y esa isoterma adquiere un valor máximo. Admitimos que el gas se puede mantener como tal hasta ese punto, en el que se cumple que  $\left(\frac{dP}{dV}\right)_T = 0$ .

Despejamos la presión de la ecuación de van der Waals y hacemos la derivada

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow \left(\frac{dP}{dV}\right)_T = \frac{-RT}{(V_{Gmin} - b)^2} + \frac{2a}{V_{Gmin}^3} = 0$$

Hacemos la aproximación  $V_{Gmin} - b \approx V_{Gmin}$

$$RT = \frac{2a}{V_{Gmin}} \Rightarrow V_{Gmin} = \frac{2a}{RT} = \frac{2 \cdot 0,55 \frac{Nm^4}{mol^2}}{8,31 \frac{Nm}{molK} \cdot 373 K} = 3,54 \cdot 10^{-4} \frac{m^3}{mol} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V_G}{V_{Gmin}} = \frac{0,0308}{3,54 \cdot 10^{-4}} = 87$$

### Estado líquido

*Para el estado líquido resulta razonable admitir que  $P \ll a/V^2$*

**B4. Expresar el volumen del agua líquida  $V_L$  en función de  $a$ ,  $b$ ,  $R$  y  $T$**

La ecuación de van der Waals aplicada con la condición del enunciado da lugar a:

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT \Rightarrow RTV_L^2 - aV_L + ab = 0 \Rightarrow V_L = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4a bRT}}{2RT} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_L = \frac{a \pm a \sqrt{1 - \frac{4 bRT}{a}}}{2RT} = \frac{a \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 bRT}{a}} \right]}{2RT}$$

Surge la duda sobre qué signo debe utilizarse en la ecuación anterior.

La densidad del agua a 100°C es 0,958 g/cm<sup>3</sup>. Un mol de agua (0,018 kg) en estado líquido ocupa un volumen a 100°C de

$$\frac{1 \text{ kg de agua}}{0,958 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3} = \frac{0,018 \text{ kg}}{V} \Rightarrow V = 1,72 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$



El cociente  $\frac{a}{2R T} = \frac{0,55}{2 \cdot 8,31 \cdot 373} = 8,9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} > 1,72 \cdot 10^{-5}$  , por consiguiente el término incluido en el paréntesis debe ser menor que la unidad y eso conlleva utilizar el signo menos.

Calculemos el volumen que ocupa un mol de agua a 100°C proporcionado por la ecuación deducida anteriormente, empleando el signo menos.

$$V_L(100^\circ\text{C}) = \frac{0,55 \cdot}{2 \cdot 8,31 \cdot 373} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot 3,1 \cdot 10^{-5} \cdot 8,31 \cdot 373}{0,55}} \right] = 4,01 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$$

Como se observa un valor muy diferente del valor experimental, lo que en definitiva nos dice que la ecuación de van der Waals no puede aplicarse en estado líquido si queremos obtener valores que se acerquen razonablemente a los experimentales.

***Suponiendo que  $bRT \ll a$  encontrar las siguientes características del agua. ; No se sorprenda si alguno de los datos obtenidos no coinciden con los valores tabulados conocidos!***

***B5. Expresar la densidad del agua líquida en función de  $\mu$ ,  $a$ ,  $b$  y  $R$  y calcular su valor***

Hagamos un comentario sobre la suposición del enunciado

T	50	100	150	200	250	300
bRT=	0,012	0,026	0,039	0,051	0,064	0,077
a/bRT	46	21	14	11	8,6	7,1

La suposición de que  $a \gg bRT$  se cumple cuando T tiende a cero, si ponemos esta condición en la ecuación de van der Waals, el segundo miembro tiende a cero y el primero debe hacerlo para mantener la igualdad, luego  $V_L - b$  tiende a cero, esto es, el volumen tiende al valor de b

$$\rho = \frac{\mu}{V_1} = \frac{\mu}{b} = \frac{0,018 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{3,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}} = 581 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Calculamos la densidad del agua líquida a 100°C

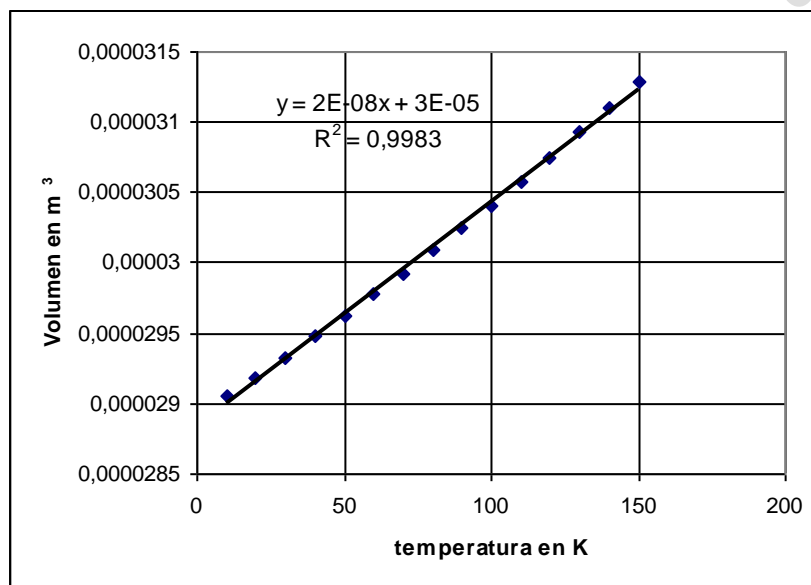
$$\rho_{100^\circ\text{C}} = \frac{0,018}{4,01 \cdot 10^{-5}} = 449 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Un resultado que nada tiene que ver con la densidad del agua a 100° C que según las tablas es 958 kg/m<sup>3</sup>

