# 1 CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

## CONTENIDOS BÁSICOS



## TEMA DE AMPLIACIÓN



**INFOFÍSICA**



Fotografía del dibujo de una máquina, con diversos componentes mecánicos que se encuentra en el Deutsches Museum. München

(Adjuntamos una foto que sobre el particular, realizamos nosotros hace tiempo en el citado Museo).

En la figura se representa el dibujo de una máquina, formada por un conjunto de componentes mecánicos acoplados, como ejes, engranajes, ruedas diversas y un tornillo de Arquímedes (sin fin) empleado para elevar el agua. En la parte superior lleva un deposito con agua que sale por el caño situado a la izquierda, transformando su energía potencial en cinética que al incidir sobre la rueda de paletas la pone en movimiento y a través del eje se transmite el movimiento a las ruedas verticales que permiten trabajar al artesano. A su vez, el movimiento del eje mediante un engranaje y una rueda dentada, hace girar el tornillo sin fin que asciende de nuevo el agua evacuada al deposito. El propósito de esta máquina es funcionar indefinidamente, sin embargo con este diseño resulta imposible, pues el trabajo que hace el artesano es a costa de la energía potencial del agua que cae, de modo que irá ascendiendo cada vez menos agua y acabará parándose. Además hay otros motivos, ¿sabes cuáles?.

El estudio y las aplicaciones de la Mecánica se inician ya en la antigüedad, continúan en la Edad Media y el Renacimiento, gracias al esfuerzo imaginación y tenacidad de muchas mentes a lo largo de los siglos. Surge entonces la figura de Galileo que introduce la experimentación, como factor fundamental para la comprobación de las hipótesis científicas. En el siglo XVII Newton formula un completo tratado sobre la Mecánica en su obra “Principios Matemáticos de la Filosofía Natural y su Sistema del Mundo” y se completa el estudio de la Mecánica Clásica con otras importantes aportaciones, siendo las más significativas las de Lagrange y Hamilton.

## 1. Partícula o punto material

La Física se ocupa de los objetos de la naturaleza o de los debidos al ingenio humano, tratando de entender las leyes que los gobiernan, para predecir su comportamiento. Por ejemplo para pronosticar la trayectoria de un planeta o proyectar un ferrocarril en el que podamos confiar, sin embargo los problemas reales son muy complicados y es necesario simplificarlos para poder abordarlos. Para describir el movimiento del planeta en el sistema solar, no es preciso considerar lo que ocurre en su interior y pasaremos por alto los elementos físicos que no influyen en el problema.

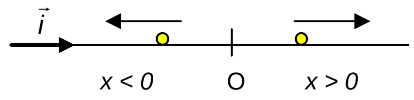


Fig.1.1 En el movimiento rectilíneo de una partícula, las posiciones se definen a partir de un punto de referencia O tomado sobre la recta.

Introducimos ahora el concepto de partícula como un objeto de dimensiones muy pequeñas, frente aquellas que caracterizan a su trayectoria y en cuyo movimiento no cabe distinguir ni rotaciones, ni vibraciones. Realmente tal ente sin dimensiones no existe en la naturaleza, sin embargo el concepto de partícula es muy útil, porque los cuerpos reales en muchas ocasiones se pueden aproximar a la idealización de partículas, lo que nos permite prescindir de considerar su tamaño y su estructura interna.

## 2 Cinemática de una partícula

### 2.1 Sistemas de referencia y vector de posición

La posición de una partícula *P* en el espacio se determina respecto de unos ejes que constituyen un sistema de referencia, siendo generalmente el más empleado el cartesiano ortogonal. Ahora bien, cuando el movimiento es sobre una recta o un plano su estudio se puede simplificar.

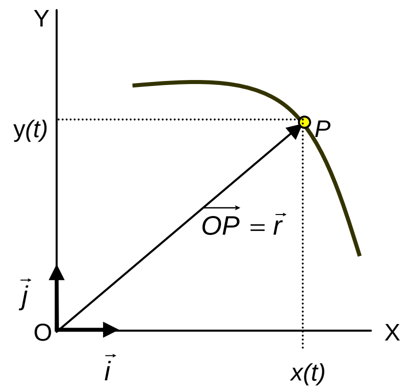


Fig.1.2. En el movimiento de la partícula en el plano, se toma un sistema de referencia con dos ejes X e Y; y sobre ellos los vectores unitarios $\vec{i}$ ; $\vec{j}$ .

Si la partícula móvil P se desplaza sobre una recta, su posición queda determinada por la distancia x, desde P a un punto fijo O que se toma de referencia. En dicha recta es $x > 0$ (positiva), cuando P se encuentra a la derecha de O y $x < 0$ (negativa) si P está a la izquierda de O. Fig.1.1.

Si el punto móvil P se desplaza sobre un plano, su trayectoria es una curva plana. El sistema de referencia está formado por dos ejes perpendiculares entre sí que se cortan en O y el vector de posición necesita dos componentes que dependen del tiempo *x(t)* e *y(t).* Fig. 1.2. En el eje *X* se toma un vector unitario $\vec{i}$ (de módulo la unidad) y en el eje *Y* otro $\vec{j}$ .

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

Si el punto P se mueve en el espacio, el sistema de referencia lo constituye un triedro (OXYZ) y al punto P se le asigna en cada instante un vector de posición, cuyas tres componentes son las proyecciones de P sobre los ejes. Se definen sobre los ejes, tres vectores unitarios: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Fig 1.3.

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (1.1)$$

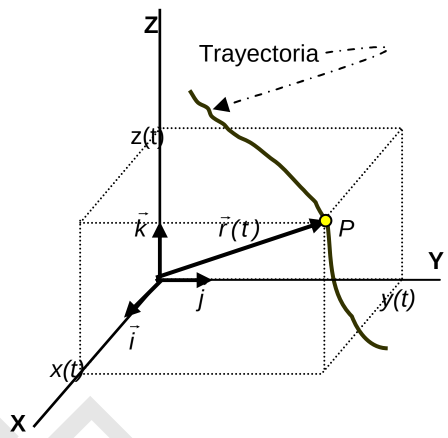


Fig.1.3. Cuando la partícula se mueve en el espacio, se toma un sistema cartesiano con tres ejes perpendiculares **(X,Y,Z)** y tres vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

### 2.2 Trayectoria

Cuando un punto se mueve ocupa una posición distinta P en cada instante t. La línea formada por todas las posiciones P que va ocupando el móvil en el espacio se llama **trayectoria,** están representadas en las Fig.1.1. y Fig.1.2. La forma de la trayectoria da nombre al movimiento, *rectilíneo, circular, parabólico etc*, y la ecuación de la trayectoria se describe con las componentes *x(t); y(t); z(t).* Si la trayectoria es plana, se podría eliminar el tiempo *t* entre las ecuaciones *x = x(t); y = y(t)* del vector de posición, obteniéndose una la ecuación de una curva de la forma *y = f(x).*

## 2.3 Desplazamiento

Cuando el móvil *P* cambia de posición hasta ocupar otra posición P', el vector $\overrightarrow{PP'}$ se llama vector **desplazamiento** fig.1.4, y tiene como origen la posición inicial P y como extremo la posición P', resultando ser igual al **incremento** del vector de posición.

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}$$

Sobre la trayectoria, la distancia recorrida es la longitud del arco PP'.

Mientras el móvil se desplaza desde *P* a *P'*, el tiempo va transcurriendo y lo medimos por el intervalo temporal $\Delta t = t' - t$, que es la diferencia entre los instantes final *t'* , e inicial *t* que está señalando un reloj, cuando el móvil pasa por los puntos considerados .

En el S.I. la posición y módulo del desplazamiento se miden en metros (m) y el tiempo se mide en segundos (s).

