

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez
Ricardo David Fernández Cruz

Madrid 2017

XLVIII. OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. 2017. INDONESIA

1.-LA MATERIA OSCURA

La primera deducción formal de la existencia de la materia oscura fue proporcionada por Fritz Zwicky basándose en la dinámica del cúmulo de galaxias Coma; este cúmulo consta de aproximadamente mil galaxias. Zwicky aplicó el teorema del Virial para estimar la masa del cúmulo.

Para un sistema simple formado por un sol y un planeta que gira alrededor de éste describiendo una órbita circular, el teorema del Virial establece que la energía cinética del planeta es proporcional a su energía potencial gravitatoria. En el caso general de un sistema formado por muchas partículas enlazadas por algún tipo de interacción, el teorema del Virial establece una relación entre la energía cinética promedio en el tiempo con la energía potencial promedio en el tiempo.

En 1933, basándose en sus observaciones de la velocidad de las galaxias situadas cerca del límite del cúmulo Coma, Zwicky estimó que dicho cúmulo tenía más masa de la que se podía ver. La atracción gravitatoria que ejerce el conjunto de galaxias observadas en dicho cúmulo era menor que la necesaria para justificar la velocidad de las galaxias situadas en las cercanías del límite del cúmulo. Por tanto, debe existir una masa oculta que justifique la gran velocidad de estas galaxias. Esa masa oculta es la denominada masa oscura.

En todo lo que sigue a continuación se supone que la masa de cada galaxia es la suma de la masa visible y la masa oscura y ésta última se desplaza junto con la galaxia. La materia oscura interacciona con la masa visible mediante fuerzas gravitatorias.

A. Cúmulo de galaxias

Considerar un cúmulo de galaxias compuesto por un número N grande de galaxias y materia oscura, distribuidas de forma homogénea en una esfera de radio R y con una masa M , que es la suma de las galaxias más la materia oscura. Suponer que la suma de la masa promedio de una galaxia más la masa oscura de la misma es m .

A1. Suponiendo una distribución continua de la materia del cúmulo, encontrar su energía potencial gravitatoria en función de M y R

Debido a la expansión cosmológica, un objeto que se aleja respecto de un observador situado en la Tierra lo hace con una velocidad que depende de la distancia entre el observador y el objeto. En el espectro atómico del hidrógeno aparece una serie de rayas que se denomina serie de Lyman. Si en la galaxia i -ésima del cúmulo se produce una supernova del tipo IA, su frecuencia de Lyman es f_i (con $i=1 \dots N$) mientras que en la Tierra su frecuencia es f_o .

A2. Determine la velocidad promedio V_{cr} del cúmulo de galaxias que se desplazan alejándose de la Tierra en función de f_i ($i=1 \dots N$) f_o y N . Observe que la velocidad de una galaxia es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz.

A3. Si se supone que las velocidades de las galaxias respecto del centro del cúmulo son isotrópicas (la misma en toda dirección), determine la velocidad cuadrática media v_{rms} de las galaxias con respecto al centro del cúmulo en función de N , f_i (con $i=1 \dots N$) y f_o . A partir de este resultado determine la energía cinética media de una galaxia respecto del centro del cúmulo en función de v_{rms} y m .

Para determinar la masa total de un cúmulo se puede utilizar el teorema del virial. Este teorema establece la siguiente igualdad para un sistema de partículas enlazadas por fuerzas conservativas

$$\langle K \rangle_t = -\gamma \langle U \rangle_t$$

Donde $\langle K \rangle_t$ es la energía cinética total promedio en el tiempo, $\langle U \rangle_t$ es la energía potencial total promediada en el tiempo y γ es una constante

Este teorema se puede deducir suponiendo que para un sistema de partículas enlazadas por su propia interacción, las magnitudes de la posición y del momento de cada una de las partículas son finitas y por ello la siguiente cantidad

$$\Gamma = \sum_i \bar{p}_i \cdot \bar{r}_i$$

es finita.

A4. Si se utiliza el hecho de que el promedio para un tiempo muy largo de $\frac{d\Gamma}{dt}$ tiende a ser nulo, esto es $\left\langle \frac{d\Gamma}{dt} \right\rangle_t = 0$, calcular el valor de γ en el teorema del virial aplicado al caso de la interacción gravitacional. Ayuda: Intentar resolver el problema haciendo la suma de Γ para un número pequeño de galaxias.