.Volvemos a lo comentado en el apartado anterior la ecuación de van der Waals no es aplicable al estado líquido a 100°C

**B6. Expresar el coeficiente de expansión térmica  $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$  en función  $a, b, R$  y dar su valor.**

Escogemos la ecuación  $V_L = \frac{a}{2RT} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4, bRT}{a}} \right]$  y representamos  $V_L$  frente a  $T$  a temperaturas bajas con lo que se obtiene prácticamente una línea recta de ecuación



$$V_L = 2.10^{-8}T + 3.10^{-5} \Rightarrow \Delta V_L = 2.10^{-8}(T' - T) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2.10^{-8}T + 3.10^{-5}} \cdot \frac{2.10^{-8}(T' - T)}{T' - T} \Rightarrow$$

$$\text{para } T = 75\text{K} \Rightarrow \alpha = \frac{2.10^{-8}}{2.10^{-8} \cdot 75 + 3.10^{-5}} = 6,3.10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

Para  $T = 20 \text{ K}$  ;  $\alpha = 6,6.10^{-4} \text{ K}^{-1}$  ; Para  $T = 150 \text{ K}$  ,  $\alpha = 6,1.10^{-4} \text{ K}^{-1}$

En respuesta al enunciado se puede utilizar la siguiente aproximación

$$V_L = \frac{a}{2RT} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{4, bRT}{a}} \right] \approx b \left( 1 + \frac{bRT}{a} \right)$$

$$\Delta V_L = b \left[ 1 + \frac{b R T'}{a} - 1 - \frac{b R T}{a} \right] = \frac{b^2 R}{a} (T' - T) = \frac{b^2 R \Delta T}{a} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{b \left( 1 + \frac{b R T}{a} \right)} \cdot \frac{\frac{b^2 R \Delta T}{a}}{\Delta T} = \frac{b R}{a} = \frac{3,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}} \cdot 8,31 \frac{\text{Nm}}{\text{mol K}}}{0,55 \frac{\text{Nm}^4}{\text{mol}^2}} = 4,7 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$$

El coeficiente del agua a 20°C es  $2,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

Obsérvese que las aproximaciones se alejan notablemente de los valores experimentales y solamente tiene valor en cuanto nos dan el orden de esos valores.

**B7. Expresar el calor de vaporización del agua en función de  $\mu$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $R$  y calcularlo.**

El término de la ecuación de van der Waals que tiene en cuenta la interacción molecular es:  $a/V_L^2$ , término que tiene las dimensiones de una presión y cuyo producto por el aumento de volumen al pasar de líquido a gas es una medida de la energía necesaria para ese proceso

$$E = L\mu = \frac{a}{V_L^2} (V_L - V_G) \approx \frac{a}{V_L} \Rightarrow L = \frac{a}{\mu V_L} = \frac{a}{\mu b \left( 1 + \frac{b R T}{a} \right)} \approx \frac{a}{\mu b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{0,55 \frac{\text{Nm}^4}{\text{mol}^2}}{0,018 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot 3,1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{mol}}} = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$$

El valor del calor latente de vaporización del agua que se encuentra en las tablas es  $2,26 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ , como se observa valor muy discrepante de este cálculo.

**B8. Considerar una capa monomolecular de agua, estimar la tensión superficial del agua.**

Suponemos que las moléculas cuando forman una superficie molecular están en contacto entre sí. Si hay  $N_A$  moléculas (imagine que son cubos) ofrecen una superficie  $2 N_A l_{\text{H}_2\text{O}}$ , siendo  $l_{\text{H}_2\text{O}}$  la longitud de la arista y el 2 porque se forman dos superficies una por arriba y otra por debajo.

La tensión superficial se define como la energía que hay que aportar por unidad de superficie.

Si las  $N_A$  moléculas pasan del estado gaseoso a formar la capa monomolecular la energía es  $L$  (expresado en  $\text{J/mol}$ ). Al suponer que las moléculas se tocan la longitud de la arista coincide con  $d_{\text{H}_2\text{O}}$ , obtenido en el apartado A1.

$$\sigma = \frac{L}{2N_A d_{H_2O}^2} = \frac{1.10^6 \frac{J}{kg} \cdot 0,018 \frac{kg}{mol}}{2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} mol^{-1} \cdot (3 \cdot 10^{-10} m)^2} = 0,16 \frac{J}{m^2}$$

La tensión superficial del agua en contacto con aire y a una temperatura de 20°C es 0,073 J/m<sup>2</sup>.