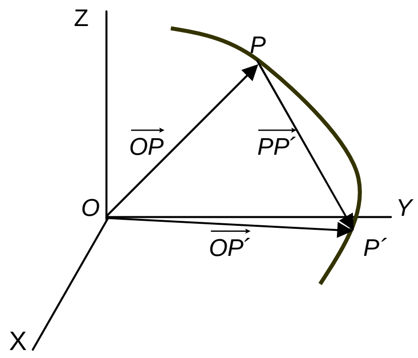


Fig.1.4. El vector desplazamiento $\overrightarrow{PP'}$ tiene su origen en *P* y extremo en *P´*.

**Ejemplo 1.1**

Una partícula se mueve siguiendo la trayectoria dada por el vector de posición que depende del tiempo $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \operatorname{sen} t\,\vec{k}$ . Encontrar el vector de posición de la partícula móvil, en los instantes $t_1 = \pi/6$ s y $t_2 = \pi/4$ s. Hallar también la distancia entre estas dos posiciones. Las unidades están dadas en el S.I.

Sustituyendo los instantes correspondientes los vectores de posición son:

$$\vec{r}\,(\pi/6) = (\pi/3)\,\vec{i} + \cos(\pi/6)\,\vec{j} + \operatorname{sen}(\pi/6)\,\vec{k} = \pi/3\,\vec{i} + \sqrt{3}/2\,\vec{j} + ½\,\vec{k}$$

$$\vec{r}\,(\pi/4) = (\pi/2)\,\vec{i} + \cos(\pi/4)\,\vec{j} + \operatorname{sen}(\pi/4)\,\vec{k} = \pi/2\,\vec{i} + \sqrt{2}/2\,\vec{j} + \sqrt{2}/2\,\vec{k}$$

El vector desplazamiento:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(\pi/4) - \vec{r}\,(\pi/6) = (\pi/2\,\vec{i} + \sqrt{2}/2\,\vec{j} + \sqrt{2}/2\ ) - (\pi/3\,\vec{i} + \sqrt{3}/2\,\vec{j} + ½\,\vec{k}\ ) =$$

$$(\pi/6)\,\vec{i} + (\sqrt{2}/2 - \sqrt{3}/2)\,\vec{j} + (\sqrt{2}/2 - 1/2)\,\vec{k}$$

La distancia entre las dos posiciones es el módulo del vector desplazamiento:

$$\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| = \sqrt{\frac{\pi^2}{36} + \frac{5-\sqrt{24}}{4} + \frac{3-\sqrt{8}}{4}} \cong 0{,}59m$$

## 2.4 Velocidad y aceleración

**Velocidad media**

Se define la velocidad media, como el cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo en que se efectúa. Es un vector de igual dirección y sentido que el vector desplazamiento, fig.1.5.

$$\bar{v}_m = \frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{t' - t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

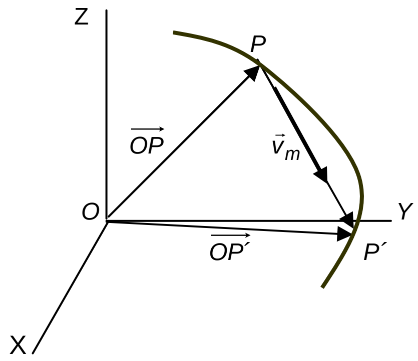


Fig.1.5. El vector velocidad media $\vec{v}_m$ entre las posiciones *P* y *P´* tiene la dirección y sentido del vector desplazamiento. Compara esta figura con la Fig.1.4.

En el S.I. la velocidad se mide en metros partido segundo (m/s). Existe otra unidad derivada de la anterior de mucho uso que es el km/h.

**Velocidad instantánea**

Es la que lleva un móvil en un instante determinado o en un punto de su trayectoria. Cuando tomamos el intervalo de tiempo $\Delta t = t' - t$ tan pequeño, tan pequeño que tiende hacia cero, entonces la velocidad instantánea coincide con la velocidad media del móvil en las proximidades del punto *P*. Por definición, la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\bar{v} = lim_{\Delta t \to 0}\, \vec{v}_m = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

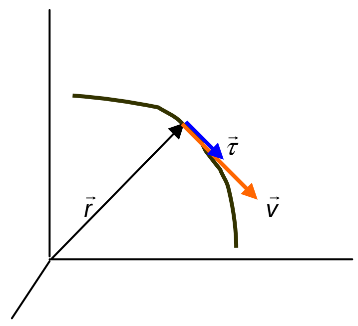


Fig.1.6. En la figura se representan el vector de posición $\vec{r}$ y el vector velocidad instantánea $\vec{v}$, que es en cada punto tangente a la trayectoria. Además, se encuentra el vector unitario tangente $\vec{\tau}$ que es de módulo la unidad, de dirección tangente en cada punto a la trayectoria y del mismo sentido que el vector velocidad, de modo que $\vec{v} = v\,\vec{\tau}$.

La expresión anterior se llama la **derivada** del vector de posición respecto del tiempo y se escribe de las dos maneras siguientes:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) \qquad (1.2)$$

Es un vector tangente a la trayectoria en cada punto. Fig.1.6. y se puede expresar como el producto de su módulo, $|\vec{v}| = v$ por un vector unitario tangente a la trayectoria en cada punto, $\vec{\tau}$. Resulta:

$$\vec{v} = |\vec{v}|\,\vec{\tau} = v\,\vec{\tau}$$

La velocidad instantánea (*que de ahora en adelante nombraremos solamente como velocidad, mientras no se manifieste expresamente lo contrario)*, puede cambiar de módulo y dirección de un instante a otro. Si el módulo permanece constante el movimiento se llama *uniforme*. Si la dirección permanece constante se llama *rectilíneo*. Si el modulo y la dirección permanecen constantes se llamará *rectilíneo y uniforme***.**

**Aceleración**

Cuando el vector velocidad cambia con el tiempo, el movimiento se llama *acelerado*. La *aceleración media* se obtiene dividiendo el incremento de velocidad entre el correspondiente incremento del tiempo.

$$\bar{a}_m = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$$

Su unidad en el S. I. es el metro por segundo en cada segundo, $m/s^2$.

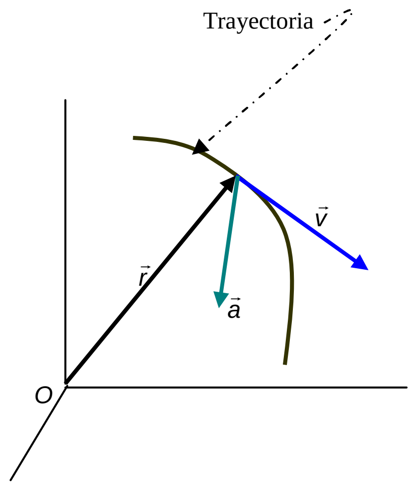


Fig.1.7. El vector velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria, pero el vector aceleración $\vec{a}$ apunta hacia el lado cóncavo de la misma.

**Aceleración instantánea**

Cuando la $\vec{a}_m$ se calcula en un intervalo de tiempo tan pequeño que tiende a cero, entonces se obtiene la aceleración del móvil en un instante, o aceleración instantánea. Se define como el límite de la aceleración media cuando $\Delta t \to 0$.

$$\bar{a} = lim_{\Delta t \to 0}\, \vec{a}_m = lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}\,'(t) \qquad (1.3)$$

La aceleración instantánea es la derivada del vector velocidad respecto del tiempo y es un vector dirigido hacia la concavidad de la curva, fig.1.7, si se exceptúan los movimientos rectilíneos en los que es tangente a la propia trayectoria rectilínea.

**Ejemplo 2.1**

Una partícula describe una trayectoria en el plano OXY cuyo vector de posición es $\vec{r}(t)=2t\,\vec{i}-t^2\,\vec{j}$ , encontrar los valores de los vectores: posición, velocidad y aceleración en el instante t = 0,25 s. Las unidades son del S.I.

El vector de posición en el instante pedido es $\vec{r}$ (0,25) = 0,5 $\vec{i}$ – 0,0625 $\vec{j}$ m

El vector velocidad es la derivada del vector de posición respecto al tiempo, $\vec{v}$ (t) = 2 $\vec{i}$ – 2t $\vec{j}$ que en el instante dado vale $\vec{v}$ (0,25) = 2 $\vec{i}$ – 0,5 $\vec{j}$ m/s.