A5. A partir de los resultados anteriores determine la masa total del cúmulo en función de N , m_g , R y v_{rms} , siendo m_g la masa promedio total y visible de una galaxia. Tenga en cuenta que la velocidad cuadrática media de la materia oscura es la misma que la de las galaxias.

B. Materia oscura en una galaxia

La materia oscura está presente dentro y alrededor de la galaxia. Considerar una galaxia esférica con un borde visible de radio R_g (una distancia exterior donde un gran número de estrellas son visibles, aunque un pequeño número de ellas pueden estar distribuidas más allá de R_g). Considerar a las estrellas de la galaxia como masas puntuales con una masa promedio m_s . Las estrellas de la galaxia están distribuidas homogéneamente con una densidad numérica n y se supone que se desplazan en órbitas circulares.

B1. Si la galaxia estuviese exclusivamente formada por estrellas, encontrar la velocidad $v(r)$ de una estrella en función de su distancia al centro de la galaxia y hacer un esquema de $v(r)$ para $r < R_g$ y $r > R_g$

La existencia de la materia oscura se deduce de la curva de rotación de la galaxia en la que $v(r)$ se obtiene a partir de observaciones. La figura 1 representa una curva de rotación en la que, de forma simplificada, puede admitirse que $v(r)$ es una función lineal para $r \leq R_g$, y constante para $r > R_g$

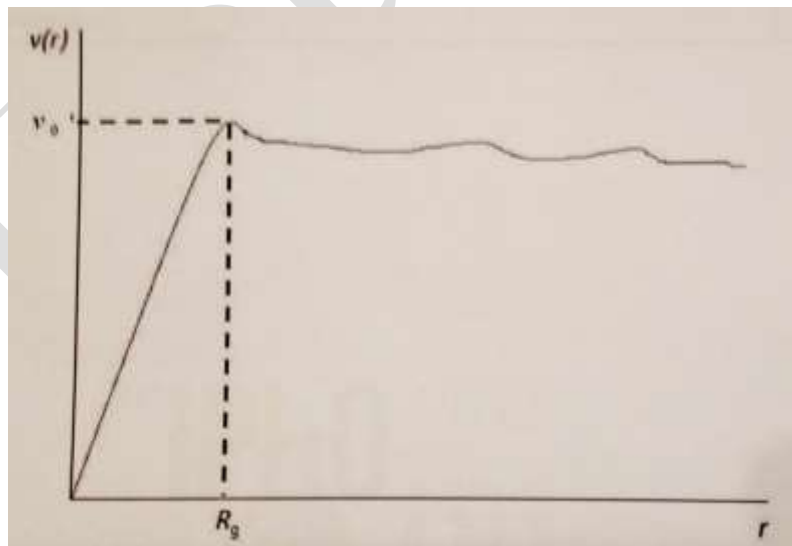


Fig 1.- Curva de rotación de la galaxia

B2. Encontrar la masa total m_R de aquella parte de la galaxia que se encuentra en el interior de una esfera de radio R_g en función de v_o y R_g

B3. Determinar la densidad de masa de la materia oscura en función de r , R_g , v_o , n y m_s para $r < R_g$ y $r \geq R_g$

Heureka

C. Gas interestelar y materia oscura

Consideremos ahora una galaxia joven cuya masa es predominantemente gas interestelar y materia oscura (se desprecia la masa de las estrellas). Se parte de la suposición que el gas interestelar está constituido por partículas idénticas de masa m_p . Su densidad numérica $n(r)$ y temperatura $T(r)$ dependen de la distancia r al centro de la galaxia. Aunque suceden muchos procesos físicos en el seno del gas supondremos que el gas se encuentra en equilibrio estático debido a la presión y a la atracción gravitacional de la galaxia.

C1. Determinar el gradiente de presión del gas dP/dr en función de $m'(r)$ y $n(r)$. Aquí $m'(r)$ es la masa total del gas y materia oscura dentro de una esfera de radio r contado desde el centro de la galaxia.

C2. Suponiendo que el gas interestelar es un gas ideal, expresar $m'(r)$ en función de $n(r)$, $T(r)$ y sus derivadas con respecto a r .

