

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPLADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez
Ricardo David Fernández Cruz

Madrid 2015

Tabla de constantes para su uso en los problemas de la 46^a Olimpiada Internacional de Física

Aceleración de la gravedad en la Tierra	g	$9,807 \text{ ms}^{-2}$
Presión atmosférica	P_{atm} ...	$1,013.10^5 \text{ Pa}$
Número de Avogadro	N_A	$6,022.10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	k_B ...	$1,381.10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
Energía de enlace del átomo de hidrógeno.	$13,606 \text{ eV}$
Carga eléctrica del electrón	e	$-1,602.10^{-19} \text{ C}$
Masa del electrón	m_e	$9,109.10^{-31} \text{ kg}$
Masa del neutrón	m_n	$1,675.10^{-27} \text{ kg}$
Permeabilidad del vacío	μ_0 ...	$1,257.10^{-6} \text{ mkgC}^{-2}$
Permitividad del vacío	ϵ_0 ...	$8,854.10^{-12} \text{ N}^{-1}\text{m}^{-2}\text{C}^2$
Constante de Planck	h	$6,626.10^{-34} \text{ Js}$
Velocidad del sonido en el aire a temperatura ambiente	c_a ...	$3,403.10^2 \text{ ms}^{-1}$
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2,298.10^8 \text{ ms}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ ...	$5,670.10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
Constante de Gravitación Universal	G ...	$6,674.10^{-11} \text{ N.m}^2\text{kg}^{-2}$
Constante de los gases	R ...	$8,315 \text{ Jmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

XLVI. OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. 2015. INDIA

PROBLEMA 1. Partículas del Sol

Los fotones procedentes de la superficie del Sol y los neutrinos de su núcleo nos sirven para deducir la temperatura solar y confirmar que el Sol brilla debido a las reacciones nucleares.

En este problema emplearemos los siguientes datos del Sol. Masa Sol $M_S=2,00 \cdot 10^{30}$ kg ; Radio : $R_S= 7,00 \cdot 10^8$ m ; Luminosidad (energía radiante emitida en la unidad de tiempo) $L_S=3,85 \cdot 10^{26}$ W, distancia de la Tierra al Sol , $d_S= 1,50 \cdot 10^{11}$ m.

Ayuda:

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right) e^{ax} + Cte ;$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) e^{ax} + Cte$$

$$\int x^3 e^{ax} dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4} \right) e^{ax} + Cte$$

Parte A. Radiación procedente del Sol

A1.- Se supone que el Sol irradia como un perfecto cuerpo negro. Utilice este hecho para determinar la temperatura T_S de la superficie solar

El espectro de la radiación solar se puede aproximar razonablemente bien de acuerdo con la ley de Wien. Según esta ley la energía solar incidente sobre cualquier superficie de la Tierra por unidad de tiempo y unidad de intervalo de frecuencia $u(\nu)$ está dada por la ecuación

$$u(\nu) = A \frac{R_S^2}{d_S^2} \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T_S}}$$

Donde ν es la frecuencia, A el área de la superficie normal a la dirección de la radiación incidente.

Considerar una célula solar que consiste en un disco delgado semiconductor de área A , colocado perpendicularmente a la dirección de los rayos del Sol.

A2.-Utilizando la aproximación de Wien, determinar la potencia total P_{in} , irradiada por el Sol, que incide sobre la superficie de la célula, expresándola en función de A , R_s , T_s y las constantes fundamentales c , h , k_B .

A3.-Expresar el número de fotones $n_\nu(\nu)$ por unidad de tiempo y por unidad de intervalo de frecuencia que inciden sobre la célula solar en función de A , R_s , d_s , T_s , ν y las constantes fundamentales c , h , k_B .

El material semiconductor de la célula solar tiene una banda prohibida de energía E_g , Supongamos el siguiente modelo: Cada fotón de energía $E \geq E_g$ excita a un electrón a través de la banda prohibida. Este electrón suministra una energía E_g como energía útil de salida, y cualquier energía extra se disipa en forma de calor (no se convierte en energía útil).

A4.- Se define $x_g = \frac{h \nu_g}{k_B T_S}$ siendo $E_g = h\nu_g$. Expresar la potencia útil de la célula P_{out} en función de x_g , A , R_s , d_s , T_s , y las constantes fundamentales c , h , k_B .

A5.- Determine el rendimiento η de esta célula solar en función de x_g .