La aceleración es la derivada del vector velocidad respecto del tiempo, $\vec{a}(t)=-2\,\vec{J}$ $m/s^2$ que como vemos es constante y no depende del tiempo.

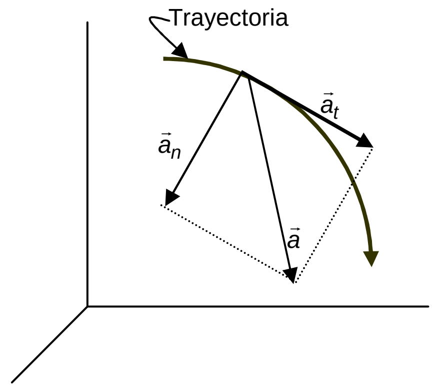


Fig.1.8. La aceleración $\vec{a}$ es un vector dirigido hacia la concavidad de la trayectoria y tiene dos componentes **intrínsecas**, la aceleración tangencial $\vec{a}_t$ y la aceleración normal $\vec{a}_n$ .

**Componentes intrínsecas de la aceleración**

Son dos componentes de la aceleración, tomadas según unos ejes que van desplazándose con el móvil a lo largo de la trayectoria, uno en la dirección de la tangente y otro en la dirección perpendicular a la tangente, la normal. La aceleración tiene entonces dos "componentes intrínsecas" la aceleración *tangencial* y la aceleración *normal*. Fig.1.8, y son las proyecciones del vector aceleración sobre la tangente y la normal a la trayectoria en cada punto.

**La aceleración tangencial** $\vec{a}_t$ tiene de módulo la derivada respecto al tiempo del módulo de la velocidad en valor absoluto y es la causante del cambio de módulo del vector velocidad.

$$a_t=\frac{dv}{dt}=v'(t) \qquad (1.4)$$

**La aceleración normal** $\vec{a}_n$ es perpendicular a la tangente y apunta hacia la concavidad de la trayectoria. Tiene la dirección y sentido del unitario $\vec{n}$ , fig.1.9. Su módulo es el cuadrado del módulo de la velocidad, entre el radio de curvatura de la trayectoria $\rho$ en cada punto. La aceleración normal produce el cambio de dirección del vector velocidad .

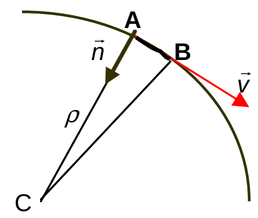


Fig.1.9. El radio de curvatura $\rho$ es el radio de la circunferencia, tal que situado su centro en un punto C, llamado centro de curvatura, se podría trazar un pequeño elemento de arco **AB** de la trayectoria.

$$a_n=\frac{v^2}{\rho} \qquad (1.5)$$

El vector aceleración se expresa en función de las componentes intrínsecas.

$$\vec{a}=\frac{dv}{dt}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n} \qquad (1.6)$$

Entre los módulos de los 3 vectores Fig.1.10, existe la ecuación $a^2=a_n^2+a_t^2$

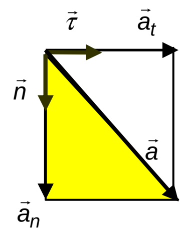


Fig.1.10. En el triángulo de color de la figura, los catetos que son las componentes intrínsecas de la aceleración y la hipotenusa que es la aceleración, verifican entre sus módulos el teorema de Pitágoras $a^2=a_n^2+a_t^2$

**Ejemplo 2.2**

Con los datos del ejercicio **2.1** determina las componentes intrínsecas de la aceleración y su valor en el instante *t = 0,25 s.* Unidades del S.I.

Los módulos de la velocidad y la aceleración: $|\vec{v}|=\sqrt{4+4t^2}=2\sqrt{1+t^2}$ ; $|\vec{a}|=2$

$a_t=\frac{d|\vec{v}|}{dt}=\frac{d}{dt}2\sqrt{1+t^2}=2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ; Para *t*=0,25 s; $a_t=2\frac{0,25}{\sqrt{1+0,25^2}}=0,49\,m/s^2$

El valor de la componente normal de la aceleración en ese instante se calcula.

$$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}=\sqrt{4-0,24}=1,94\,m/s^2$$

## 3 Interacciones fundamentales entre las partículas

Los cuerpos materiales que existen en el universo interaccionan unos con otros. Hasta ahora se han descubierto cuatro tipos de interacciones entre las partículas materiales; dos de ellas se observan macroscópicamente y son la **gravitatoria** y **la electromagnética**. Las otras dos son microscópicas y sus efectos se aprecian entre partículas que se encuentran en el núcleo de los átomos, se distinguen dos tipos que se denominan **interacción fuerte y débil.**

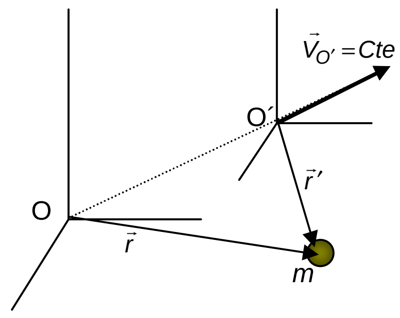


Fig.1.11. Si desde los sistemas O y O´ encontramos que la partícula libre *m,* se halla en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme, entonces estos sistemas de referencia se llaman inerciales. En la práctica, consideraremos como sistemas inerciales aquellos que están en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme.

Las interacciones en la Mecánica Clásica se describen mediante **fuerzas**. Debido a sus efectos dinámicos, los cuerpos alteran su estado de reposo o movimiento y cambian sus posiciones relativas.

La gravitación es la fuerza que actúa entre los astros del firmamento, pero también es la que hace caer a los cuerpos hacia la Tierra y que conocemos como el peso. Recordamos que el peso es el producto de la masa del cuerpo por la intensidad de la gravedad en el punto donde se encuentra situado $P = m \cdot g$ . Su dirección define la vertical del lugar.

La interacción electromagnética engloba los fenómenos de la electricidad y del magnetismo, algunos conocidos desde la antigüedad. Resultó un terreno de investigación apasionante para los científicos en los siglos XVIII y XIX. Se da entre cargas eléctricas, tanto en reposo o en movimiento y es la responsable de la estructura, consistencia y propiedades de los cuerpos materiales, pues determina los enlaces químicos entre átomos y moléculas.

Las interacciones nucleares se han descubierto en el siglo XX cuando se han desarrollado teorías como la Relatividad, Física Cuántica y las más recientes del Campo Unificado. A su vez se han dispuesto de medios tecnológicos para investigar las interacciones entre partículas nucleares.

### 3.1 Interacciones mecánicas entre partículas

Las partículas macroscópicas se caracterizan por tener masa, y cuando se mueven a velocidades pequeñas frente a la de la luz, se comportan según los principios de la Mecánica de Newton.

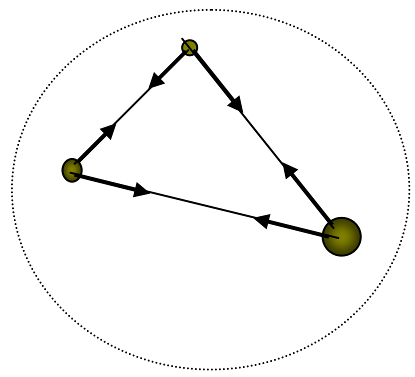

Fig.1.12. Cada una de las partículas del sistema ejerce fuerzas sobre todas las demás y a su vez recibe fuerzas de todas las otras partículas del sistema. Sobre $m_1$ actúa las fuerzas $\vec{f}_{12}$ y $\vec{f}_{13}$ que le ejercen respectivamente $m_2$ y $m_3$. Lo mismo sucede con las demás.