Con el fin de simplificar lo que sigue, se supone que el gas posee una distribución isoterma a la temperatura T_0 y que la densidad numérica del gas está dada por

$$n(r) = \frac{\alpha}{r(\beta + r)^2}$$

Siendo α y β constantes.

C3. Encontrar la densidad de masa de materia oscura en función de r dentro de la galaxia.

2.-TERREMOTO, VOLCAN Y TSUNAMI

Indonesia es el supermercado de las catástrofes naturales pues ha padecido erupciones volcánicas, terremotos y tsunamis.

A. Erupción del volcán Merapi

El volcán Merapi situado en Yogyakarta es uno de los más activos de Java. Los flujos piroclásticos del volcán son bien conocidos.

El flujo piroclástico es una mezcla caliente de gas y rocas que se desplaza alejándose del volcán. El 26 de Octubre de 2010 el Merapi mostró su carácter explosivo arrojando una nube de cenizas que alcanzó una altura de 12 km y provocó corrientes piroclásticas que obligaron al desplazamiento de 20000 personas.

Intentamos buscar las causas de la gran erupción del Merapi en el 2010. La importancia del agua externa en el magma de las erupciones explosivas denominadas erupciones hidromagmáticas es bien conocida por los geofísicos. Suponemos que un volcán es un sistema que consiste en una mezcla de partículas magmáticas y agua.

Las estructuras de salida del volcán y la atmósfera son los límites del sistema.

Se considera que la erupción explosiva del volcán sucede en dos etapas. (1) Una interacción instantánea magma-agua y (2) un sistema en expansión. Durante la primera etapa una masa de magma (m_m) a una temperatura absoluta (T_m) se mezcla con una masa externa de agua (m_w) a una temperatura absoluta (T_w). El equilibrio térmico se alcanza de forma prácticamente instantánea. Se considera que este proceso ocurre a volumen constante. Se desprecian el calor latente de vaporización del agua y el calor latente de fusión del magma.

A1. Encontrar la temperatura de equilibrio de la primera etapa en función de las masas y capacidades caloríficas por unidad de masa del agua C_{v_w} y del magma C_{v_m}

A2. Determinar la presión de equilibrio en la primera etapa suponiendo que la mezcla se considere como un gas ideal. El volumen por unidad de mol de la mezcla es v_e .

La expansión del sistema (la segunda etapa) puede ocurrir de diferentes maneras, una de las cuales es la detonación térmica. Aunque este proceso es muy complicado podemos medir empíricamente la velocidad relativa de la mezcla expulsada. La velocidad del gas durante la erupción depende de la presión P , de la masa total m y del volumen V de la mezcla en la chimenea del volcán

A3. Determinar la velocidad del gas durante la erupción en función de P , m y V y una constante de proporcionalidad k .

La presión observada es del orden de 100 MPa. Esto determina que la velocidad de la erupción es similar a la de una bala.

B. El terremoto de Yogyakarta

El terremoto de Yogyakarta del año 2006 fue de magnitud $M_w=6,4$, destruyó muchos edificios en el área de Bantul y Yogyakarta y ocurrió a las 05:54:00,00 hora local ó 22:54:00.00 UTC(tiempo universal coordinado). El terremoto lo causó un desplazamiento repentino de la falla Opak (ver figura 2). El hipocentro se localizó a 15 km bajo la superficie.

La onda sísmica que se propaga sobre la corteza terrestre se registra mediante un sismómetro. El diagrama de un sismómetro se denomina sismograma. Los sismogramas representan la velocidad vertical terrestre frente al tiempo registrados en la estación de Gamping Yogyakarta (YOGY) (Fig.2) y Denpasar, Bali(DNP) (fig.3)

En general las ondas sísmicas constan de tres tipos de onda: La longitudinal o primaria (onda P), la transversal o secundaria (onda S) y la onda superficial. Las ondas P y S se desplazan bajo la superficie y la onda superficial viaja a lo largo de la superficie terrestre.

Las ondas sísmicas que viajan bajo la superficie de las estaciones se pueden dividir en aquellas que se propagan en línea recta, las que son

reflejadas por una capa límite y las que se refractan en la próxima capa. La onda longitudinal de la primera onda es la de mayor velocidad mientras que la onda superficial tiene la menor velocidad alrededor del 60% de la onda P.

