

PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez
Ricardo David Fernández Cruz

Madrid 2018

XLIX. OLIMPIADA INTERNACIONAL DE FÍSICA. 2018. PORTUGAL

1.-LIGO-GW150914

En 2015 el observatorio LIGO detectó por primera vez el paso de una onda gravitacional (GW) a través de la Tierra. El suceso denominado GW150914 fue ocasionado por ondas producidas por dos agujeros negros que describen órbitas casi circulares. Este problema pretende que usted estime algunos parámetros del sistema, a partir de las propiedades de la señal detectada

Parte A: Órbitas newtonianas conservativas.

A1. Considere un sistema formado por dos estrellas de masas M_1 y M_2 localizadas respectivamente por los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 referidos a un sistema de referencia ligado al centro de masas

$$M_1 \vec{r}_1 + M_2 \vec{r}_2 = 0$$

Las estrellas están aisladas del resto del Universo y se desplazan con velocidades no relativistas.

A partir de las leyes de Newton, el vector aceleración de la masa M_1 se puede expresar por

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\alpha \frac{\vec{r}_1}{r_1^n}$$

Siendo, $r_1 = |\vec{r}_1|$ y $r_2 = |\vec{r}_2|$.

$$n \in \mathbb{N} \quad \alpha = \alpha(G, M_1, M_2)$$

A2. La energía total del sistema de las dos masas, describiendo órbitas circulares, se puede expresar por

$$E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}$$

Siendo $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$; la masa reducida del sistema y $M_1 + M_2$ su masa total, Ω es la velocidad angular de cada masa y L la separación entre ellas, $L = r_1 + r_2$. Obtenga la forma explícita de $A(\mu, \Omega, L)$

A3. La ecuación $E = A(\mu, \Omega, L) - G \frac{M\mu}{L}$ se puede simplificar a

$$E = \beta G \frac{M\mu}{L} . \text{Determine el número } \beta$$

Parte B: Introducción a la disipación relativista

La teoría correcta de la gravitación (Relatividad General) la formuló Einstein en 1915 y predijo que la gravedad se desplazaba a la velocidad de la luz. Los mensajeros portadores de la información acerca de la interacción se denominan GWs. Los GWs se emiten siempre que las masas estén aceleradas, originando que el sistema de masas pierda energía.

Considere un sistema de dos masas puntuales aislado del resto del Universo Einstein demostró que para velocidades pequeñas los emisores GWs: 1) tienen una frecuencia que es dos veces mayor que la frecuencia orbital; 2) se caracterizan por su luminosidad, esto es, el poder de emisión P , el cual se define por la fórmula cuádrupolo

$$P = \frac{G}{5c^3} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right) \left(\frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \right)$$

aquí c es la velocidad de la luz $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Para un sistema de dos partículas puntuales orbitando en el plano XY , Q_{ij} Se corresponde a la siguiente tabla (i, j es el número de la fila/columna)

$$Q_{11} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2x_A^2 - y_A^2) ; \quad Q_{22} = \sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (2y_A^2 - x_A^2) ; \quad Q_{33} = -\sum_{A=1}^2 \frac{M_A}{3} (x_A^2 + y_A^2)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \sum_{A=1}^2 M_A x_A y_A ;$$

$Q_{ij} = 0$ para las otras combinaciones..

(x_A, y_A) es la posición de la masa A respecto del sistema ligado al centro de masas.

B1.- Para las órbitas circulares descritas en A2 las componentes de Q_{ij} se expresan en función del tiempo por

$$Q_{ii} = \frac{\mu L^2}{2} (a_i + b_i \cos kt) \quad ; \quad Q_{ij}^{i \neq j} = \frac{\mu L^2}{2} c_{ij} \sin kt$$

Determine k en función de Ω y los valores numéricos de las constantes a_i ; b_i ; c_{ij}

B2.- Calcule la potencia P emitida en ondas gravitacionales por el sistema, compruebe que obtiene

$$P = \varepsilon \frac{G}{c^5} \mu^2 L^4 \Omega$$

¿Cuál es el valor de ε ?

B3.- Cuando no se emiten GWs las dos masas giran todo el tiempo en una órbita circular, pero si hay emisión de GWs el sistema pierde gradualmente energía y de manera lenta las orbitas circulares son cada vez de menor tamaño.