Tres conceptos son muy importantes: *la partícula libre, el momento lineal y el concepto de interacción:*

**Partícula libre** es aquella que se considera aislada del resto del universo, por lo que no experimenta la acción de ninguna fuerza, ni tampoco puede ejercerla. Permite introducir el concepto de *sistema inercial* fig.1.11.

**El momento lineal** de una partícula respecto de un sistema de referencia, es una magnitud vectorial que se define como el producto de su masa por su vector velocidad.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad (1.7)$$

En el S. I. de unidades se mide en *kg · m/s.*

**Acciones entre partículas.** Cuando se encuentran presentes dos o más partículas, constituyen un sistema, en la fig.1.12 se señalan unos límites imaginarios. Entonces las partículas interaccionan entre sí intercambiándose fuerzas, así la partícula $m_1$ recibe fuerzas de la $m_2$ y de la $m_3$ y a su vez ejerce otras fuerzas sobre ellas. Análogamente le sucede a las demás partículas del sistema, en nuestro caso $m_2$ y $m_3$.

### 3.2 Principios de Newton

Permiten describir el movimiento de los cuerpos desde sistemas inerciales. La idea básica reside, en que las observaciones experimentales describen las interacciones mecánicas entre partículas, mediante una propiedad característica de las mismas que es su masa y la aceleración que adquieren

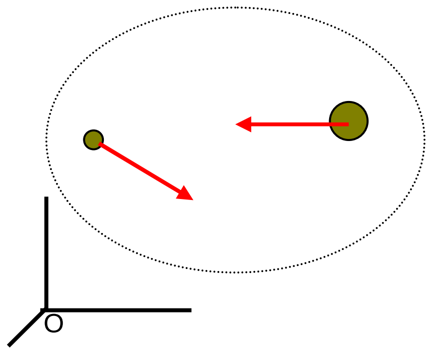


Fig.1.13. En un sistema aislado las partículas no reciben ninguna acción del medio exterior por lo que el momento lineal total del sistema $\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=cte$ **;** permanecerá constante. Los momentos lineales están medidos desde un sistema inercial O.

**Primer principio.** *Existen sistemas de referencia llamados inerciales, desde los que una partícula libre conserva su momento lineal* $\vec{p}=cte$ *o nulo.*

**Segundo principio.** Cuando una partícula interacciona con otras, sufre la acción de las fuerzas ejercidas por las demás y su momento lineal sufre una variación que designaremos por $d\vec{p}$ . Si la interacción dura el tiempo *dt* y la resultante de las fuerzas es $\vec{F}=\sum \vec{F}_i$ , el segundo principio dice: La fuerza se invierte en producir una variación del momento lineal respecto del tiempo.

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (1.8)$$

Para relacionar la ec. (1.8) con la aceleración, basta sustituir la ec.(1.7) recordando que la masa de la partícula es constante. En efecto:

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{v}\right)=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\cdot\vec{a}\,; \qquad \vec{F}=\sum \vec{F}_i=m\cdot\vec{a} \qquad (1.9)$$

*El efecto de la fuerza es producir aceleración*. El coeficiente de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración, *es la masa del cuerpo* que representa la oposición de éste a adquirir aceleración.

**Tercer principio.** Si consideramos dos partículas aisladas del resto del universo, el sistema tendría su momento lineal total constante, ya que por estar aislado, no recibiría la acción de ninguna fuerza exterior, fig.1.13. Por lo tanto el momento lineal total del sistema, definido como la suma de los momentos lineales de cada una de sus partículas no variará.

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=cte$$

Derivando la anterior ecuación respecto del tiempo resulta:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)=\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}=\frac{d}{dt}\left(cte\right)=0$$

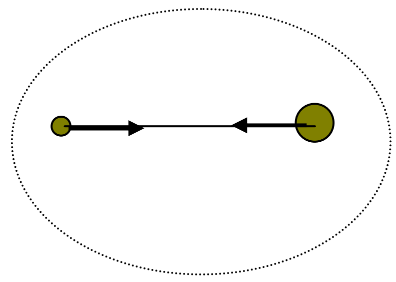

Fig.1.14. Las fuerzas de acción y reacción son iguales pero con sentidos contrarios, actuando en cuerpos distintos.

De acuerdo con ec.(1.8) la derivada del momento lineal respecto del tiempo, es igual a la fuerza que actúa sobre la partícula. Designando con $\vec{F}_{12}$ la fuerza sobre $m_1$ y con $\vec{F}_{21}$ la fuerza sobre $m_2$ resulta por sustitución:

$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0; \qquad \vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21} \qquad (1.10)$$

Las partículas $m_1$ y $m_2$ que únicamente están sometidas a su interacción mutua, experimentan fuerzas iguales y contrarias, conocidas como parejas de acción y reacción. Observa en la fig.1.14, como estas fuerzas de acción y reacción están aplicadas en cuerpos distintos.

*La ecuación (1,10) expresa el resultado del tercer principio de Newton. En la interacción mutua entre dos partículas se ejercen fuerzas de la misma intensidad y de la misma dirección, pero de sentidos contrarios, estando aplicadas en cuerpos distintos. Constituyen una pareja de acción y reacción*.

**Ejemplo 3.1**

*Una partícula de masa m=0,1 kg se mueve con velocidad* $\vec{v}=\frac{t^2}{2}\vec{i}-10\,t\,\vec{j}$ *Calcula su momento lineal y la fuerza sobre dicha partícula en el instante t=10s. Unidades del S.I.*

El momento lineal, $\vec{p}(t)=m\,\vec{v}=0{,}1\left(\frac{t^2}{2}\vec{i}-10\,t\,\vec{j}\right)=\frac{t^2}{20}\vec{i}-t\,\vec{j}$

La fuerza: $\vec{F}(t)=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{t}{10}\vec{i}-\vec{j}$

En el instante considerado, t = 10 s:

$\vec{p}$ (10) = 5 $\vec{i}$ – 10 $\vec{j}$ kg·m/s , su módulo es $|\vec{p}|=\sqrt{5^2+(-10)^2}=11{,}2\,kg\cdot m/s$

$\vec{F}$ (10)= $\vec{i}$ - $\vec{j}$ N , su módulo es $|\vec{F}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\ N$

**Ejemplo 3.2**

*El vector de posición de una partícula de masa m= 0,4 kg que se mueve en el plano (OXY) es:* $\vec{r}(t)=t^2\,\vec{i}+2t\,\vec{j}$ *Calcula los valores del momento lineal y de la fuerza en el instante t= 5 s. Unidades del S.I.*

La velocidad es $\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}}{dt}=2t\,\vec{i}+2\,\vec{j}$ m/s y la aceleración $\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}}{dt}=2\,\vec{i}\ m/s^2$

El momento lineal $\vec{p}(t)=m\vec{v}=0{,}8\,t\,\vec{i}+0{,}8\,\vec{j}$ ; en el instante t = 5s, $\vec{p}(5)=4\,\vec{i}+0{,}8\,\vec{j}$

cuyo módulo vale: $|\vec{p}(5)|=\sqrt{4^2+0{,}8^2}=4{,}08\,kg\cdot m/s$

La fuerza $\vec{F}$ = m·$\vec{a}$ = $0{,}4\,kg\cdot 2\,\vec{i}\ m/s^2=0{,}8\,\vec{i}\ N$ de módulo $|\vec{F}|=0{,}8\,N$

### 3.3 Fuerza tangencial y fuerza normal

Cuando la partícula describe una trayectoria curvilínea bajo la acción de una fuerza $\vec{F}$, fig. 1.15, ésta proporcionará en general dos componentes, una conocida como fuerza tangencial $\vec{F}_t$ y otra como fuerza normal o centrípeta $\vec{F}_n$. Como del segundo principio sabemos que las fuerzas producen aceleraciones ec.(1.9), se puede asegurar que éstas fuerzas son las causantes de las aceleraciones tangencial $\vec{a}_t$ y normal $\vec{a}_n$ ; respectivamente. En consecuencia.