Las distancias entre el epicentro (la proyección del hipocentro sobre la superficie terrestre) y las estaciones YOGY y DNP son 22,5 km y 500 km respectivamente. La profundidad de la corteza terrestre en Java Indonesia es 30 km. Por debajo de la corteza terrestre en el manto terrestre al igual que otras ondas las ondas sísmicas obedecen a la ley de Snell. Las ondas sísmicas se pueden reflejar en el manto terrestre. En este problema se desprecia la curvatura de la Tierra.

B1. La figura B1 muestra el sismograma registrado en la estación YOGY. Utilícelo para medir la velocidad de las ondas P en la corteza terrestre.

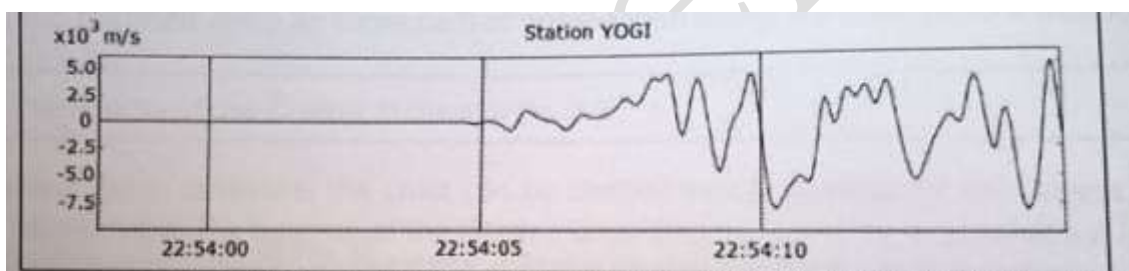


Fig.B1.Sismograma de la estación YOGY

B2. Determinar los tiempos que tardan en llegar la onda P directa y la onda P reflejada debido al terremoto de Yogyakarta a la estación DNP de Denpasar

Suponiendo que la Tierra se compone solamente de dos capas: la corteza y el manto; se constata que la onda primaria se propaga con velocidades constantes diferentes en ambas capas. La velocidad en el manto es mayor que en la corteza. Advierta que la onda P refractada en el manto con un ángulo de 90° posteriormente es refractada de modo parcial de nuevo a la corteza propagándose a lo largo del límite entre la corteza y el manto.

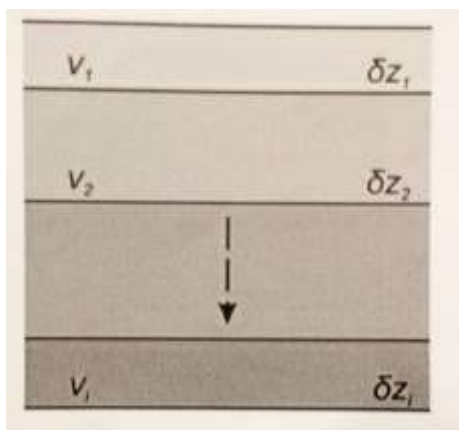
B3. Determinar la velocidad de las ondas P en el manto

Un modelo más real de la estructura de la Tierra, consiste en dividir la corteza en capas delgadas de manera que la velocidad de la onda sísmica sea función de la profundidad z de acuerdo con la ecuación, $v(z) = v_0 + az$ siendo a una constante y el hipocentro se encuentra aproximadamente en la superficie. En este modelo el rayo se curva.

B4. Definimos el rayo por el parámetro, $p = \frac{\text{sen } i(z)}{v(z)}$, i representa el ángulo entre el rayo y la normal. Suponer que una onda sísmica llega a la estación con el parámetro p ; expresar la distancia al hipocentro en función de v_0 y a . Se supone que el hipocentro se encuentra muy cerca de la superficie terrestre

B5. Encontrar el tiempo T empleado por la onda desde el hipocentro hasta cualquier estación. Expresar el resultado en forma de una integral.

La Tierra consiste en una pila de capas homogéneas siendo v_i la velocidad de cada capa y δz_i el espesor de cada capa.