*Nosotros opinamos que no deberían haberse incluido estos apartados en el problema, dado que los valores obtenidos tan lejos de los reales pueden desorientar al alumno.*

### Parte C. Sistema líquido –gas

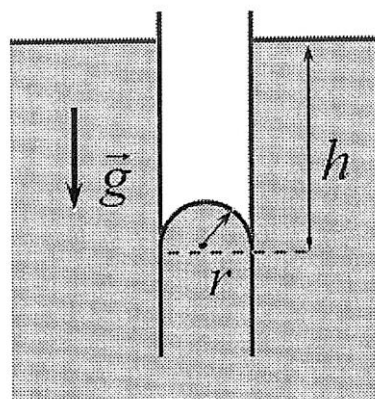
*La regla de Maxwell implica que sean iguales las áreas I y II en la figura 1 determinadas por la recta AB que corta a la isoterma de van der Waals junto con las aproximaciones realizadas en la parte B, conducen a que la presión de vapor  $p_{LG}$  dependa de la temperatura según la ecuación*

$$\ln p_{LG} = A + \frac{B}{T}$$

*en la que A y B son constantes que pueden expresarse en función de a y b*

$$A = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) - 1 ; B = -\frac{a}{bR}$$

*W.Thomson demostró que la presión del vapor saturado depende de la curvatura de la superficie del líquido. Considerese un líquido que no moja al capilar (ángulo de contacto 180°), al sumergir el capilar en el líquido el nivel disminuye respecto de la superficie libre del líquido debido a la tensión superficial.(ver la figura 3).*



**Fig.3.- Un tubo capilar está sumergido en un líquido que no moja al material del capilar.**

**C1. Encontrar el pequeño cambio de presión  $\Delta p_T$  del vapor saturado sobre la superficie curvada del líquido, expresándolo en función de la densidad del vapor,  $\rho_s$ , la densidad del líquido,  $\rho_L$ , la tensión superficial,  $\sigma$  y el radio de la superficie,  $r$ .**

Designamos con  $p_v$  la presión del vapor saturado en la superficie libre del líquido y con  $p'_v$ , la presión del vapor justamente encima de la superficie del menisco de radio  $r$ . Nos piden la diferencia entre estas presiones, que tiene que ser un valor muy pequeño. El equilibrio de presiones medidas a la altura del menisco y a la misma altura en el líquido nos conduce a:

$$p_v + \rho_L g h = p'_v + \frac{2\sigma}{r} \Rightarrow p_v + \rho_L g h = p_v + \rho_s g h + \frac{2\sigma}{r} \Rightarrow h = \frac{2\sigma}{r g (\rho_L - \rho_s)} \Rightarrow$$

$$p'_v - p_v = \Delta p_T = \rho_L g h - \frac{2\sigma}{r} = \rho_L g \left[ \frac{2\sigma}{r g (\rho_L - \rho_s)} \right] - \frac{2\sigma}{r} = \frac{2\sigma}{r} \left[ \frac{\rho_L}{\rho_L - \rho_s} - 1 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p_T = \frac{2\sigma}{r} \frac{-\rho_L + \rho_s + \rho_L}{\rho_L + \rho_s} = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_s}{\rho_L + \rho_s}$$

*Los estados metaestables considerados en el apartado B3 se utilizan ampliamente en experimentos reales como la cámara de niebla empleada en el registro de partículas elementales. También ocurre en fenómenos naturales, tales como la formación de rocío matinal en donde el vapor subenfriado se condensa formando gotas. Las gotas muy pequeñas se evaporan rápidamente pero las que tienen cierto tamaño pueden crecer aún más. .*

**C2. Suponer que al anochecer y a la temperatura de  $t_e=20^\circ\text{C}$ , el aire se encuentra saturado de vapor de agua, pero al amanecer del día siguiente la temperatura ha descendido en  $\Delta T=5,0^\circ\text{C}$ . Suponiendo que la presión de vapor no ha cambiado estimar el radio mínimo de las gotas que todavía pueden crecer. Utilizar la tensión del vapor del agua de las tablas, cuyo valor es  $\sigma=0,073\text{ N/m}$**

Calculamos las presiones del vapor saturado a  $20^\circ\text{C}$  y a  $15^\circ\text{C}$ .

$$A = \left( \ln \frac{0,55}{(3,1 \cdot 10^{-5})^2} \right) - 1 = 19,2 \quad ; \quad B = -\frac{0,55}{3,1 \cdot 10^{-5} \cdot 8,31} = -2135 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln p(20^\circ\text{C}) = 19,2 - \frac{2135}{293} = 11,9 \Rightarrow p(20^\circ\text{C}) = 1,49 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow \ln p(15^\circ\text{C}) = 19,2 - \frac{2135}{288} = 11,79 \Rightarrow p(15^\circ\text{C}) = 1,32 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Si la presión de la gota es mayor que la exterior tenderá a evaporarse y si es menor tenderá a crecer, en el límite

$$p(15^{\circ}\text{C}) + \Delta p_T = p(20^{\circ}\text{C}) \Rightarrow 1,32 \cdot 10^5 + \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_s}{\rho_L - \rho_s} = 1,49 \cdot 10^5$$