Determine que el cambio de $\frac{d\Omega}{dt}$ se expresa por

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)^3 = (3\varepsilon)^3 \left(\frac{\Omega^{11}}{c^{15}}\right) (GM_c)^5$$

M_c se denomina masa chirp. Obtenga M_c en función de M y μ . Esta masa es la causa del aumento de la frecuencia durante la disminución de la órbita.

El nombre chirp se inspira en el tono alto (aumento de la frecuencia) emitido por pájaros pequeños.

B4.- Utilizando la información anterior, relacione la velocidad angular orbital Ω con la frecuencia GW, f_{GW} . Para cualquier función suave $F(t)$ y $\alpha \neq 1$

$$\frac{dF(t)}{dt} = \chi F(t)^\alpha \Rightarrow F(t)^{1-\alpha} = \chi(1-\alpha)(t-t_0)$$

χ es una constante, t_0 una constante de integración. A partir de la ecuación del apartado B3 debe llegar a

$$f_{GW}^{\frac{8}{3}} = (8\pi)^{\frac{8}{3}} \varepsilon \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{\frac{2}{3}+p} (t_0 - t)^{2-p}$$

y calcular el valor de p .

El 14 de setiembre del año 2015, GW 150914 se registró en los detectores LIGO, los cuales consisten en dos brazos en forma de L de 4 km de longitud. Estos brazos cambian su longitud de acuerdo con la figura 1. Los brazos del detector responden linealmente al paso de la onda gravitatoria y la respuesta gráfica indica la onda. Esta onda se creó por dos agujeros negros en órbitas cuasi circulares. La pérdida de energía debida a la radiación originó que la órbita disminuyese de tamaño y los agujeros negros podrían llegar a colisionar. El punto de la colisión de forma aproximada es el pico de la señal después del punto D en la figura 1.

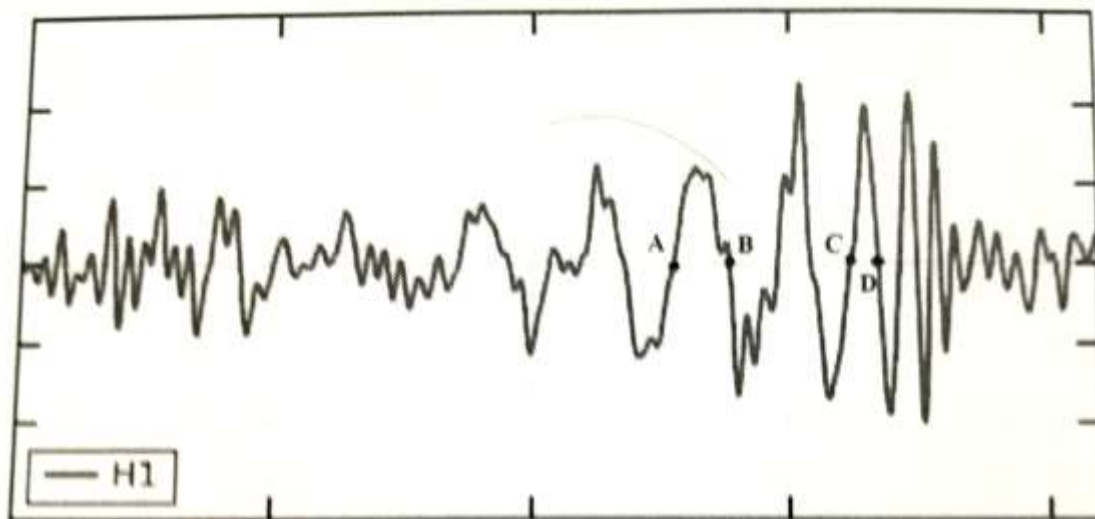


Figura 1. La variación relativa del tamaño de cada brazo en el detector LOGO H1. El eje horizontal es de tiempos y las posiciones A,B,C,D, corresponden a los tiempos 0,000 ; 0,009 ; 0,034 ; 0,040 segundos

B5.- A partir de la figura 1 estimar $f_{GW}(t)$ con

$$t_{AB} = \frac{t_B + t_A}{2} \quad \text{y} \quad t_{CD} = \frac{t_D + t_C}{2}$$

Suponiendo que la ecuación del apartado B4 es válida en todo el recorrido hasta la colisión (lo cual rigurosamente hablando no es cierto) y que los dos objetos tienen la misma masa, estimar la masa chirp M_c y la masa total del sistema expresándola en masas solares $M_s \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

B6.- Estimar la separación mínima entre los dos objetos a t_{CD} , y a continuación el tamaño máximo de cada objeto R_{max} . Obtener R_S/R_{max} y comparar con el radio del Sol, $R_S= 7 \cdot 10^5$ km. Estimar también su velocidad lineal orbital en el mismo instante y comparela con la velocidad de la luz V_{co}/c

Heureka

2. ¿DÓNDE ESTÁ EL NEUTRINO?