A6.-Haga un bosquejo cualitativo de η frente a x_g . Los valores de $x_g=0$ y $x_g \rightarrow \infty$ deben mostrarse claramente ¿Cuál es la pendiente de $\eta(x_g)$ a $x_g=0$

y $x_g \rightarrow \infty$

A7.-Se designa con x_0 al valor numérico de x_g para el cual η es máximo. Obtenga la ecuación cúbica que da el valor de x_0 . Estime el valor de x_0 dentro de una aproximación de $\pm 0,25$. Luego calcule $\eta(x_0)$

A8.-La banda prohibida del silicio puro es $E_g= 1,11$ eV, Calcular el rendimiento η_{Si} de una célula solar.

A últimos del siglo diecinueve Kelvin y Helmholtz (KH) propusieron una hipótesis para explicar el brillo del Sol. Postularon que en el comienzo una masa de materia muy grande M_S y de densidad despreciable se ha ido colapsando de forma continua. El brillo del Sol es debido a la energía potencial perdida a través de esta lenta contracción.

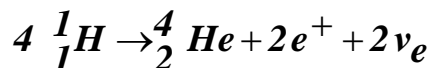
A9.-Admitimos que la densidad de la materia es uniforme dentro del Sol. Calcular la energía potencial gravitacional en el Sol Ω , en función de G , M_S y R_S

A10.- Calcular el máximo tiempo posible t_{KH} en años, durante el cual el Sol ha estado brillando de acuerdo con la hipótesis KH. Suponer que la luminosidad del Sol se ha mantenido constante durante este periodo.

El tiempo anterior no iguala a la edad del sistema solar estimada a partir de los meteoritos, lo cual indica que la fuente de energía del Sol no puede ser solamente gravitatoria.

Parte B. Neutrinos procedentes del Sol

En 1938 Hans Bethe propuso que la conversión de hidrógeno en helio en el núcleo del Sol es la fuente de energía. La reacción nuclear global es:



Los neutrinos electrónicos que aparecen en esta reacción pueden considerarse sin masa. Ellos escapan del Sol y su detección en la Tierra confirma la existencia de reacciones nucleares en el núcleo del Sol. La energía portadora de los neutrinos se considera despreciable en este problema.

B1.- Calcular la densidad de flujo de los neutrinos Φ_ν que llegan a la Tierra expresándola en $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$. La energía liberada en la reacción anterior es: $\Delta E = 4,0 \cdot 10^{-12} \text{ J}$. Se supone que la energía radiada por el Sol se debe completamente a esa reacción.

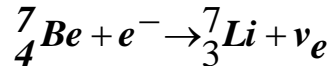
En el desplazamiento desde el núcleo del Sol a la Tierra alguno de los neutrinos ν_e se transforman en otro tipo de neutrinos ν_x . El rendimiento del detector para los neutrinos ν_x es 1/6 del rendimiento cuando detecta neutrinos ν_e . Si no hubiese transformación de neutrinos se detectarían en promedio N_1 cada año, pero al haber transformación el promedio es N_2 (ν_e y ν_x combinados) por año.

B2.- En función de N_1 y N_2 calcular qué fracción f de los neutrinos electrónicos ν_e que se convierten en ν_x

Para detectar los neutrinos se construyen grandes depósitos llenos de agua. La interacción de los neutrinos con la materia es muy poco probable, pero en alguna ocasión los neutrinos golpean a electrones de moléculas de agua transmitiéndoles energía. Estos electrones energéticos se mueven a través del agua con velocidades muy grandes, emitiendo radiación electromagnética. Mientras que la velocidad del electrón sea mayor que la de la luz en el agua (índice de refracción del agua, n), la radiación emitida, denominada radiación Cherenkov, tiene forma de cono.

B3.- Suponer que un electrón golpeado por un neutrino pierde energía con una rapidez α por unidad de tiempo mientras se desplazaba por el agua. Si este electrón emite radiación Cherenkov durante un tiempo Δt . Determinar la energía transmitida por el neutrino al electrón ($E_{\text{impartida}}$) en función de α , Δt , n , m_e , y c . Se supone que el electrón se encontraba en reposo cuando interaccionó con el neutrino.