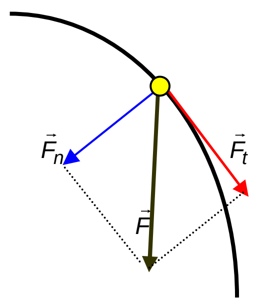


Fig.1.15 La fuerza $\vec{F}$ aplicada a la partícula proporciona dos componentes, una tangente a la trayectoria $\vec{F}_t$ y otra normal a la misma $\vec{F}_n$ .

$\vec{F}_t=m\cdot\vec{a}_t=m\cdot a_t\,\vec{\tau}$ donde $\vec{\tau}$ es el vector unitario tangente

$\vec{F}_n=m\cdot\vec{a}_n=m\cdot\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$ donde $\vec{n}$ es el vector unitario normal

La fuerza normal, también llamada centrípeta está dirigida siempre hacia el centro de curvatura *C* de la trayectoria. En el movimiento circular *C* es el centro de la circunferencia.

- En una trayectoria rectilínea no existe fuerza centrípeta o normal.
- En un movimiento uniforme no existe fuerza tangencial y al ser la aceleración tangencial nula, la velocidad tiene su módulo constante.
- Si el movimiento es circular uniforme solo existirá fuerza normal que será de módulo constante por serlo el módulo de la velocidad.

$$F_n=m\frac{v^2}{R}\qquad(1{,}11)$$

Cuando el movimiento es circular, el radio de curvatura es el radio de la circunferencia que es constante y se designa con *R.*

En el curso pasado hemos visto que cuando un móvil describe una circunferencia lleva una cierta velocidad angular $\omega$ fig.1.16*,* que relaciona los ángulos que va girando el móvil con el tiempo y que está vinculada con el módulo del vector velocidad *v,* y el radio *R* de la circunferencia*,* por la ecuación $v = \omega \cdot R$ . Si esta ecuación se sustituye en la ec.(1.11) resulta.

$$F_n = m\frac{v^2}{R} = m\frac{(\omega\ R)^2}{R} = m\,\omega^2\,R \qquad (1.12)$$

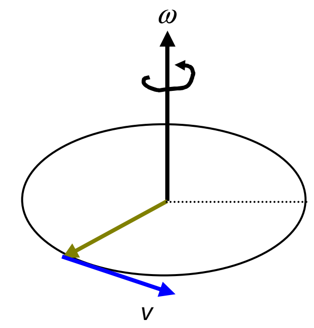


fig.1.16 En el movimiento circular, la velocidad lineal es igual a la angular por el radio de la circunferencia, $v = \omega \cdot R$

**Ejemplo 3.3**

*Un ciclista de masa 80 kg recorre una pista circular de 100 m de radio con velocidad de 54 km/h. Calcula el valor de la fuerza centrípeta que le debe proporcionar el rozamiento de sus ruedas con la pista, para que no se salga.*

La velocidad: $54\,\frac{km}{h} = 54\,\frac{1000\ m}{3600\ s} = 15\,\frac{m}{s}$

La fuerza centrípeta vale $F_c = m\frac{v^2}{R} = 80\ kg \cdot \frac{\left(15\ \frac{m}{s}\right)^2}{100\ m} = 180\ N$

### 3.4 Fuerza de rozamiento

Es una fuerza de contacto como las reacciones normales entre sólidos, siendo de naturaleza electrostática. Para que un cuerpo en contacto con otro, comience a deslizarse sobre él, le aplicamos una fuerza, sin embargo la experiencia enseña que en muchas ocasiones el cuerpo no desliza. La causa es una fuerza de oposición a la aplicada, llamada de rozamiento, que se opone al deslizamiento de un cuerpo sobre el otro, fig.1.17.

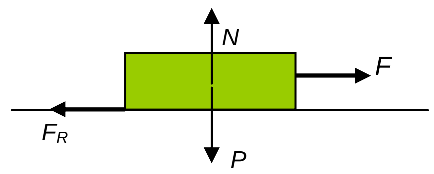


Fig.1.17 Mientras que la fuerza de rozamiento $\boldsymbol{F_R}$ equilibra a la fuerza aplicada *F,* el cuerpo permanece en reposo.

Aumentando la intensidad de la fuerza aplicada, llega un momento en el que el cuerpo comienza a deslizar. Sucede que la fuerza de rozamiento ha ido aumentando hasta un valor límite, pero una vez que éste ha sido alcanzado ya no puede oponerse a que el cuerpo deslice. *La fuerza de rozamiento tiene la dirección del desplazamiento pero es de sentido contrario al movimiento,* fig.1.18.

El valor de la fuerza de rozamiento está relacionado con la fuerza que actúa en dirección normal entre las dos superficies *N* y además, depende de la naturaleza de éstas y de su pulimentación. Se expresa con el coeficiente de rozamiento $\mu$*,* que toma valores distintos antes y en el momento de iniciarse el movimiento, *llamado coeficiente de rozamiento estático* $\mu_e$; o cuando el movimiento ya está establecido, *coeficiente de rozamiento cinético* $\mu_c$.

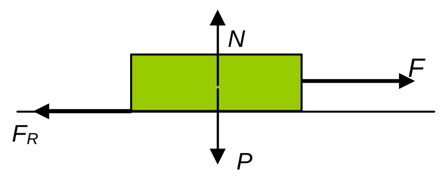


Fig.1.18. A medida que aumenta la fuerza aplicada, crece también la fuerza de rozamiento que se opone a ella, sin embargo hasta un cierto valor límite, de modo que una vez alcanzado ya permite que el cuerpo empiece a deslizar, ahora resulta $F_R < F$

Experimentalmente se confirma que el módulo de la fuerza de rozamiento está relacionado con la fuerza normal, mediante dos ecuaciones distintas:

Antes de comenzar el deslizamiento $F_R < \mu_e\,N$

Al iniciarse el deslizamiento $F_R = \mu_e\,N$ (1.13)

Cuando el cuerpo desliza la fuerza de rozamiento $F_R$ se vincula con la normal *N*, por el coeficiente de rozamiento cinético $\mu_c$. Entonces $F_R = \mu_c\,N$.

El coeficiente de rozamiento cinético $\mu_c$ es menor que el estático $\mu_e$ . Ambos valores se determinan experimentalmente, indicándose los límites entre los que se encuentran, así, para un cuerpo de madera que roza sobre otro también de madera $\mu_e$ se encuentra entre *0,25-0,50;* mientras que $\mu_c$ se halla entre *0,20-0,40.*

**Ejemplo 3.4**

*Un taco de madera de $m_1$ = 10 kg está sobre una mesa de madera horizontal siendo $\mu_e$ =0,3. De este cuerpo se cuelga otra masa $m_2$ mediante una cuerda que pasa por una polea, fig.1.19. Determina el máximo valor que puede tomar $m_2$ para que el cuerpo no deslice.*

Como el valor máximo de la fuerza de rozamiento estático es $F_R = \mu_e N$; y la fuerza que tira es la tensión $T$ de la cuerda y en esta situación estática, es $T = P_2$.

$$F_R = T\,; \qquad F_R = \mu_e N = \mu_e P_1 = \mu_e m_1 g\,; \qquad T = P_2 = m_2 g$$

$$\mu_e m_1 g = m_2 g \qquad\qquad m_2 = \mu_e m_1 = 0{,}3 \cdot 10\,kg = 3{,}0\,kg$$

Para valores de $m_2$ mayores de *3,0 kg* el cuerpo ya comienza a deslizar sobre el plano. Observa que el máximo valor que puede tomar la fuerza de rozamiento es.

$$(F_R)_{máx} = \mu_e m_1 g = 0{,}3 \cdot 10\,kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = 29{,}4\,N$$

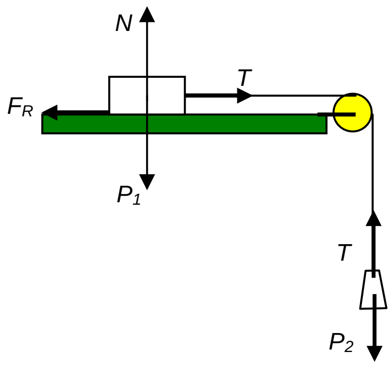

Fig.1.19. Las fuerzas están equilibradas de modo que la tensión de la cuerda es $T = P_2$. Además $N = P_1$

### 3.5 La fuerza elástica

Los cuerpos cambian sus dimensiones cuando se le aplican fuerzas a pesar de que hay fuerzas interiores que se oponen a los cambios. Cuerpo elástico es el que adquiere la forma primitiva cuando cesa la acción deformadora.