Cuando dos protones de alta energía chocan en el LHC (Large Hadron Collider) se producen nuevas partículas, electrones, muones, neutrinos, quarks, y sus antipartículas. La mayoría de ellas se registran por el detector de partículas que rodea el punto de colisión. Por ejemplo, los quarks sufren un proceso denominado hadronización transformándose en un chorro de partículas subatómicas denominado jet. Además los intensos campos magnéticos presentes en los detectores obligan a las partículas incluso a las más energéticas a describir curvas a partir de las cuales se determina el momento de cada partícula.

El detector ATLAS utiliza un solenoide superconductor mediante el cual se produce un campo magnético uniforme de intensidad dos teslas que rodea al punto de colisión. Las partículas cargadas que tienen un momento inferior a un determinado valor se curvan de tal forma que describen varias vueltas completas y la mayoría de ellas no se miden. Debido a su naturaleza el neutrino no se detecta ya que no interacciona con el campo magnético.

*Datos : masa en reposo del electrón $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ kg ,
Carga elemental , $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, Velocidad de la luz $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s,
Permitividad del vacío, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Fm⁻¹*

PARTE A. ATLAS. FÍSICA DEL DETECTOR

A1. Obtenga una expresión para el radio, r , de la trayectoria circular de un electrón que se desplaza bajo la acción de un campo magnético perpendicular a su velocidad y expréselo en función de su energía cinética K , su carga e , su masa m y el campo magnético B . Se admite que el electrón se comporta como una partícula no relativista.

Los electrones dentro del detector ATLAS obedecen a la mecánica relativista. No obstante la formula para el radio (obtenida antes) es válida para la mecánica relativista si se tiene en cuenta el momento relativista.

A2. Calcule el valor mínimo del momento de un electrón para que pueda escapar de la parte interna del detector en dirección radial. La parte interna del detector es un cilindro con un radio de 1,1 metros y el electrón se ha formado, como resultado de la colisión, justamente en el centro del cilindro. Dar la respuesta en MeV/c

Si una partícula de carga e está acelerada con velocidad relativista y masa en reposo m_0 emite radiación denominada radiación sincrotrón. La potencia emitida está dada por la ecuación

$$P = \frac{e^2 a^2 \gamma^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

a es la aceleración

A3. Una partícula se denomina ultrarrelativista cuando su velocidad es muy próxima a la de la luz. Para una partícula ultrarrelativista la potencia emitida se expresa por

$$P = \zeta \frac{e^4 E^2 B^2}{\epsilon_0 m_0^k c^n}$$

ζ es un número real, n y k son enteros E es la energía de la partícula cargada y B el campo magnético. Encontrar ζ , n y k

A4. En el límite ultrarrelativistas la energía del electrón en función del tiempo es:

$$E(t) = \frac{E_0}{1 + \alpha E_0 t}$$

E_0 es la energía inicial del electrón. Encontrar α en función de e, c, B, t_0 y m

A5. Considerar un electrón formado en el punto de la colisión en dirección radial con una energía de 100 GeV. Calcular la energía que pierde debido a la radiación sincrotrón hasta que el electrón escapa por la parte interna del detector.

A6. Encontrar la ecuación para la frecuencia ciclotrón del electrón en función del tiempo y del límite ultrarrelativistas.