La fusión del hidrógeno en helio se verifica en varias etapas. Los núcleos de ${}^7\text{Be}$ (masa en reposo m_{Be}) se producen durante una de esas etapas intermedias. Después él puede absorber un electrón dando lugar a un núcleo de ${}^7\text{Li}$ (masa en reposo $m_{\text{Li}} > m_{\text{Be}}$) emitiendo un neutrino ν_e . La correspondiente reacción nuclear es:



Cuando el núcleo de ${}^7\text{Be}$ ($m_{\text{Be}} = 11,65 \cdot 10^{-27}$ kg) está en reposo y absorbe un electrón también en reposo el neutrino emitido posee una energía $E_\nu = 1,44 \cdot 10^{-13}$ J. No obstante el núcleo de berilio está en un movimiento térmico al azar debido a la temperatura del núcleo del Sol y actúa como una fuente de neutrinos en movimiento. A consecuencia de esto la energía emitida por los neutrinos fluctúa siendo su rms (raíz cuadrada de los cuadrados de los valores numéricos) ΔE_{rms}

PROBLEMA 2. El principio extremo

A.- El principio extremo en Mecánica

Considerar un plano horizontal x - y sin rozamiento como el mostrado en la figura 1, está dividido en dos regiones I y II, por medio de una línea AB de ecuación $x = x_1$. La energía potencial de una partícula puntual de masa m en la región I es $V=0$ y en la región II, $V = V_0$.

Dicha partícula parte de O con una velocidad v_1 formando un ángulo θ_1 con el eje x . y alcanza el punto P de la región II con una velocidad v_2 y con un ángulo θ_2 con el eje x . No considerar la gravedad ni efectos relativistas en todo el problema.

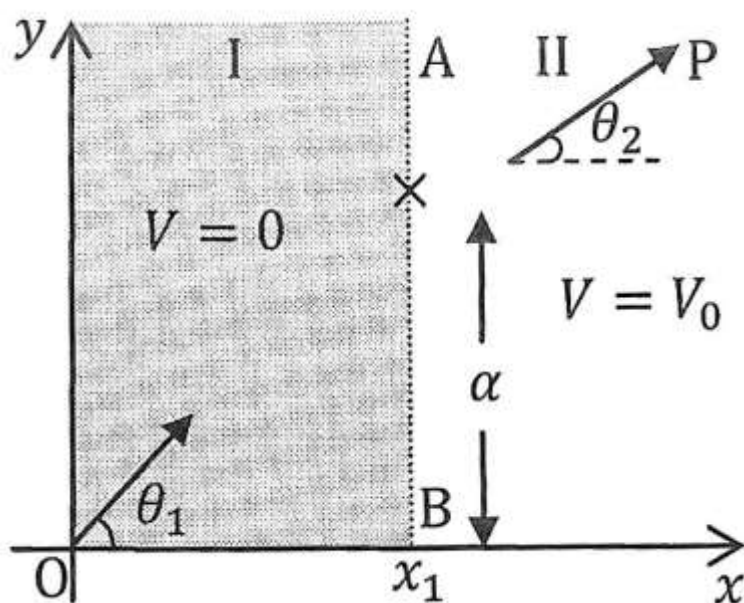


Fig.1

A1.- Obtener una expresión para v_2 en función de m , v_1 y V_0

A2.- Obtener la relación de v_2 con relación a v_1 , θ_1 y θ_2

Se define una magnitud denominada acción como $A = m \int v ds$, en la que ds representa una longitud infinitesimal a lo largo de la trayectoria de una partícula de masa m que se desplaza con una velocidad $v(s)$. La integral se verifica sobre la trayectoria. Como ejemplo para una partícula que se mueve con velocidad constante por una trayectoria circular de radio R , la acción A a lo largo de una revolución es $A = 2\pi Rmv$.

Para una partícula con energía constante E se demuestra que de todas las posibles trayectorias entre dos puntos fijos, la real corresponde a aquella en la cual A es un extremo (máximo o mínimo). Históricamente se conoce como el Principio de mínima acción (PLA).

A3.- PLA supone que la trayectoria de una partícula entre dos puntos fijos en una región de potencial constante es una línea recta. Los dos puntos de la figura 1 tienen de coordenadas $O(0,0)$ y $P(x_0, y_0)$ y el punto frontera donde la partícula pasa de la región I a la II tiene de coordenadas (x_1, α) . Teniendo en cuenta que x_1 es fijo la acción depende únicamente de α . Determinar $A(\alpha)$. Utilice PLA para obtener la relación v_1/v_2 y estas coordenadas

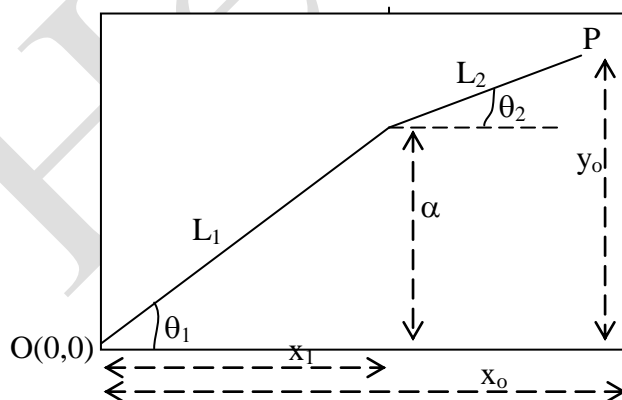


Fig.A3

B.- El principio extremo en Óptica

Un rayo de luz viaja desde el medio I al II cuyos índices de refracción son respectivamente n_1 y n_2 . Los dos medios están separados por una línea paralela al eje x . El rayo de luz forma un ángulo i_1 con el eje Y en el medio I e i_2 en el medio II. (figura 2). Obtener la trayectoria del rayo haciendo uso de otro principio extremo (máximo o mínimo) conocido con el nombre de Principio de Fermat del tiempo mínimo.