El ejemplo más sencillo lo constituye un muelle, el cual se puede alargar bajo una fuerza de tracción, o acortar si ésta es de compresión. El muelle deformado reacciona contra la fuerza exterior, con otra fuerza de sentido contrario que se llama fuerza recuperadora.

Supongamos un muelle cuya longitud natural es $l_0$, y que se le aplica una fuerza de intensidad creciente en el extremo, por medio de un gancho de masa despreciable. El muelle se alargará, y si se representan gráficamente los valores de la fuerza aplicada en ordenadas y el alargamiento en abscisas, se obtiene una gráfica como la de la fig.1.20, cuya ecuación es la de la recta: $F' = k(l - l_o) = k\,x$; conocida como *ley de Hooke*. La magnitud $k$ es la constante recuperadora o elástica del muelle y se determina experimentalmente mediante la pendiente de la recta.

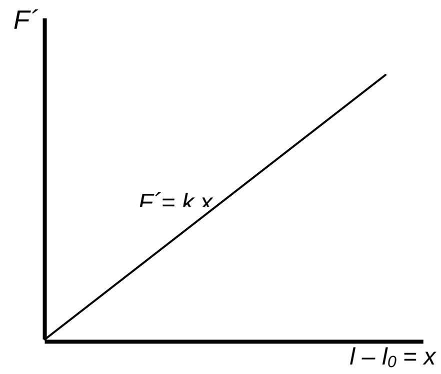

Fig.1.20. En un muelle deformado, las fuerzas aplicadas son proporcionales a los alargamientos que producen.

Cuando el muelle está deformado, la fuerza $\vec{F}'$ aplicada al gancho en el extremo del muelle, y la fuerza recuperadora $\vec{F}$ que el muelle ejerce sobre el gancho, fig.1.21, lo dejan en equilibrio de modo que son iguales y de sentido contrario.

$$\vec{F} = -\vec{F}' = -F'\,\vec{i} = -k\,(l - l_o)\,\vec{i} = -k\,x\,\vec{i} \qquad (1.14)$$

El signo menos indica que $\vec{F}$, tiene sentido positivo si x < 0 y el muelle está comprimido y $\vec{F}$ tiene sentido negativo si x > 0 y el muelle está alargado.

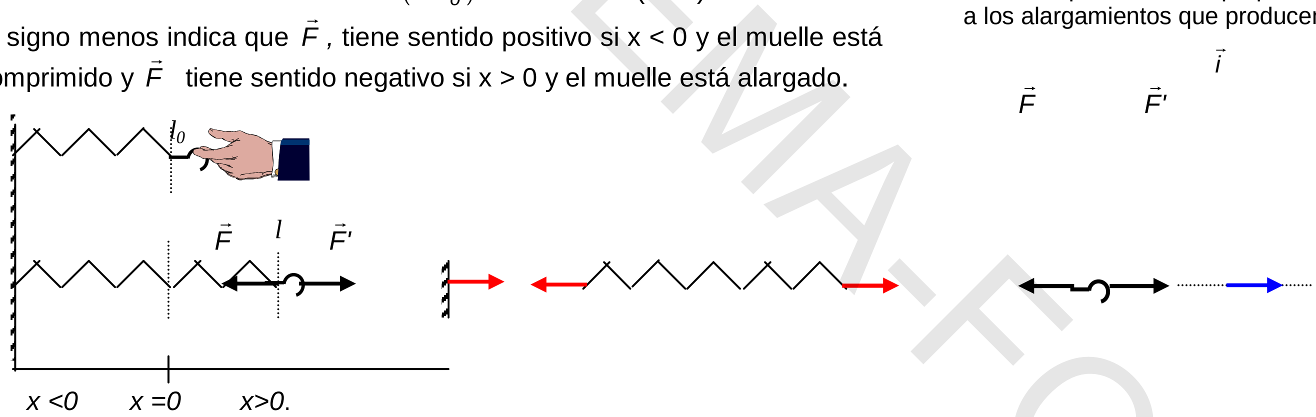

Fig.1.21. Parejas de acción-reacción en un muelle estirado

**Ejemplo 3.5**
*Un muelle cuya longitud natural es de 25 cm, se estira con una fuerza de 20 N, alargándose hasta 30 cm. Halla la longitud que tendrá este muelle cuando se suspenda de él una masa de 2 kg en un lugar donde la intensidad de la gravedad vale 9,8 N/kg.*

De la ley de Hooke se puede obtener la constante elástica del muelle:

$$k=\frac{F}{l-l_0}=\frac{20\,N}{0{,}30\,m-0{,}25\,m}=400\,\frac{N}{m}$$

El peso es ahora la fuerza deformadora. Al suspenderlo del muelle se origina una tracción y de nuevo la ley de Hooke.

$$x=l-l_0=\frac{P}{k}=\frac{2\,kg\cdot 9{,}8\,\frac{N}{kg}}{400\,\frac{N}{m}}=0{,}049\,m=4{,}9\,cm$$

La longitud del muelle estirado es: $l=l_0+x=25\,cm+4{,}9\,cm=29{,}9\,cm$

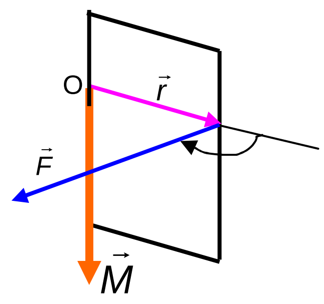


Fig.1.22. El momento de la fuerza respeto de O, es un vector $\vec M$ perpendicular al plano formado por los dos vectores, con sentido el de avance de un tornillo que al girar pueda llevar al primero, en este caso $\vec r$ (cuya dirección se ha prolongado) sobre el segundo $\vec F$ con el giro más corto.

## 4 Momento de una fuerza

Cuando una fuerza se aplica a un cuerpo libre produce aceleración, pero si el cuerpo se encuentra unido a un eje que únicamente le permite girar, ¿cómo actúa entonces la fuerza?. Ejerciendo otro efecto llamado momento.

Consideremos un cuerpo con un eje, alrededor del cual podría girar fig.1.22 y una fuerza $\vec F$ que actúa a una distancia $\vec r$ del eje. Se define el momento de la fuerza respecto del punto O del eje, como un vector $\vec M$ aplicado en O, igual al producto vectorial del vector de posición $\vec r$ por la fuerza $\vec F$.

$$\vec M=\vec r\wedge\vec F \qquad (1.15)$$

La dirección de $\vec M$ es perpendicular al plano que forman los vectores $\vec r$ y $\vec F$, fig.1.22. Sentido, el de avance de un tornillo que lleve al primer vector sobre el segundo con el giro más corto. Y módulo fig.1.23, el producto de los módulos por el seno del ángulo que forman $\left|\vec M\right|=r\cdot F\,sen\,\alpha=F\cdot r\,sen\,\alpha=F\cdot h$

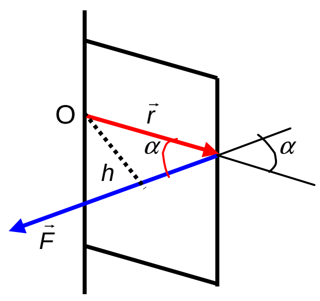


Fig.1.23. La perpendicular trazada desde O hasta la línea de acción de la fuerza es $h=r\cdot sen\,\alpha$. Se llama el brazo.