Heurema

PARTE B. ATLAS. ENCONTRANDO AL NEUTRINO

La colisión entre los dos protones mostrados en la figura 1 da lugar a la producción de un quark top (t) y un antiquark top (\bar{t}) las partículas elementales más pesadas jamás detectadas

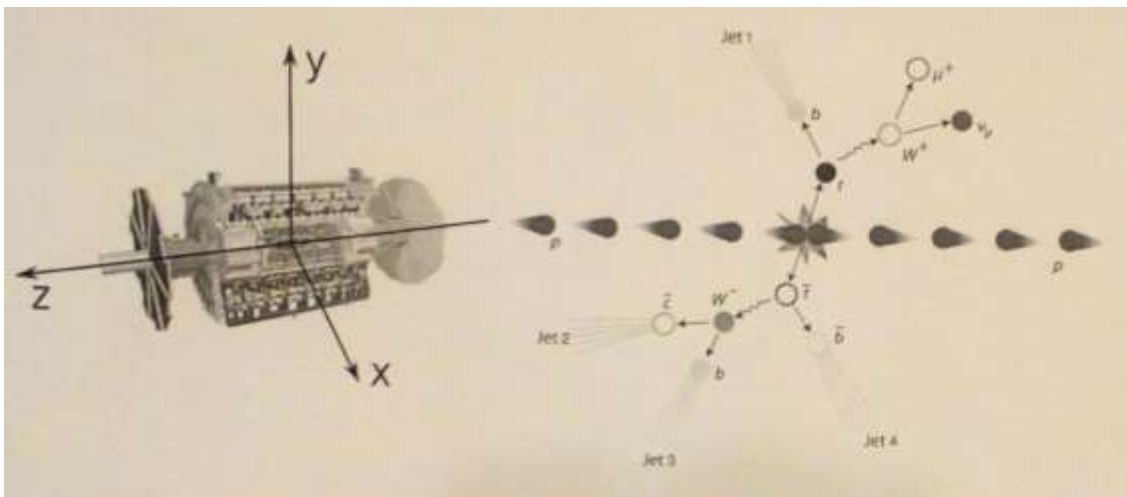


Fig.1

El quark top decae en un bosón W^+ y en un quark bottom (b), el antiquark antitop decae en un bosón W^- y un quark antibottom (\bar{b}).

En el caso de la figura 1, el bosón W^+ decae en un anti-muón (μ^+) y un neutrino (ν) y el bosón W^- lo hace en un quark y un antiquark.

El objetivo de este problema es determinar el momento total del neutrino utilizando los momentos de algunas de las partículas detectadas.

Por sencillez todas las partículas y jets de este problema se consideran carentes de masas, a excepción del quark top y los bosones W^\pm

El momento del quark top decae en productos que se caracterizan a partir del experimento (ver la tabla) excepto la componente sobre el eje Z del neutrino.

El momento lineal total de las partículas capturadas por el detector es solamente cero en el plano transversal XY y no lo es a lo largo de la línea del eje Z. Es posible determinar el momento transversal del neutrino a partir de la pérdida del momento en el plano transversal

El 1 de Junio del año 2015 el detector ATLAS registró la colisión protón-protón de la figura 1.

El momento lineal de las tres partículas finales procedentes del quark top incluyendo la del neutrino se recogen en la tabla siguiente.

<i>Partícula</i>	<i>P_x (GeV/c)</i>	<i>P_y (GeV/c)</i>	<i>P_z (GeV/c)</i>
<i>Anti-muón(μ⁺)</i>	<i>-24,7</i>	<i>-24,9</i>	<i>-12,4</i>
<i>Jet 1(j1)</i>	<i>-14,2</i>	<i>+50,1</i>	<i>+94,1</i>
<i>Neutrino (ν)</i>	<i>-104,1</i>	<i>+5,3</i>	<i>-----</i>

B1. Encontrar la ecuación que relaciona el cuadrado de la masa del bosón W⁺ (m_{W⁺}²) con los momentos del neutrino y anti-muón recogidos en la tabla superior. Dar el resultado en los términos de los momentos transversales

$$\vec{p}_T^\nu = \vec{p}_x^\nu + \vec{p}_y^\nu \quad ; \quad \vec{p}_T^\mu = \vec{p}_x^\mu + \vec{p}_y^\mu$$

Y sus momentos sobre el eje Z, p_Z^μ ; p_Z^ν

B2.- Suponiendo para la masa del bosón m_W = 80,4 GeV/c², calcular las dos posibles soluciones para el momento del neutrino según el eje Z, p_x^ν. Dar la respuesta en GeV/c.