B1.-Un rayo de luz se desplaza entre dos puntos fijos a lo largo de una trayectoria que forma parte de un principio extremo. Calcule la relación entre seno i_1 y seno de i_2 utilizando el principio de Fermat.

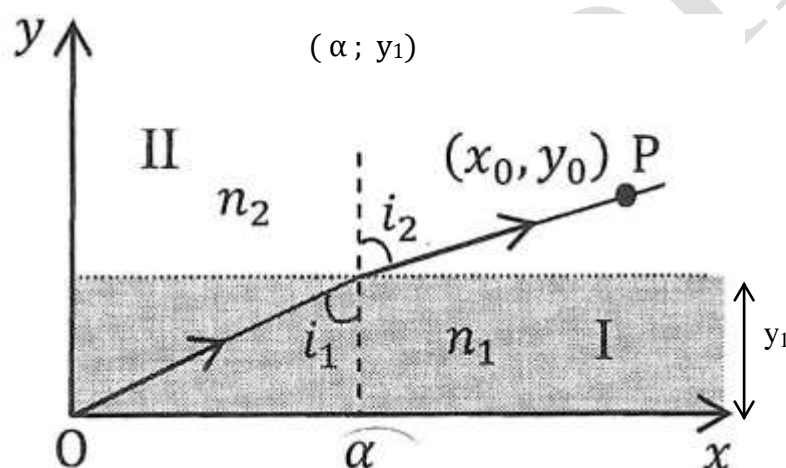


Fig.2

En la figura 3 se indica un boceto de la la marcha de un haz de luz láser que incide horizontalmente en una disolución de azúcar cuya concentración disminuye con la altura y como consecuencia el índice de refracción del medio también disminuye con la altura, medida desde el fondo.

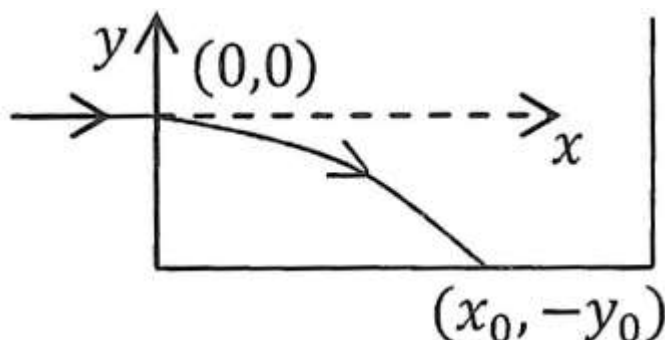


Fig.3

Tanque con disolución de azúcar

B2.- Suponer que el índice de refracción $n(y)$ depende únicamente de y . Emplear la ecuación obtenida en B1 para deducir la expresión de la pendiente dy/dx de la trayectoria del haz en función del índice de refracción n_0 para $y=0$ y $n(y)$.

B3.-El rayo de luz láser penetra horizontalmente por el origen $(0,0)$ en la disolución de azúcar a una altura y_0 por encima del fondo del tanque. Consideremos $n(y) = n_0 - k y$, siendo n_0 y k constantes positivas.

Deducir una expresión para x en función de y ; y con cantidades relacionadas.

Se puede utilizar:

$$1) \int \sec \theta d\theta = \ln(\sec \theta + \tan \theta) + Cte ; \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + Cte$$

B4.- Calcule el valor de x_0 , esto es, el punto donde el haz de luz láser choca con el fondo del tanque.

Tome $y_0 = -10,0$ cm; $n_0 = 1,50$, $k = 0,050$ cm $^{-1}$

C.- El principio extremo en las ondas de la materia.