### 4.1 Momento de un par de fuerzas

Un par de fuerzas fig.1.24, es el conjunto formado por dos fuerzas paralelas, del mismo módulo y de sentidos contrarios, pero con distinto punto de aplicación. Su resultante es nula y no producen traslación pero proporcionan un momento que provoca la rotación del cuerpo al que se aplica el par.

$$\vec M=\vec r\wedge\vec F\,; \qquad \left|\vec M\right|=r\,F\,sen\,\alpha=F\cdot h$$

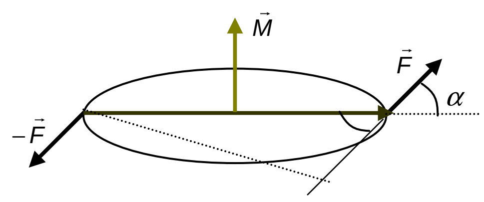


Fig.1.24. $\vec M$ es perpendicular al plano formado por el par de fuerzas.

**Ejemplo 4.1**

*Si en el **ejemplo 3.3** la curva carece de peralte y la fuerza de rozamiento proporciona el valor hallado para la fuerza centrípeta, determina el ángulo que debe inclinarse el ciclista con la vertical, para poder tomar la curva sin sufrir derrape, fig.1.25.*

En la fig.1.20 se observa que las fuerzas en el suelo punto *A,* son la reacción normal $\vec{N}$ (que equilibra el peso $\vec{P}$) y la fuerza de rozamiento $\vec{F}_R$ (que produce la fuerza centrípeta) y que al no pasar por el punto de aplicación del peso G, dan momentos respecto de este punto. El ciclista se inclinará lo necesario para conseguir la igualación de estos dos momentos que actúan con sentidos contrarios.

$N \cdot h_1 = F_R \cdot h_2$ ;   Como $N = P = m \cdot g$ ;  y $F_R = F_c = 180\ N$; sustituyendo resulta:

$$N \cdot AG\, sen\,\alpha = F_R \cdot AG\ cos\ \alpha\ ;\quad tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{F_R}{N} = \frac{180\ N}{80\ kg \cdot 9{,}8\ {}^{N}\!/_{kg}} = 0{,}23\ ;\ \alpha = 13^o$$

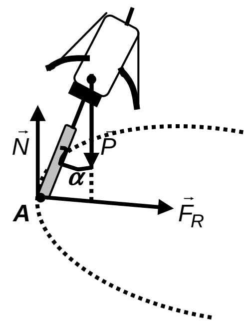


Fig.1.25. Cuando el ciclista toma la curva la $\vec{F}_R$ al actuar hacia el centro de curvatura de la misma, hace las veces de la fuerza centrípeta. Los momentos respecto de *G,* de la reacción $\vec{N}$ y de la fuerza de rozamiento $\vec{F}_R$ se equilibran para una cierta inclinación $\alpha$ del ciclista, de modo que puede permanecer con un ladeo, sin caerse.

## 5 Momento angular o cinético

El momento cinético $\vec{L}$ de una partícula *m,* respecto del origen *O*, fig.1.26, se define como un vector aplicado en *O*, (se evalúa desde *O),* igual al producto vectorial del vector de posición $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ por el momento lineal $\vec{p}$.

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \qquad (1.16)$$

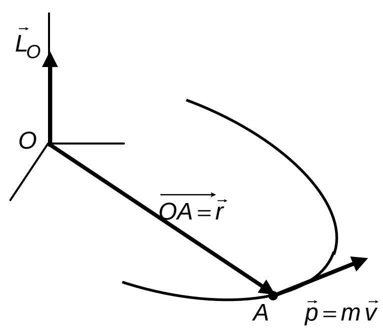


Fig.1.26. El momento angular de una partícula respecto del origen es un vector aplicado en *O.*

El momento cinético se ha definido respecto de *O*, pero se puede calcular respecto de cualquier otro punto *Q*, fig. 1.27. Ahora es $\vec{L}_Q = \overrightarrow{QA} \wedge \vec{p}$ ; pero la relación entre los vectores de posición es $\vec{QA} = \vec{OA} - \vec{OQ}$. Sustituyendo:

$$L_Q = \overrightarrow{QA} \wedge \vec{p} = \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ}\right) \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{p} - \overrightarrow{OQ} \wedge \vec{p} = \vec{L}_O - \overrightarrow{OQ} \wedge \vec{p}$$

$$\vec{L}_Q = \vec{L}_O + \overrightarrow{QO} \wedge \vec{p} \qquad (1.17)$$

El momento angular de una partícula respecto de un punto cualquiera *Q,* es igual al momento angular respecto del origen $\vec{L}_O$, más el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{QO}$ y $\vec{P}$.

### 5.1 Ecuación del momento angular

Para encontrar la relación, es necesario determinar como varía con respecto al tiempo el momento angular, lo que requiere hallar su derivada.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \wedge \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} \ + \ \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \wedge m\vec{v} \ + \ \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_O$$

$\vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$ ; por tratarse del producto vectorial de dos vectores paralelos.

$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ según la ec.(1.8) correspondiente al segundo principio.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \qquad (1.18)$$

La variación con respecto del tiempo del momento angular, es igual al momento de la fuerza aplicada sobre la partícula, estando ambas magnitudes evaluadas desde el mismo punto *O.*

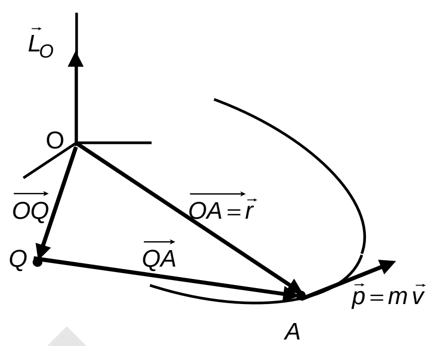


Fig.1.27. Momento angular respecto de otro punto *Q.* Observa que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA}$

### 5.2 Velocidad areolar

Para entender el significado físico del momento angular vamos a calcular primero el valor del área que recorre el vector de posición de la partícula $\vec{r}$, cuando ésta efectúa un desplazamiento $d\vec{r}$ por su trayectoria fig.1.28. El área se calcula con el producto vectorial de $\vec{r}$ y $d\vec{r}$ (apéndice). Resulta:

$$d\vec{A} = \tfrac{1}{2}\vec{r} \wedge d\vec{r}$$

Teniendo en cuenta que el desplazamiento, ec.(1.2) es $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$, se obtiene:

$$d\vec{A} = \tfrac{1}{2}\ \vec{r} \wedge \vec{v}\ dt$$

Pasando *dt* dividiendo al primer miembro, y multiplicando y dividiendo en el segundo miembro, por la masa de la partícula *m*, resulta la velocidad areolar

$$\vec{V}_A = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2\ m}\ r \wedge m\ \vec{v} = \frac{\vec{L}}{2\ m} \qquad (1.19)$$

La velocidad areolar es igual al momento angular dividido por el doble de la masa de la partícula y su significado físico está relacionado con la rapidez con la que el radio vector $\vec{r}$ va cubriendo áreas, fig.1.28. Representa el valor del área que recorre el radio vector en la unidad de tiempo. Sus unidades en el S. I. son $m^2/s$.

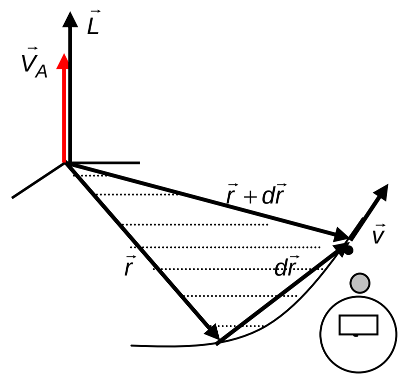


Fig.1.28. La velocidad areolar $\vec{V}_A$ es un vector de la misma dirección y sentido que el momento angular $\vec{L}$. El área rayada es la que cubre el radio vector $\vec{r}$ en un tiempo d*t,* y el cociente entre esta área y el tiempo empleado en recorrerla representa la velocidad areolar.