B3.-Calcular la masa del quark top para cada una de las masas encontradas en el apartado anterior. Dar el resultado en GeV/c²

El número normalizado de colisiones para la medida de la masa del quark top (determinado a partir de los experimentos) tiene dos componentes: la denominada “signal”(correspondiente al decaimiento del quark top) y “background”(correspondiente a los sucesos de otros procesos que no incluyen al quark top). Los datos experimentales incluyen ambos procesos en la figura 2. 00

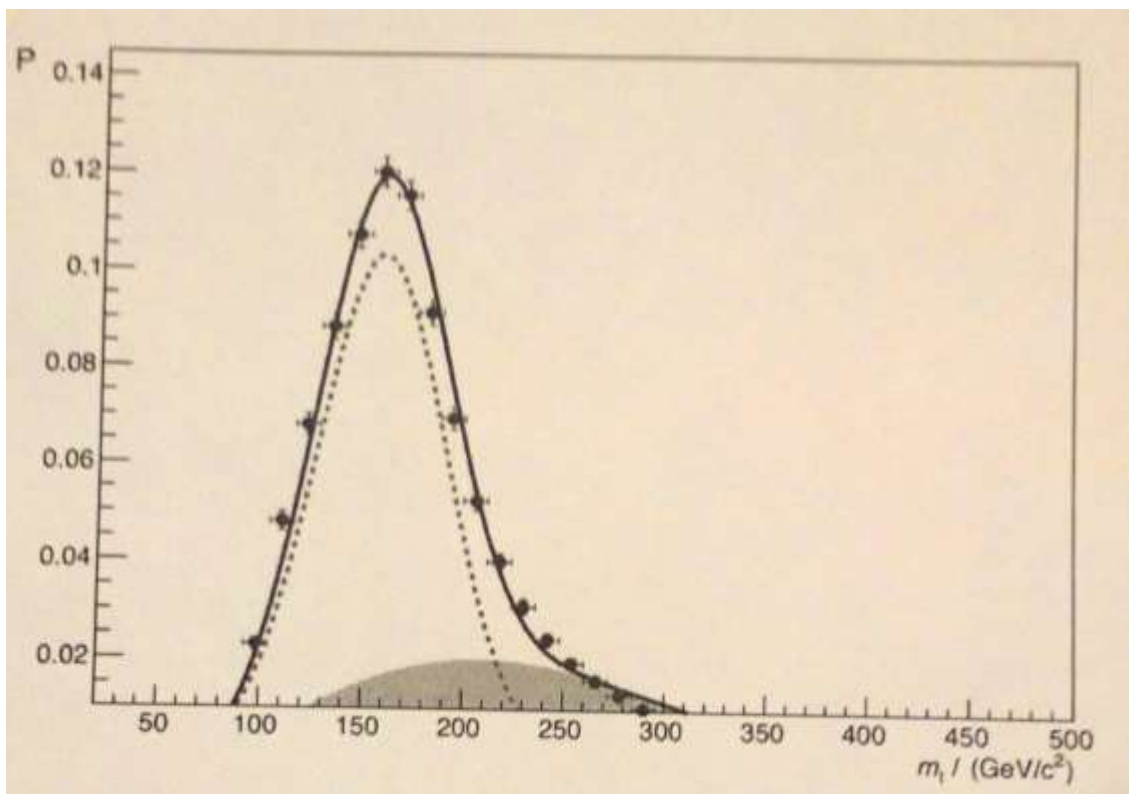


Figura2.. Distribución de la masa del quark top determinada a partir de los experimentos, esto es, el número normalizado de sucesos frente a la masa del quark. Los puntos corresponden a los datos. La línea discontinua corresponde a la “ signal” y la sombreada al “background”

B4.-Según la distribución de masas del quark top cuál de las dos soluciones obtenidas en el apartado anterior es más probable que sea la correcta. Determinar la probabilidad de la solución más probable

B5.-Calcular la distancia recorrida por el quark top antes de desintegrarse utilizando la solución más probable. Se supone que la vida media del quark en reposo es 5.10^{-25} s