Vamos a conectar ahora entre el PLA y las ondas materiales que acompañan a una partícula en movimiento. Suponemos que una partícula que se desplaza entre O y P puede hacerlo en todas las posibles trayectorias, buscaremos aquella trayectoria que dependa de la interferencia constructiva de las ondas de De Broglie

C1.- Cuando la partícula se desplaza en su trayectoria una distancia infinitesimal Δs , relacione el cambio $\Delta\Phi$ en la fase de su onda de De Broglie con el cambio ΔA en la acción y la constante de Planck

Para la siguiente cuestión es conveniente mirar de nuevo la figura 1

C2.- En la figura 4 la partícula viaja desde O a P. La línea AB de la figura 1 se ha sustituido por una placa opaca que separa las dos regiones I y II. La citada placa tiene una pequeña abertura CD de ancho d siendo $d \ll (x_0 - x_1)$ y $d \ll x_1$.

Considerar dos trayectorias extremas OCP y ODP siendo OCP la trayectoria discutida en el apartado A.

Calcular la diferencia de fase $\Delta\varphi_{CD}$ entre las dos trayectorias.

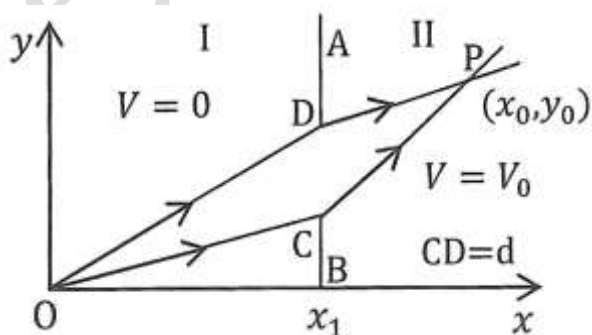


Fig.4

D.- Interferencia en las ondas de la materia.

Considerar una pistola que lanza un haz de electrones desde O y que son alineados por una rendija estrecha F (colimador) situada sobre una separación opaca A_1B_1 cuya abscisa es x_1 . En la figura 5, OFP determinan una línea recta. P es un punto de una pantalla situada con abscisa x_0 . La velocidad en I es $v_1=2,0000 \cdot 10^7$ m/s y $\theta = 10,0000^\circ$. La velocidad en II es $v_2=1,9900 \cdot 10^7$ m/s.

$$x_0 - x_1 = 250,00 \text{ nm}$$

Desprecie la interacción electrón-electrón.

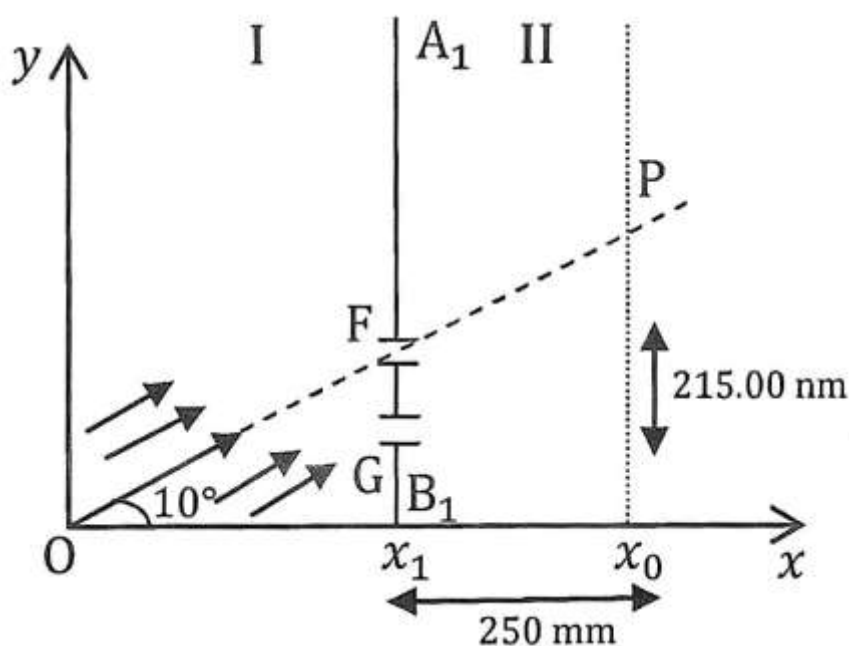


Fig.5

D1.- Si los electrones de O se han acelerado a partir del reposo, calcular el potencial acelerador U_1

D2.- En la superficie de separación opaca A_1B_1 se hace otra rendija G igual a F y situada por debajo de esta, a una distancia $215,00$ nm (figura 5). Si la diferencia de fase entre las ondas de de Broglie que llegan a P procedentes de F y G es $2\pi\beta$. Calcular β .