Modelo simplificado de las capas de la Tierra

B6. A partir del resultado del apartado anterior determine el tiempo (T) que tarda la onda desde el hipocentro a la estación DNP, suponiendo que la corteza consiste en solamente tres capas ($i=1, 2, 3$) caracterizadas por las velocidades $v_1=6,65$ km/s , $v_2=6,97$ km/s y $v_3=6,99$ km/s siendo $\rho = 0,143$ s/km, $\delta z_1= 6,0$ km , $\delta z_2= 9,0$ km , $\delta z_3= 15$ km.

C. El tsunami de Java

El terremoto y tsunami del año 2006 en Pangandaran ocurrió el 17 de Julio a las 15:19:27 hora local en la costa oeste y central de Java. Durante el terremoto la falla estaba situada en el fondo del océano. El desplazamiento de la falla produjo una gran onda de agua llamada tsunami. En otras palabras un tsunami es una gran ola de agua que inicialmente tiene una amplitud pequeña y una gran longitud de onda. Considerar que una falla origina una elevación del suelo del océano como indica la figura 2. Se supone que la energía del terremoto se transforma en energía potencial del agua que se eleva sobre el océano. Un modelo simple consiste en que el agua por encima del océano tiene la forma de una caja rectangular de área $\lambda L/2$ ($L \gg \lambda$) y una altura h .

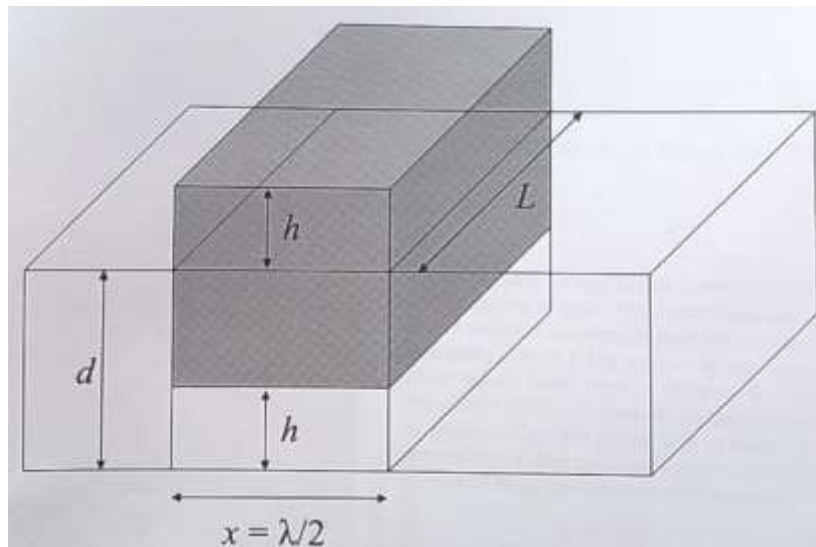


Fig. 2. Ilustración de la onda tsunami, d , es la profundidad del océano

C1. Encontrar la energía potencial del agua situada por encima de la superficie del océano debida al terremoto. La densidad del agua de mar es ρ

C2. Encontrar la velocidad de la onda tsunami hasta el factor sin dimensiones.

C3. Utilizando argumentos de energía determinar la amplitud de la onda del tsunami en función de la profundidad, suponiendo que esta varía lentamente y sabiendo que a una profundidad d_0 la amplitud es A_0 .

3.-INFLACIÓN CÓSMICA

Debido al movimiento relativo de las galaxias observado desde la Tierra, la longitud de onda del espectro visible de una galaxia difiere del de la propia galaxia, fenómeno que se conoce con el nombre de efecto Doppler

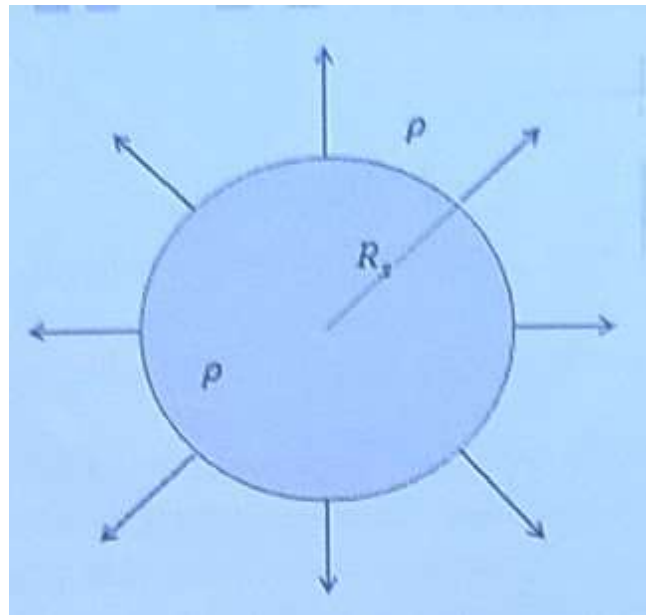
Se espera que si se escogiese de forma aleatoria un grupo de galaxias, en cada una de ellas debería de existir un desplazamiento de la longitud de onda de tal modo que unas tenderían hacia el rojo y otras al azul (negativo).