La densidad del vapor la calculamos suponiendo que el vapor se comporta como un gas ideal

$$\rho_s = \frac{p(15^{\circ}\text{C}) \cdot \mu}{R T} = \frac{1,32 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 0,018 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}}{8,31 \frac{\text{Nm}}{\text{mol K}} \cdot 288\text{K}} = 0,99 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 0,073}{r} \frac{0,99}{1000 - 0,99} = 0,17 \cdot 10^5 \Rightarrow r = \frac{2 \cdot 0,073 \cdot 0,99}{0,17 \cdot 10^5 \cdot 999} = 8,5 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

Los valores de las tablas de la presión de vapor de agua saturado son: a  $15^{\circ}\text{C}$  , 1,71 kPa y a  $20^{\circ}\text{C}$  , 2,34 kPa.

Aplicando estos datos:

$$\frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_s}{\rho_L - \rho_s} = 630 ; \rho_s = \frac{1710 \cdot 0,018}{8,31 \cdot 288} = 0,013 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot 0,073 \cdot 0,013}{1000} = 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

### PROBLEMA 3. Un modelo simple de la descarga en un gas

*Una corriente eléctrica que circula a través de un gas recibe el nombre de descarga eléctrica en un gas. Existen diversos tipos de descargas, como la de las lámparas incandescentes, la descarga en arco en la realización de soldaduras y la conocida descarga eléctrica entre las nubes y la tierra en forma de rayo.*

#### **Parte A. Descarga en un gas no autosmantenida**

*En esta parte del problema se estudia la descarga de un gas no automantenida. Para mantener la descarga de forma permanente se necesita que actúe un ionizador externo,  $Z_{ext}$ , el cual crea por pares iones y electrones libres por unidad de volumen y por unidad de tiempo de forma uniforme en todo el volumen.*

*Cuando el ionizador externo está en funcionamiento, el número de electrones  $e$  e iones en el gas aumenta. El aumento de la densidad de electrones y de iones en el gas se contrarresta debido a un proceso de recombinación por el que se unen electrones con iones para formar átomos neutros. El número de recombinaciones  $Z_{rec}$  en el gas por unidad de volumen y de tiempo esta dado por*

$$Z_{rec} = r n_e n_i$$

*En la anterior ecuación,  $r$  es una constante denominada coeficiente de recombinación,  $n_e$  y  $n_i$  son las densidades de los electrones y los iones respectivamente.*

*Suponer que el tiempo  $t=0$ , se conecta el ionizador externo y las densidades de los electrones y de los iones son nulas. La densidad de electrones  $n_e(t)$  depende del tiempo según la ecuación:*

$$n_e(t) = n_0 + a \operatorname{tagh} bt$$

*$n_0$ ,  $a$  y  $b$  son constantes y  $\operatorname{tagh}$  es la tangente hipérbólica.*

**A1. Expresar  $n_0$ ,  $a$  y  $b$  en función de  $Z_{ext}$  y de  $r$ .**

Al actuar el ionizador en el seno del gas aparecen iones al mismo tiempo una parte de ellos desaparece por recombinación. En un principio se producen más iones que desaparecen, pero a medida que su número crece aumenta la recombinación por lo que tras un tiempo grande, su número permanece constante.

La velocidad de variación de la densidad de los iones (o de los electrones) con respecto del tiempo vale;

$$\frac{dn}{dt} = Z_{\text{ext}} - Z_{\text{rec}} = Z_{\text{ext}} - r n_e n_i$$

Como se producen los mismos iones que electrones,  $n_e = n_i = n(t)$ , al sustituir en la ecuación anterior

$$\frac{dn}{dt} = Z_{\text{ext}} - r n^2 = Z_{\text{ext}} - r(n_0 + a \operatorname{tagh} bt)^2$$

Según el enunciado en el tiempo  $t=0$ , no hay ni iones ni electrones, por tanto  $n_0 = 0$ . Cuando transcurra un tiempo grande,  $t \rightarrow \infty$ , y ya no varíe la densidad de electrones sino que se mantiene constante  $\frac{dn}{dt} = 0$ .

$$0 = Z_{\text{ext}} - r a^2 (\operatorname{tagh} bt)^2 = Z_{\text{ext}} - r a^2 \left( \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{e^{bt} + e^{-bt}} \right)^2 = Z_{\text{ext}} - r a^2 \left( \frac{e^{bt} - 0}{e^{bt} + 0} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z_{\text{ext}} = r a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}}$$

Falta determinar b ¿????