D3.- ¿Cuál es la distancia más pequeña contada a partir de P para la que se anula la detección del electrón que se espera llegue a la pantalla?
Puede ser útil la aproximación $\text{sen}(\theta + \Delta\theta) \approx \text{sen}\theta + \Delta\theta\text{cos}\theta$

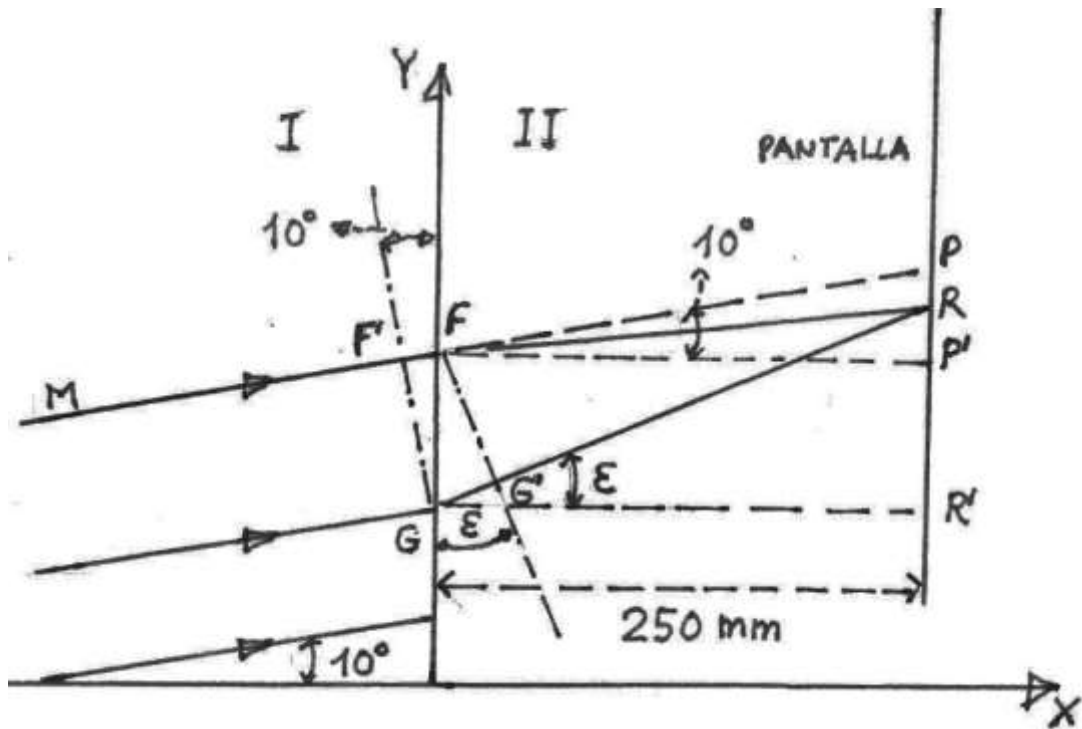


Fig D3

D4.- El haz tienen una sección cuadrada de $500\text{ nm} \times 500\text{ nm}$ y ocupa la longitud de 2 m . ¿Cuál debería ser la densidad de flujo mínima (número de electrones por unidad de área normal y por unidad de tiempo) si en promedio hay al menos un electrón en la región ocupada en un determinado tiempo?

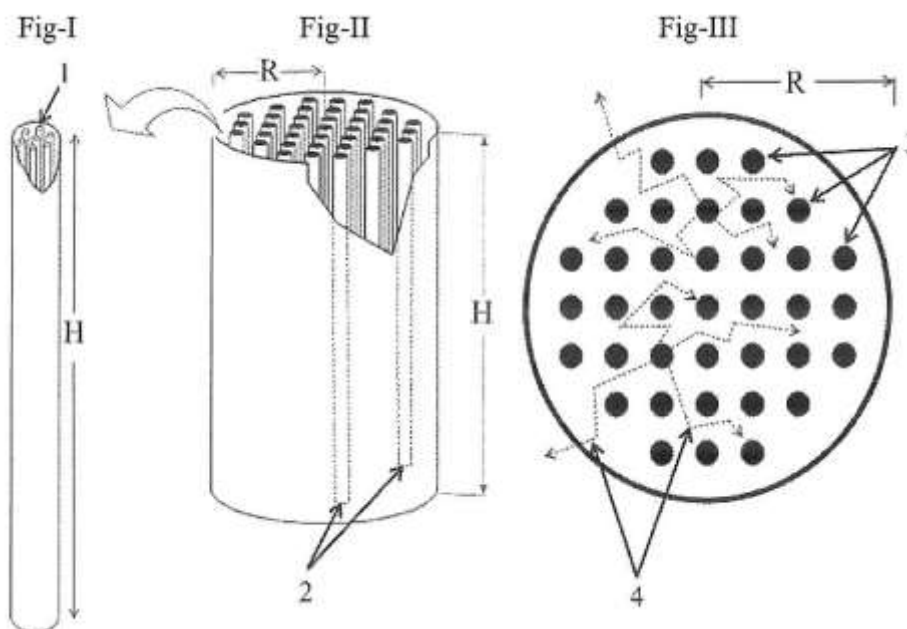
PROBLEMA 3. El diseño de un reactor nuclear