3. FÍSICA DE SISTEMAS VIVOS

Dato. Presión atmosférica normal $P_0=1,013.10^5 Pa = 760 mmHg$

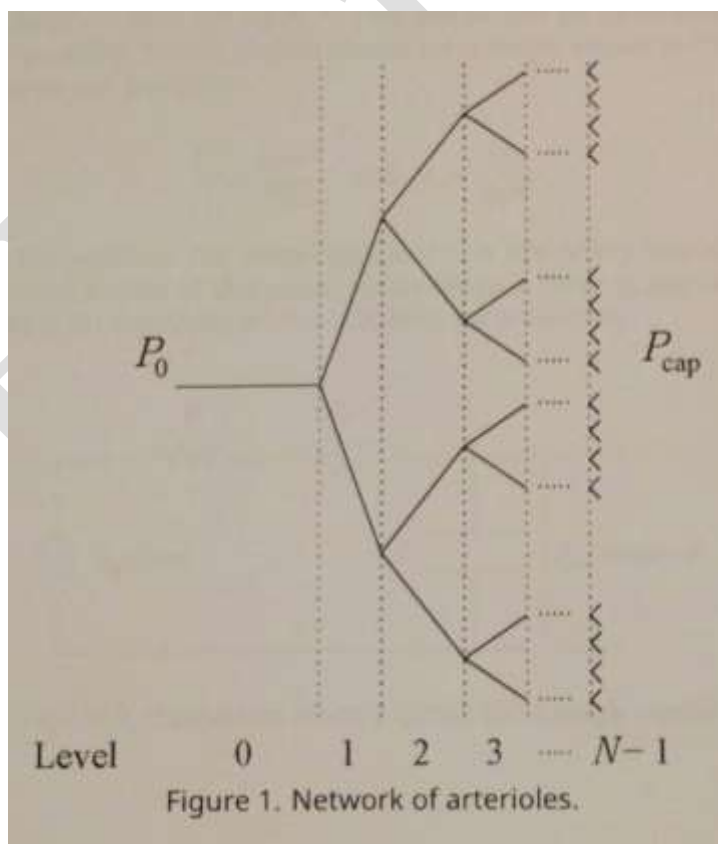
PARTE A. LA FÍSICA DEL FLUJO SANGUÍNEO

En esta parte usted analizará dos modelos simplificados del flujo de la sangre en vasos sanguíneos

Los vasos sanguíneos son de forma aproximadamente cilíndrica, y se sabe que para estados estacionarios, flujo no turbulento y con un fluido incompresible, en un cilindro rígido la diferencia de presión entre los extremos de un cilindro viene expresado mediante la ecuación siguiente

$$\Delta P = \frac{8\ell\eta}{\pi r^4} Q$$

ℓ y r son la longitud y radio del cilindro η es la viscosidad del líquido y Q el flujo volumétrico, esto es, el volumen que pasa por la sección normal del cilindro en la unidad de tiempo. Esta ecuación proporciona el orden de la magnitud de la presión en un vaso, aun sin tener en cuenta el flujo pulsante, la compresibilidad de los vasos y su forma irregular y el hecho de que la sangre no es un fluido simple sino una mezcla de células y plasma.



Por otra parte esta ecuación tiene la misma forma que la ley de Ohm si se interpreta que el flujo volumétrico es como la intensidad de corriente, la diferencia de presión el voltaje y el factor $\frac{8\ell\eta}{\pi r^4} = R$ la resistencia.

Considerar por ejemplo la red simétrica de arteriolas (arterias pequeñas) representada en la figura 1 que suministra sangre a los capilares de un tejido. En esta red cada bifurcación de un vaso da origen a dos idénticos. Los vasos de los niveles altos son cada vez más estrechos y más cortos. Considerar que el radio y la longitud de los vasos de dos niveles consecutivos i e $i+1$ guardan las relaciones

$$r_{i+1} = \frac{r_i}{2^{\frac{1}{3}}} \quad ; \quad \ell_{i+1} = \frac{\ell_i}{2^{\frac{1}{3}}}$$

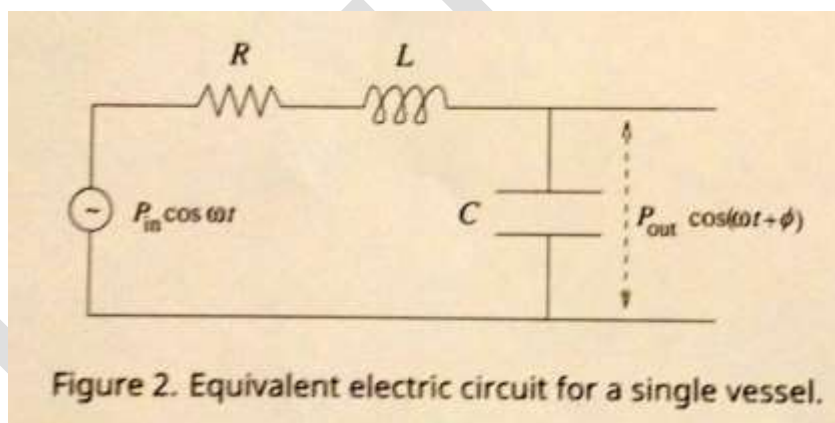
A1.- Obtener una ecuación para el flujo volumétrico Q en un vaso de cualquier nivel i , en función del número total de niveles, N , de la viscosidad η , del radio r_o y longitud ℓ_o del primer vaso y de la diferencia de presión $\Delta P = P_o - P_{cap}$ entre la presión en la arteriola a nivel 0 y la presión en el lecho capilar P_{cap} .