Sin embargo las observaciones indican, salvo para un grupo cercano de galaxias, que el desplazamiento es hacia el rojo. Esto es así aun cuando las observaciones tengan lugar desde diferentes puntos del universo. La conclusión es que nuestro universo debe estar expansionándose. En otro aspecto las irregularidades locales del universo pueden despreciarse cuando las escalas son mayores que 100 Mpc/ 1 pc= 3,26 años-luz).

Para grandes escalas la distribución de un grupo de galaxias es más y más isotrópico (independiente de la dirección) y homogéneo (independiente de la posición).

En definitiva consideramos al universo como una materia que tiene densidad uniforme ρ y que se encuentra en expansión.

A. Expansión del Universo



En un modelo sencillo de nuestro universo consideramos una esfera en expansión y densidad uniforme, la cual se encuentra sumergida en otra gran esfera de mucho mayor tamaño con la misma densidad. En un determinado momento del tiempo el radio de la esfera más pequeña es R_s . Una expresión para indicar la expansión de la esfera en el tiempo es la ecuación

$$R(t) = a(t) R_s$$

$a(t)$ es el factor de escala.

A partir de la ley de Newton de la gravedad puede evaluarse la velocidad de una masa m que se encuentra en el borde de la esfera y de acuerdo con el modelo del universo se puede obtener un conjunto de ecuaciones de Friedmann

$$\dot{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)}^2 = A_1 \rho(t) - \frac{k c^2}{R_s^2 a^2(t)} \quad (1)$$

Siendo k una constante sin dimensiones y c la velocidad de la luz.

A1. Determine la constante A_1 de la ecuación (1)

Hasta ahora lo expuesto es no relativista. Sin embargo, se puede extender a un sistema relativista reinterpretando que $\rho(t)c^2$ es la

densidad total de energía (excluyendo la energía potencial gravitatoria). En este sistema relativista se llega a la segunda ecuación de Friedmann a partir de la primera ley de la termodinámica y considerando al universo como un sistema adiabático

$$\dot{\rho} + A_2 \left[\rho + \left(\frac{p}{c^2} \right) \right] \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad (2)$$

En la ecuación p es la presión de la esfera.

A2. Determine la constante A_2 de la ecuación (2)

*Para resolver las ecuaciones (1) y (2) debe suponerse una relación $p=p(\rho)$ tal que $\frac{p(t)}{c^2} = w \rho(t)$ siendo w una constante. Existe otro factor $H = \frac{\dot{a}}{a}$ denominado *parámetro de Hubble*. Los valores actuales de los parámetros se indican mediante un subíndice o , tal como t_o, ρ_o, H_o . Por sencillez tomamos $a_o = 1$.*

*Se admite que el Universo comenzó con una gran explosión denominada *Big-Bang* que produjo radiación de partículas relativistas. En el transcurso de la expansión, el universo se enfrió y las partículas pasaron a ser no relativistas. No obstante las observaciones recientes indican que el universo actual está dominado por la constante cosmológica densidad de energía. En el caso del fotón a medida que el universo se expande la longitud de onda del fotón se expande proporcionalmente a un factor de escala.*

A3. Para cada uno de los siguientes tres casos determine el valor de w : (I) un universo lleno solamente de radiación, (II) un universo lleno solamente con materia no relativista, (III) un universo con densidad de energía constante

A4. Si $k=0$, encontrar $a(t)$ para los casos (I) y (II) del apartado anterior. Utilice la condición inicial $a_{t=0}=0$ para los casos (I) y (II) y la condición $a_0=1$ para (III).