El uranio se encuentra en la naturaleza en forma de UO_2 con una riqueza de 0,720 % de átomos de ^{235}U . Un neutrón provoca una fisión en el ^{235}U dando lugar a 2 o 3 nuevos neutrones con alta energía cinética que a su vez son capaces de producir nuevas fisiones. La probabilidad de aumentar el número de fisiones se logra con neutrones de baja energía. De esta manera reduciendo la energía cinética de los neutrones de fisión es posible provocar la fisión de otros núcleos diferentes del ^{235}U .

Esto es el fundamento de un reactor nuclear de potencia (NR).

Un típico NR consiste en un tanque cilíndrico de altura H y radio R lleno de una sustancia que recibe el nombre de moderador. Una serie de vainas cilíndricas denominadas canales de combustible llevan en su interior de forma apiñada varillas con pastillas de UO_2 sólido. Las vainas se disponen en forma cuadrangular dentro del tanque cilíndrico.

Los neutrones de fisión que aparecen desde fuera del tanque colisionan con el moderador y a consecuencia de esos choques pierden energía cinética y llegan a los canales de combustible con esa baja energía y logran producir fisiones (ver las figuras I-III) El calor generado en el proceso de fisión se transmite a un fluido refrigerante que fluye a través del cilindro. En este problema se estudia algo de la física del combustible (parte A), del moderador (B) y de la geometría del NR (C).



Dibujo esquemático del reactor nuclear (NR) Fig. I. Vista de una vaina conteniendo el combustible. Fig. II. Vista del conjunto de vainas con su combustible dispuestas en el cilindro del reactor nuclear (2). Fig. III. Vista superior de la disposición cuadrangular de las vainas de combustible (3). Los segmentos a trazos representan el movimiento al azar de los neutrones (4).

Solamente se han representado los componentes más interesantes para el problema. No están representadas las barras de control ni el fluido refrigerante.

A.- El combustible

Datos del UO_2 ,-

Masa molar $M_W = 0,270 \text{ kg/mol}$;

Densidad $\rho = 1,060 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$ Temperatura de fusión $T_m = 3,138 \cdot 10^3 \text{ K}$;

Conductividad térmica $\lambda = 3,280 \text{ W/m K}$

A1.- Considerar la siguiente reacción nuclear de un núcleo en reposo de ^{235}U que absorbe un neutrón de energía cinética despreciable



Calcular la energía total liberada en la fisión ΔE (en MeV) .

Las masas nucleares son: $m(^{235}\text{U}) = 235,044 \text{ u}$; $m(^{94}\text{Zr}) = 93,9063 \text{ u}$;

$m(^{140}\text{Cs}) = 139,905 \text{ u}$; $m(^1_0\text{n}) = 1,00867 \text{ u}$; $1 \text{ u} = 931,502 \text{ MeV}/c^2$.

No considerar la carga en el balance.

A2.- Determinar el número N de átomos de ^{235}U por unidad de volumen que existen en el UO_2 natural

A3.- Suponer que la densidad del flujo de neutrones es uniforme sobre el combustible, siendo su valor numérico $\phi = 2,000 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$. La sección eficaz transversal del núcleo ^{235}U es $\sigma_f = 5,400 \cdot 10^{-26} \text{ m}^2$. Si el 80,00% de la energía de fisión aparece en forma de calor, calcular la tasa de producción de calor en la vaina por unidad de volumen Q (en W/m^3).

$1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$

A4.- Alcanzado el régimen estacionario la diferencia de temperaturas entre el centro (T_C) y la periferia de la vaina (T_S) se puede expresar mediante la siguiente ecuación

$$T_C - T_S = kF(Q, a, \lambda)$$

En la que k es una constante sin dimensiones y de valor $\frac{1}{4}$; a es el radio de la vaina y λ la conductividad térmica del UO_2

Obtener $F(Q, a, \lambda)$ utilizando el análisis dimensional

A5.- La temperatura mayor para el refrigerante es $5,770 \cdot 10^2 \text{ K}$. Calcular el valor superior a_u del radio a de la vaina.