A2.- Calcular el valor numérico del flujo volumétrico Q_o en la arteriola de nivel 0 , siendo su radio $6,0 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, su longitud $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. La presión interna en la arteriola es 55 mmHg . La red de vasos tiene $N=6$ niveles enlazando esta arteriola con el lecho capilar a la presión de 30 mmHg . La viscosidad de la sangre $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Dar el resultado en mL/hora

Un vaso sanguíneo como un circuito LCR

La aproximación de considerar vasos cilíndricos rígidos es muy elemental por varias razones. Es importante incluir el flujo dependiente del tiempo así como tener en cuenta el cambio en el diámetro del vaso que ocurre por los cambios de presión debidos a los ciclos de bombeo del corazón. Además se conoce que en los vasos más largos la presión varía significativamente durante un ciclo mientras que en los vasos más pequeños las oscilaciones de la presión son mucho menores y el flujo es prácticamente independiente del tiempo.

Cuando la presión aumente en un único vaso elástico se produce un aumento de su diámetro, con lo que aumenta la cantidad de fluido que se almacena en dicho vaso y que debe salir cuando la presión disminuye. Por esta razón el comportamiento elástico de los vasos se puede simular añadiendo un condensador a nuestra descripción inicial. Si se tiene presente que el flujo depende del tiempo hay que considerar la inercia del fluido que es proporcional a su densidad $\rho=1,05 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Esta inercia se describe mediante una inductancia que se añade al modelo. En la figura 2 está representado el circuito eléctrico empleado en nuestro modelo.



La capacidad e inducción están dadas por las siguientes ecuaciones

$$C = \frac{3 \ell \pi r^3}{2 E h} ; \quad L = \frac{9 \ell \rho}{4 \pi r^2}$$

h es el espesor de la pared del vaso y E es el módulo de Young de la arteria, un coeficiente que describe la alteración del tamaño del vaso cuando se le aplica una fuerza. El módulo de Young tiene dimensiones de presión y su valor $E=0,06 \text{ MPa}$ para las arteriolas.

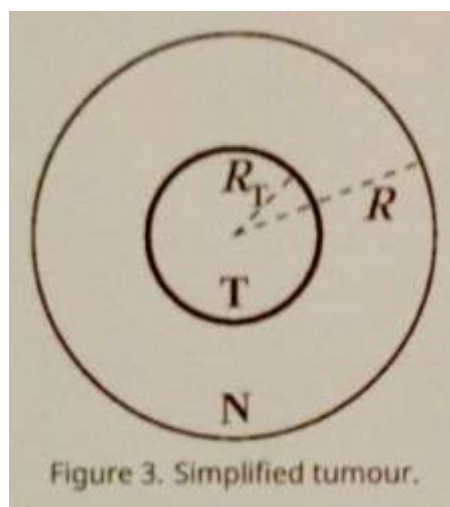
A3.-Obtener, en régimen estacionario, la presión a la salida del vaso P_{out} en función de la presión de entrada P_{in} , la resistencia R , el coeficiente L , y la capacidad C , para un flujo con frecuencia angular ω . Establecer la relación entre η , ρ , E , h , r y ℓ para que a frecuencias bajas la presión de salida sea menor que la de entrada P_{in}

A4.-Para la red de vasos interconectados en A2, estimar el espesor máximo de pared de la arteriola h , de modo que la condición establecida en A3 se cumpla (considerar que h es variable independiente)

PARTE B. CRECIMIENTO DE UN TUMOR

El crecimiento de un tumor es un proceso complejo donde mecanismos biológicos tales como la proliferación de células y la natural selección están entrelazados con física. En este problema consideramos un modelo simplificado del crecimiento de un tumor que aborda el aumento de presión que se observa generalmente en los tumores.

Considerar un grupo de células normales formando un tejido rodeado por una membrana inextensible cuya fuerza obliga a mantener siempre la misma forma: una esfera de radio R .(figura 3)



Inicialmente el tejido no tiene tensión residual, esto significa que la presión en cada punto es igual a la atmosférica.