*Suponer que existen dos ionizadores disponibles. Cuando el primero funciona la densidad de electrones en el gas alcanza un valor de equilibrio de  $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ . Cuando lo hace el segundo el valor de equilibrio para la densidad de electrones es  $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ .*

**A2. Encontrar la densidad de electrones  $n_e$  en el equilibrio si los dos ionizadores externos funcionan simultáneamente.**

Cuando funciona el primer ionizador y se alcanza el equilibrio.

$$: a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}^1}{r}}; \quad n_{e1} = a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}^1}{r}}$$

Cuando funciona el segundo ionizador y se alcanza el equilibrio.

$$: a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}^2}{r}}; \quad n_{e2} = a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}^2}{r}}$$

Cuando funcionan los dos ionizadores simultáneamente

$$a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}}{r}} = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}^1 + Z_{\text{ext}}^2}{r}}; \quad n_e = a = \sqrt{\frac{Z_{\text{ext}}^1 + Z_{\text{ext}}^2}{r}} \Rightarrow n_e^2 = \frac{Z_{\text{ext}}^1 + Z_{\text{ext}}^2}{r} = n_{e1}^2 + n_{e2}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = \sqrt{(12 \cdot 10^{10})^2 + (16 \cdot 10^{10})^2} = 2 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$$



**¡Atención!** A continuación se supone que el ionizador externo está funcionando durante un largo periodo de tiempo de modo que el proceso se encuentra en estado estacionario, esto es, no depende del tiempo. No se considera el campo eléctrico de los portadores de carga.

*Se supone que el gas llena un cilindro que tiene dos platos conductores en sus extremos de área  $S$  cada uno y separados entre sí una distancia  $L \ll \sqrt{S}$ . Por medio de los platos se aplica al cilindro un voltaje  $U$  que crea un campo eléctrico  $E$  entre los mencionados platos. Admitir que las densidades de ambas clases de cargas permanecen prácticamente constantes a lo largo del cilindro.*

*Debido al campo eléctrico  $E$ , ambos portadores de cargas (electrones,  $e$ , e iones  $i$ ) tienen la misma velocidad  $v$  proporcional al campo  $v = \beta E$ , expresión en la que  $\beta$  es una constante llamada movilidad de la carga.*

**A3. Expresar la corriente eléctrica  $I$  en el cilindro en función de  $U$ ,  $\beta$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $Z_{\text{ext}}$ ,  $r$  y  $e$  ( $e =$  carga elemental de electricidad)**

En el estado de equilibrio dentro del cilindro se están produciendo electrones por unidad de tiempo:  $Z_{\text{ext}} LS$ . En esa unidad de tiempo desaparecen por recombinación  $Z_{\text{rec}} LS$ , y además existe una intensidad de corriente  $I_e$ . Si  $n$  representa los electrones que desaparecen al llegar al ánodo (electrodo positivo) que forman parte de la intensidad de la corriente, la carga es  $ne$  y por definición de intensidad

$$I_e = \frac{ne}{t} \Rightarrow \frac{n}{t} = \frac{I_e}{e}$$

El balance en el estado estacionario es:

$$Z_{\text{ext}} LS = Z_{\text{rec}} LS + \frac{I_e}{e} = r n_e n_i LS + \frac{I_e}{e}$$

Como se producen los mismos iones que electrones, el argumento anterior sirve para los iones

$$Z_{\text{ext}} LS = Z_{\text{rec}} LS + \frac{I_i}{e} = r n_e n_i LS + \frac{I_i}{e}$$

La intensidad de la corriente electrónica es  $I_e = n_e e S v = n_e e S \beta E \Rightarrow n_e = \frac{I_e}{e S \beta E}$  y la

de la corriente iónica  $I_i = n_i e S v = n_i e S \beta E \Rightarrow n_i = \frac{I_i}{e S \beta E}$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores y sumándolas

$$2Z_{\text{ext}} LS = 2r LS \left( \frac{I_e}{e S \beta E} \cdot \frac{I_i}{e S \beta E} \right) + \frac{I_e + I_i}{e} \Rightarrow Z_{\text{ext}} LS = \frac{r LS (I_e \cdot I_i)}{(e S \beta E)^2} + \frac{I_e + I_i}{2e}$$

Designamos con  $I$  a la intensidad total y como la contribución de la corriente electrónica y la iónica son iguales, resulta que  $I = I_e + I_i \Rightarrow I_e = I_i = \frac{I}{2}$ . La relación entre el campo  $E$  y el voltaje aplicado es  $U = EL$ , sustituyendo en la última ecuación

$$Z_{\text{ext}}LS = \frac{rL \left( \frac{I^2}{4} \right)}{S \left( e \beta \frac{U}{L} \right)^2} + \frac{I}{2e} = \frac{rL^3 I^2}{4e^2 \beta^2 U^2 S} + \frac{I}{2e} \Rightarrow \frac{rL^3}{4e^2 \beta^2 U^2 S} I^2 + \frac{1}{2e} I - Z_{\text{ext}}LS = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$I = \frac{-\frac{1}{2e} \pm \sqrt{\frac{1}{4e^2} + 4 \frac{rL^3}{4e^2 \beta^2 U^2 S} Z_{\text{ext}}LS}}{\frac{rL^3}{2e^2 \beta^2 U^2 S}} = \frac{-\frac{1}{2e} \pm \frac{1}{2e} \sqrt{1 + \frac{4rL^3}{\beta^2 U^2 S} Z_{\text{ext}}LS}}{\frac{rL^3}{2e^2 \beta^2 U^2 S}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4rL^3}{\beta^2 U^2 S} Z_{\text{ext}}LS}}{\frac{rL^3}{e \beta^2 U^2 S}} = \frac{e \beta^2 U^2 S \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2}} \right]}{rL^3}$$

$I$  tiene que ser positivo por ello se ha elegido el término positivo en la solución.