B.- El moderador

Considerar que entre el neutrón de masa u y un átomo del moderador de masa Au se verifica una colisión bidimensional elástica. Antes de la colisión los átomos del moderador se encuentran en reposo en el sistema de referencia del laboratorio (LF). Sean \vec{v}_b y \vec{v}_a las velocidades del neutrón antes y después de la colisión respecto de LF.

\vec{v}_m es la velocidad del centro de masas (CM) respecto de LF y θ el ángulo de dispersión del neutrón en el sistema del CM. Todas las partículas se desplazan con velocidades no relativistas

B1.- En la figura IV se indica esquemáticamente la colisión en el sistema LF, siendo θ_L el ángulo de dispersión. Confeccionar un boceto de la colisión en el sistema del CM. Etiquetar las partículas 1, 2 y 3 con las velocidades: \vec{v}_b ; \vec{v}_a ; \vec{v}_m . Indicar el ángulo de dispersión θ .

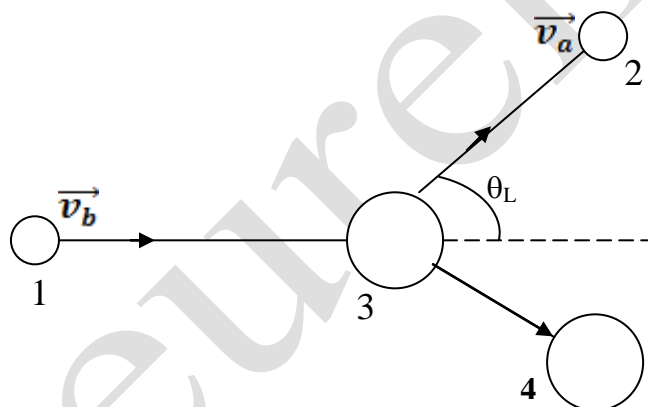
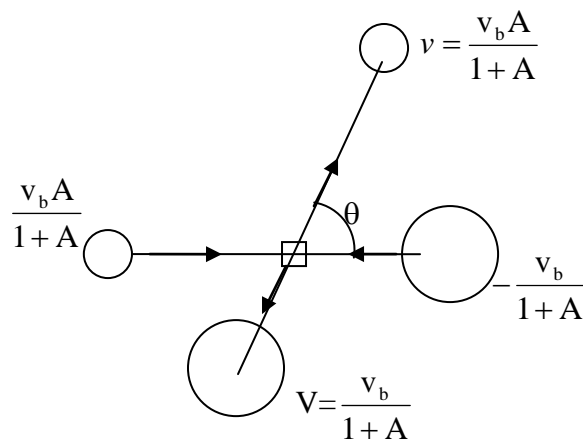


Fig.IV

<p>Colisión en el sistema del laboratorio</p> <p>1.- Neutrón antes de la colisión</p> <p>2.- Neutrón después de la colisión</p> <p>3.- Átomo A del moderador antes de la colisión</p> <p>4.- Átomo A del moderador después de la colisión</p>

B2.- Obtener las velocidades del neutrón (v) y del moderador (V) después de la colisión respecto del centro de masas en función de A y v_b .



B3.- Obtenga una expresión para $G(\alpha, \theta) = E_a/E_b$ siendo E_a y E_b la energía cinética de los neutrones en el sistema LF antes y después de la colisión.

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2$$

B4.- Suponga que la expresión anterior vale para la molécula D_2O . Calcule la fracción máxima de energía perdida $f_j = \frac{E_b - E_a}{E_b}$ del neutrón con el moderador D_2O (masa 20 u)

C.-El reactor nuclear

El reactor nuclear (NR) opera en estado estacionario con un flujo de neutrones constante Ψ ; las fugas de neutrones se compensan por un exceso de neutrones que produce el propio reactor.

Para un reactor de geometría cilíndrica la tasa de fuga de neutrones es

$$k_1 \left[\left(\frac{2,405}{R} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{H} \right)^2 \right] \Psi$$

y la tasa de producción es $k_2 \Psi$. Las constantes k_1 y k_2 dependen del tipo de material del reactor.

C1.- Considerar un NR con $k_1 = 1,021 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ y $k_2 = 8,787 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$. Tenga en cuenta que para un volumen fijo de un reactor la tasa fija de fugas debe ser mínima para una utilización eficaz del combustible; obtenga las dimensiones del NR en estado estacionario..

C2.- Los canales de combustión están dispuestos en una formación cuadrangular (fig. III) con una distancia entre un vecino y otro de 0,286 m. El radio efectivo de una vaina si ésta fuese sólida es: $3,617 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Calcular el número de canales de combustión F_n del reactor y la masa M de UO_2 requerida para que el NR opere en estado estacionario

Heureka