La constante k que aparece en la ecuación (1) del enunciado nos da una referencia sobre la geometría espacial del universo. Si $k=+1$ el universo tiene curvatura positiva (cerrado), si $k=0$ universo plano (infinito), si $k=-1$ curvatura negativa (abierto e infinito) Se define la densidad Ω como $\Omega = \frac{\rho}{\rho_C}$, siendo la densidad crítica de energía $\rho_C c^2 = \frac{H^2}{A_1}$, A_1 se ha determinado en el apartado A1.

A5. Escribir la ecuación (1) en función de Ω , H , a y R_0

A6. Encontrar los valores de Ω que corresponden con $k=+1, k=0$ y $k=-1$

B. Motivo para introducir la fase de inflación y sus Condiciones Generales

La observación de la radiación de fondo de las microondas (CMB) sugiere que nuestro actual universo es aproximadamente plano. El problema es que, si esto es cierto, entonces el universo actual debió comenzar a partir de un universo primitivo plano, por otra parte cualquier desviación de la forma plana crecería en el tiempo y destruiría la forma plana actual.

B1. Encontrar $[\Omega(t) - 1]$ en función del tiempo cuando el universo estaba constituido por radiación o materia no relativista (ver cuestión A3.).

Para resolver el problema del universo en un tiempo inicial de su historia, éste debería tener un periodo de energía constante el cual conduciría a una expansión exponencial denominado periodo de inflación.

B2. Encontrar $[\Omega(t) - 1]$ para este periodo de energía constante en función del tiempo. Se supone que $[\Omega(t) - 1] \ll 1$

B3. Mostrar que la inflación implica las siguientes condiciones: presión negativa, expansión acelerada ($\ddot{a} > 0$) y disminución del radio de Hubble $\frac{d(aH)^{-1}}{dt} < 0$

B4. Mostrar que la condición de disminución del radio de Hubble se puede expresar en función del parámetro $\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}$ cuando $\epsilon < 1$

La inflación ocurre mientras $\epsilon < 1$ y luego finaliza cuando $\epsilon = 1$. Se puede definir el término "e-folding" N , tal que $dN = d \ln a = H dt$ y $N = 0$ al final de la inflación

C. Inflación generada por la materia distribuida de forma homogénea.

Como ejemplo de un sistema físico sencillo que puede generar un periodo de inflación es un universo regido por una materia distribuida de forma homogénea. Esta clase de materia se denomina inflatón y se caracteriza por una función $\Phi(t)$.

La ecuación dinámica de la materia se expresa por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V' \quad (3)$$

Siendo $V = V(\phi)$ una función potencial y $V' = \frac{\partial V}{\partial \phi}$. El parámetro de Hubble

$$H^2 = \frac{1}{3M_{Pl}^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \right) \quad (4)$$

M_{Pl} es una constante denominada masa reducida de Planck. La fase de inflación ocurre cuando predomina la energía potencial V sobre la energía cinética $\frac{\dot{\phi}^2}{2}$ durante el tiempo suficiente para que el término $\ddot{\phi}$ en la ecuación (3) se pueda despreciar. Esta condición se denomina aproximación slow-roll (desarrollo lento).

Las cantidades ε y $n_v = \delta + \varepsilon$, donde $\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}$ se denominan parámetros “slow-roll”.

C1. Determinar los parámetros ε y n_v y $dN/d\phi$ en función del potencial $V(\phi)$ y su primera y segunda derivada (V' y V'').

D. Inflación con un potencial sencillo

Las predicciones de cualquiera de los modelos de inflación se comparan con las limitaciones observadas del CMB: $n_s = 0,968 \pm 0,006$ y $r < 0,12$, siendo $r = 16\varepsilon$ y $n_s = 1 + 2n_v - 6\varepsilon$ evaluadas a $\Phi = \Phi_{inicial}$ para un modelo inflacionario generado por la materia dominante. Se supone que el potencial de la materia tiene una forma sencilla

$$V(\Phi) = \Lambda^4 \left(\frac{\Phi}{M_{Pl}} \right)^n$$

Siendo n un entero cualquiera y Λ una constante

D1. Calcular Φ_{final} al terminar la inflación

D2. Expresar r y n_s en función del número e-folding N y el entero n . Estimar el valor de n próximo a los valores observados r y n_s . Tome $N = 60$ en sus cálculos.

Heureka