**A4. Encontrar la resistividad  $\rho_{\text{gas}}$  cuando el voltaje aplicado sea suficientemente pequeño y expresarlo en función de  $\beta$ ,  $L$ ,  $Z_{\text{ext}}$ ,  $r$  y  $e$ .**

Si el voltaje aplicado  $U$  es suficientemente pequeño  $\frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2} \gg 1$ , aproximamos el término de la raíz cuadrada de la ecuación anterior a

$$-1 + \sqrt{\frac{4rL^4 Z_{\text{ext}}}{\beta^2 U^2}} \Rightarrow \text{aproximamos a } \frac{2L^2}{\beta U} \sqrt{rZ_{\text{ext}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{e\beta^2 U^2 S}{rL^3} \cdot \frac{2L^2}{\beta U} \sqrt{rZ_{\text{ext}}} = \frac{2e\beta S \sqrt{rZ_{\text{ext}}}}{rL} U$$

La última ecuación es la ley de Ohm

$$R = \rho_{\text{gas}} \frac{L}{S} = \frac{rL}{2e\beta S \sqrt{rZ_{\text{ext}}}} = \rho_{\text{gas}} \frac{L}{S} \Rightarrow \rho_{\text{gas}} = \frac{r}{2e\beta \sqrt{rZ_{\text{ext}}}} = \frac{1}{2e\beta} \sqrt{\frac{r}{Z_{\text{ext}}}}$$

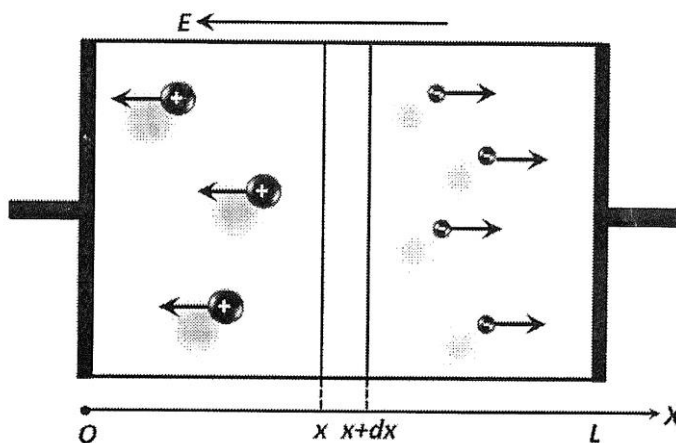
### Parte B. Descarga en un gas automantenida

En esta parte del problema se considera cómo la ignición de una descarga del gas automantenida conduce a que la corriente eléctrica en el cilindro sea automantenida.

¡Atención! En lo que sigue se supone que el ionizador continua funcionando con la misma rapidez  $Z_{\text{ext}}$ , se desprecia el campo eléctrico debido a los portadores de carga por lo que el campo eléctrico a lo largo del cilindro es uniforme y la recombinación no se tendrá en cuenta.

En la descarga del gas automantenida existen dos procesos importantes que anteriormente no se habían considerado. El primero es la emisión secundaria de electrones y el segundo la formación de una avalancha de electrones.

La emisión secundaria ocurre cuando los iones chocan con el electrodo negativo, llamado cátodo, y los electrones rebotan hacia el electrodo positivo, llamado ánodo. El cociente entre el número de electrones que rebotan por unidad de tiempo  $N_e$ , y los que chocan contra el cátodo  $N_i$  es el denominado coeficiente de emisión electrónica secundaria  $\gamma = \frac{N_e}{N_i}$ .



La formación de la avalancha electrónica se explica a continuación. El campo eléctrico acelera a los electrones libres, los cuales adquieren la suficiente energía cinética para que al chocar contra los átomos del gas los ionicen, y como resultado de este proceso, el número de electrones que se desplazan hacia el ánodo aumenta considerablemente. Este proceso se describe mediante el denominado coeficiente de Townsend  $\alpha$ , el cual caracteriza un incremento en el número de electrones  $dN_e$ , debido a los electrones  $N_e$  que han atravesado la distancia  $dl$

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e$$

*La corriente total  $I$  en una sección normal del cilindro que contiene el gas es la suma de dos corrientes: una iónica  $I_e(x)$  y una electrónica  $I_e(x)$ . En el estado estacionario esta última corriente depende de la coordenada  $x$ , véase la figura superior.*

*La corriente electrónica  $I_e(x)$  varía a lo largo del eje  $X$  según la ecuación*

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2$$

*Siendo  $A_1$ ,  $A_2$  y  $C_1$  constantes.*

**B1. Encontrar  $A_1$  y  $A_2$  y expresarlas en función de  $Z_{ext}$ ,  $\alpha$ ,  $e$ ,  $L$  y  $S$**

Designamos con  $I_e(x)$  la intensidad eléctrica debida a los electrones a la altura  $x$  de la sección del cilindro y  $I_e(x+dx)$  la intensidad a una distancia  $dx$  de la anterior.