### 5.3 Conservación del momento angular

- Si los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$ son paralelos el momento es nulo $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$; por serlo el producto vectorial de dos vectores paralelos. Esto sucede con un tipo de fuerzas que en todo instante están dirigidas hacia el mismo punto *O,* razón por la que se designan como fuerzas centrales, fig.1.29.

- Cuando el momento de la fuerza es nulo, el momento cinético permanece constante. En efecto de ec.(1.18) resulta:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = 0\,; \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}_0 = Cte. \qquad (1.20)$$

- *Ley de las áreas.* Como la constancia de un vector, conlleva la de su módulo, dirección y sentido, entonces la trayectoria de la partícula se tiene que encontrar constantemente en un plano perpendicular al vector $\vec{L}_O$. Además su velocidad areolar $\vec{V}_A$ ec.(1.19) es constante, recorriendo áreas iguales en tiempos iguales, se conoce como la ley de las áreas.

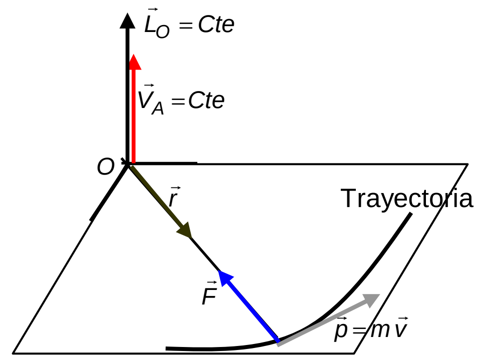


Fig.1.29. Cuando la fuerza apunta continuamente hacia el mismo punto *O,* se llama central y entonces el momento angular $\vec{L}_o$ y la velocidad areolar $\vec{V}_A$, permanecen constantes, resultando que la trayectoria de la partícula es plana.

*El momento angular de una partícula* es un concepto bastante abstracto, sin embargo es una propiedad que se conserva constante, cuando la partícula se mueve bajo la acción de una fuerza central.

Un importante ejemplo, son las fuerzas de gravitación que se dan entre el Sol y los planetas del Sistema Solar. Éstas actúan sobre los planetas apuntando continuamente hacia el Sol, y permitiéndoles describir órbitas planas alrededor de éste. Como consecuencia de que la fuerza es central se produce la constancia del momento angular y las órbitas descritas son elípticas, con el Sol situado en uno de los focos de la elipse, fig.1.30, como se ampliará en la Unidad-2.

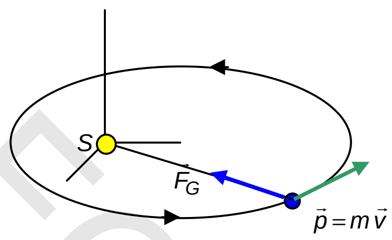


Fig.1.30. La fuerza gravitatoria es central

### 5.4 Unidades del momento angular y del momento de una fuerza

De la definición del momento angular, resulta para el módulo en el S. I.

$$L = r\cdot m\cdot v = m \quad kg\cdot\frac{m}{s} = kg\,\frac{m}{s}\,m = kg\,\frac{m}{s^2}\,m\,\cdot\, s = N\,\cdot\, m\,\cdot\, s = J\cdot\, s$$

*La unidad del momento angular es el julio multiplicado por segundo.*

De la definición del momento de una fuerza se obtiene para el módulo.

$$M = r\,\cdot\,F = N\,\cdot\,m$$

*La unidad del momento de una fuerza es el newton por metro* y no se dice *julio*, para diferenciarlo de una energía.

**Ejemplo 5.1**

*Una partícula de masa 0,4 kg, se mueve siguiendo la trayectoria definida por la función vectorial* $\vec r\,(t) = t^2\,\vec i + 2t\,\vec j$ *. Calcular el momento cinético de la partícula respecto al origen de coordenadas O y el momento de la fuerza que actúa sobre la misma respecto del mismo punto, en el instante t = 2 s.*

La velocidad de la partícula es: $\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = 2t\ \vec i + 2\ \vec j$

El momento lineal, $\vec p\,(t) = m\ \vec v = 0,4\ \left(2t\ \vec i + 2\,\vec j\right) = 0,8\ t\ \vec i + 0,8\ \vec j$

La aceleración de la partícula es $\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = 2\ \vec i = Cte$ en $m/s^2$

La fuerza $\vec F = m\ \vec a = 0,4\ kg\ \cdot\ 2\ \vec i\ \ m/s^2 = 0,8\ \vec i\ \ N$

El momento angular vale:

$$\vec L_O = \vec r\ \wedge \vec p = \left(t^2\ \vec i + 2t\ \vec j\right)\wedge\left(0,8\ t\ \vec i + 0,8\ \vec j\right) = -0,8\ t^2\ \vec k$$

En el instante *t = 2 s ;* $\vec L_O\left(2\ s\right) = -1,6\ \cdot\ 2^2\ \vec k = -6,4\ \vec k\quad en\ \ J\ \cdot s$

El momento de la fuerza

$$\vec M_O = \vec r\ \wedge\ \vec F = \left(t^2\ \vec i + 2\ t\ \vec j\right)\wedge\left(0,8\ \vec i\right) = -1,6\ t\ \vec k$$

Cuando *t = 2 s.* es: $\vec M_O = -1,6\ \cdot\ 2\ \vec k = -3,2\ \vec k\quad N\ \cdot\ m$

Verifiquemos si se cumple la ecuación (1.16) $\frac{d\vec L_O}{dt} = \vec M_O$. Derivando:

$\frac{d\vec L_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-0,8\ t^2\ \vec k\right) = -1,6\ t\ \vec k$ ; que al comparar con $\vec M_O$ vemos que se cumple.

**Ejemplo 5.2**

*Calcula los momentos angular y de fuerza de la partícula del **Ejemplo 5.1** en el mismo instante, pero respecto del punto Q cuyo vector de posición es* $\overrightarrow{OQ} = 10\ \vec k$ *.*

El vector $\overrightarrow{QO} = -\ \overrightarrow{OQ} = -\ 10\vec k$ sustituyendo en ec. (1.15) resulta:

$$\vec L_Q = \vec L_O + \overrightarrow{QO}\wedge\vec p = -6,4\ \vec k + \left[-10\vec k\wedge\left(1,6\,\vec i + 0,8\,\vec j\right)\right] = 8\,\vec i - 16\,\vec j - 6,4\,\vec k\quad J\cdot s$$

Para el momento, usando una ecuación similar comprueba que :

$$\vec M_Q = \vec M_O + \overrightarrow{QO}\ \wedge\vec F = -3,2\ \vec k + \left[-10\ \vec k\wedge\left(0,8\ \vec i\right)\right] = -8\ \vec j - 3,2\ \vec k$$

en $N\cdot m$

Retrato de Lagrange

**Joseph Louis Lagrange (1736-1813)**

Físico y matemático franco-italiano, realizó una sistematización de la Mecánica, reuniendo todos sus métodos en un libro que tituló *Mecánica Analítica*, donde solo empleaba procedimientos algebraicos sin diagramas geométricos de ningún tipo.

En Astronomía atacó el problema general de varios cuerpos que Newton solo dejó planteado. La ley de gravitación universal se refiere solo a dos cuerpos que están aislados, sin embargo en el Sistema Solar hay muchos más, bien es verdad que la influencia del Sol es muy superior a la de los demás planetas. No obstante estos cuerpos menores ejercen influencias entre sí que se llaman perturbaciones y que no se deben ignorar.

Lagrange dedujo el modo de aplicar las matemáticas a sistemas con influencias de más de dos cuerpos, como el Tierra, Sol, Luna o el de Júpiter con las cuatro lunas de Galileo.

En 1793 durante la Revolución Francesa cuando residía en París, le encargaron la dirección de una comisión que debía estudiar un nuevo sistema de pesas y medidas. Aquel grupo de científicos elaboró el Sistema Métrico Decimal.