En el tiempo $t=0$ un tumor comienza a crecer por el centro de la esfera y a consecuencia de ello la presión dentro del tejido aumenta. Considerar que ambos tejidos (normal N y tumor T) son compresibles y sus densidades ρ_N y ρ_T aumentan linealmente con la presión

$$\rho_N = \rho_o \left(1 + \frac{p}{K_N} \right) \quad ; \quad \rho_T = \rho_o \left(1 + \frac{p}{K_T} \right)$$

Donde ρ_o es la densidad en reposo del tejido, p es la diferencia de presión con la atmosférica y K_N y K_T son los módulos de compresibilidad (módulo volumétrico) de los tejidos normal y tumor. En general los tumores son duros y por ello tienen módulos volumétricos altos.

B1.-La masa de las células normales no se altera mientras que el tumor esté creciendo. Obtener la relación entre el volumen del tumor y el volumen total del tejido $v=V_T/V$ en función de la relación entre la masa del tumor (M_T) y la masa normal del tejido (M_N), ($\mu=M_T/M_N$) y la relación entre los módulos $\kappa=K_N/K_T$

La hipertermia se utiliza algunas veces junto con la quimioterapia y la radioterapia para el tratamiento del cáncer. En el tratamiento con hipertermia las células cancerosas se calientan de modo selectivo a 43° C, que es una temperatura superior a la normal del cuerpo que es 37°, de este modo se induce la muerte de esas células

Se está investigando con nanotubos de carbono cubiertos con proteínas especiales que tienen capacidad para unirse a las células cancerosas. Cuando el tejido es irradiado con rayos infrarrojos cercanos los nanotubos la absorben con mayor intensidad que el tejido circundante y por consiguiente pueden ser calentados selectivamente así como a las células tumorales que están conectadas.

Considerar que el tumor las células normales y el tejido circundante tienen una conductividad térmica constante, esto significa, para este problema, que la energía que atraviesa una superficie esférica de radio r por unidad de área y unidad de tiempo es igual a k veces la derivada de la temperatura respecto de r . Los nanotubos se distribuyen de forma uniforme en todo el volumen del tumor y son capaces de entregar una potencia \mathcal{P} de energía térmica por unidad de volumen. Suponer que la temperatura es igual a la humana normal pero muy lejos del tumor.

B2.-Obtener para el estado estacionario la temperatura en el centro del tumor en función de \mathcal{P} , k , la temperatura del cuerpo humano y el radio del tumor R_T .

B3.- Obtener la potencia mínima por unidad de volumen \mathcal{P}_{\min} para calentar todas las células tumorales de un tumor de radio 5,0 cm a una temperatura mayor de 43°C. La conductividad térmica del tejido es $k=0,60 \text{ WK}^{-1}\text{m}^{-1}$

Considerar que el tumor se está irrigando por una red de vasos cuyas ramas son las mismas que la del apartado A1.

A medida que el tumor crece su presión p llega a ser mayor que P_{cap} en los vasos de radio más pequeño y esto da lugar a que el radio de ellos disminuya en una cantidad pequeña δr . Si la presión alcanza un valor crítico p_c (que podría corresponder a una disminución del radio δr) los vasos más delgados pueden estrecharse y como consecuencia comprometer seriamente la irrigación del tumor. La presión y el cambio de radio están relacionados por las siguientes relaciones fenomenológicas

$$\frac{p}{P_{\text{cap}}} - 1 = \left(\frac{p_c}{P_{\text{cap}}} - 1 \right) \left(2 - \frac{\delta r}{\delta r_c} \right) \frac{\delta r}{\delta r_c}$$

Considerar que justamente los vasos más pequeños (los de nivel $N-1$) tienen su radio alterado cuando el tumor aumenta su presión.

B4.- En régimen lineal (esto es, considerar que $p-P_{\text{cap}}$ es muy pequeño), determinar la caída relativa del flujo dQ_{N-1}/Q_{N-1} en estos vasos más delgados en función del cociente $v=V_T/V$, K_N , N , p_c , δr_c , r_{N-1} , P_{cap}

Agradecemos a Juan Francisco González Martínez, investigador en la Universidad de Malmö la ayuda que nos ha prestado para el desarrollo del apartado B4 de este problema.

Heureka