La intensidad  $I_e(x+dx) > I_e(x)$  ya que por una parte se han producido nuevos electrones debido al ionizador externo ( $Z_{ext}$ ) y por otra a los que aparecen debido al efecto de avalancha (efecto Townsend)..

Los electrones viajan a una velocidad  $v$  y emplean un tiempo  $dt$  en recorrer la distancia  $dx$ . El cociente  $I/e$  representa el número de electrones por unidad de tiempo, luego el número de electrones en el tiempo  $dt$  es:

$$dN_e = \frac{I_e(x+dx) - I_e(x)}{e} dt = \frac{1}{e} \frac{dI_e(x)}{dx} dx dt \quad (1)$$

$Z_{ext}$  representa el número de electrones (también de iones) que el ionizador externo produce por unidad de tiempo y de volumen, por tanto, en el tiempo  $dt$  y en el volumen  $Sdx$ , se producen los siguientes electrones:  $dN_e^{ext} = Z_{ext} S dx dt$ .

Debido al efecto de avalancha y de acuerdo con la ecuación el enunciado:

$$dN_e^a = \alpha N_e dx$$

Recordemos que la densidad electrónica es el número de electrones por unidad de volumen, que  $dx = v dt$  y que  $I = n_e e S v$

$$n_e = \frac{N_e}{S dx} \Rightarrow dN_e^a = \alpha n_e S dx v dt = \alpha \frac{I_e(x)}{e} dx dt$$

Llevando los resultados de los dos efectos a la ecuación (1) resulta:

$$\frac{1}{e} \frac{dI_e(x)}{dx} = Z_{ext} S + \alpha \frac{I_e(x)}{e} \Rightarrow \frac{dI_e(x)}{dx} = Z_{ext} e S + \alpha I_e(x) \quad (2)$$

Según el enunciado del apartado

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2 \Rightarrow \frac{dI_e(x)}{dx} = C_1 A_1 e^{A_1 x}$$

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$C_1 A_1 e^{A_1 x} = Z_{\text{ext}} eS + \alpha C_1 e^{A_1 x} + \alpha A_2$$

Para que la igualdad se cumpla

$$C_1 A_1 e^{A_1 x} = \alpha C_1 e^{A_1 x} \Rightarrow \alpha = A_1$$

$$Z_{\text{ext}} eS = -\alpha A_2 \Rightarrow A_2 = -\frac{Z_{\text{ext}} eS}{\alpha}$$

**La corriente iónica  $I_i$  varía lo largo del eje X según la ecuación**

$$I_i(x) = B_1 e^{B_2 x} + C_2$$

**Siendo  $B_1$ ,  $B_2$  y  $C_2$  constantes.**

**B2. Encontrar  $B_1$  y  $B_2$  y expresarlas en función de  $Z_{\text{ext}}$ ,  $\alpha$ ,  $e$ ,  $L$ ,  $S$  y  $C_1$**

La intensidad de corriente iónica  $I_i$  es, en valor absoluto, igual a la intensidad de corriente electrónica  $I_e$ , ya que el ionizador externo produce los mismos electrones que iones (véase la parte A del problema), la velocidad de los electrones y de los iones se considera igual (véase el enunciado anterior a la pregunta A3), y en el fenómeno de la avalancha, cada electrón al chocar con un átomo neutro da lugar a un electrón y a un ión. La diferencia es que la corriente electrónica se desplaza en el sentido positivo del eje X, y la iónica en sentido contrario. Este paralelismo nos permite escribir

$$-\frac{dI_i(x)}{dx} = Z_{\text{ext}} eS + \alpha I_e(x)$$

Hallamos la derivada de  $I_i(x)$  respecto de X y sustituimos en la ecuación del enunciado

$$\frac{dI_i(x)}{dx} = B_1 B_2 e^{B_2 x} \Rightarrow -B_1 B_2 e^{B_2 x} = Z_{\text{ext}} eS + \alpha C_1 e^{A_1 x} + \alpha A_2$$

En la última ecuación sabemos que  $\alpha = A_1$  y  $Z_{\text{ext}} eS = -\alpha A_2$ , luego.

$$-B_1 B_2 e^{B_2 x} = \alpha C_1 e^{A_1 x} \Rightarrow -B_1 B_2 = \alpha C_1 \quad \text{y} \quad B_2 x = A_1 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_2 = A_1 = \alpha \quad \text{y} \quad -B_1 \alpha = \alpha C_1 \Rightarrow B_1 = -C_1$$

**B3. Encontrar el valor de  $I_i(x)$  cuando  $x=L$**

Los iones se mueven hacia el electrodo negativo (cátodo) y son rechazados por el electrodo positivo (ánodo), en consecuencia no puede haber corriente registrada en este electrodo:  $I_i(L) = 0$ .

**B4. Encontrar la relación de  $I_i(x)$  y  $I_e(x)$  cuando  $x=0$**

Cuando  $x=0$  nos encontramos en el cátodo donde llegan los iones positivos que al chocar contra el electrodo dan lugar a electrones que justamente lo abandonan. El enunciado nos dice la relación  $\gamma = \frac{N_e}{N_i} \Rightarrow N_e = N_i \gamma$ , como la intensidad es proporcional al número de electrones por unidad de tiempo, podemos escribir la ecuación

$$I_e(x) = \gamma I_i(x)$$

**B5. Encontrar la corriente total  $I$  y expresarla en función de  $Z_{ext}$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $e$ ,  $L$  y  $S$ . Se supone que permanece finita.**

La intensidad total es la suma de las intensidades iónica y electrónica cuyas ecuaciones están dadas en el enunciado

$$I = I_i(x) + I_e(x) = \left( B_1 e^{B_2 x} + C_2 \right) + \left( C_1 e^{A_1 x} + A_2 \right) =$$

Hemos visto que:  $A_1 = \alpha$ ,  $A_2 = -\frac{eZ_{ext}S}{\alpha}$ ,  $B_1 = -C_1$ ,  $B_2 = \alpha$

$$I = -C_1 e^{\alpha x} + C_2 + C_1 e^{\alpha x} - \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} = C_2 - \frac{eZ_{ext}S}{\alpha}$$

Cuando  $x=L$ ,  $I_i(L)=0$

$$I_i(L) = 0 = B_1 e^{B_2 L} + C_2 \Rightarrow C_2 = -B_1 e^{B_2 L} = C_1 e^{\alpha L} \Rightarrow C_1 = \frac{C_2}{e^{\alpha L}} \quad (3)$$

Cuando  $x=0$ ,  $I_e(0) = \gamma I_i(0)$

$$C_1 + A_2 = \gamma(B_1 + C_2) \Rightarrow C_1 + A_2 = \gamma(-C_1 + C_2) \Rightarrow C_1(1 + \gamma) = \gamma C_2 + \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\gamma C_2 + \frac{eZ_{ext}S}{\alpha}}{1 + \gamma} \quad (4)$$

Igualando (3) y (4)

$$\frac{C_2}{e^{\alpha L}} = \frac{\gamma C_2 + \frac{eZ_{ext}S}{\alpha}}{1 + \gamma} \Rightarrow C_2 \left( 1 - \frac{\gamma e^{\alpha L}}{1 + \gamma} \right) = \frac{eZ_{ext}S}{\alpha(1 + \gamma)} e^{\alpha L} \Rightarrow C_2 (1 + \gamma - \gamma e^{\alpha L}) = \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} e^{\alpha L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} \left[ \frac{e^{\alpha L}}{(1 + \gamma) - \gamma e^{\alpha L}} \right] = \frac{eZ_{ext}S}{\alpha} \left[ \frac{1}{e^{-\alpha L}(1 + \gamma) - \gamma} \right]$$

Llevando el valor de  $C_2$  a la intensidad total, resulta:

$$I = \frac{eZ_{\text{ext}}S}{\alpha} \left[ \frac{1}{e^{-\alpha L}(1+\gamma)-\gamma} \right] - \frac{eZ_{\text{ext}}S}{\alpha} = \frac{eZ_{\text{ext}}S}{\alpha} \left[ \frac{1}{e^{-\alpha L}(1+\gamma)-\gamma} - 1 \right] \quad (5)$$

*Sea el coeficiente  $a$  de Townsend constante. Si la longitud del cilindro crece y se alcanza un valor crítico  $L_c > L$ , entonces el ionizador externo puede desconectarse y la descarga es automantenida.*

**B6. Encontrar  $L_c$  y expresar su valor en función de  $Z_{\text{ext}}$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $e$ ,  $L$  y  $S$**

De la ecuación (5) se deduce que si la longitud del cilindro aumenta, el denominador de la fracción que figura dentro del paréntesis cuadrado puede hacerse negativo lo cual conlleva a valores de  $I$  negativos, lo cual carece de sentido para una descarga con el ionizador externo funcionando.

Townsend propuso que el paso a la descarga automantenida se produce cuando

$$e^{-\alpha L_c}(1+\gamma)-\gamma = 0 \Rightarrow e^{-\alpha L_c} = \frac{\gamma}{1+\gamma} \Rightarrow \frac{1}{e^{\alpha L_c}} = \frac{\gamma}{1+\gamma} \Rightarrow e^{\alpha L_c} = \frac{1+\gamma}{\gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha L_c = \ln\left(\frac{1+\gamma}{\gamma}\right) \Rightarrow L_c = \frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$$