21.- Un átomo de masa M se encuentra en reposo, en él se produce un salto electrónico desde una órbita más externa a una más interna con un cambio de energía ΔE y se emite un fotón. A) Se pide determinar la energía de retroceso del átomo. B) Calcular la frecuencia del fotón emitido por un átomo de hidrógeno en un salto electrónico desde el nivel n=5 al nivel en que el átomo queda en su estado fundamental.
Datos. Masa aproximada del átomo de hidrógeno 1 uma
Energía del átomo de hidrógeno $E=-13,6/n^2$ eV
Constante de Planck = $6,63.10^{-34}$ Js

a) Designamos con E_f la energía del fotón y con E_a la del átomo. En el proceso se conserva la energía y la cantidad de movimiento.

$$\Delta E = E_a + E_f = \frac{1}{2}Mv^2 + E_f \qquad (1)$$

$$p_a = p_f \Rightarrow Mv = \frac{E_f}{c} \Rightarrow E_f = Mvc \quad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$\Delta E = \frac{1}{2}Mv^2 + Mvc \Rightarrow v^2 + 2vc - \frac{2\Delta E}{M} \Rightarrow v = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 + 8\frac{\Delta E}{M}}}{2} = -c \pm \sqrt{c^2 + 2\frac{\Delta E}{M}}$$

La solución es tomar el signo positivo $v = -c + \sqrt{c^2 + 2\frac{\Delta E}{M}}$ (3)

b) La energía del átomo de hidrógeno para el nivel n=5 es E=-13,6/25=-0,54 eV

$$\Delta E = -0,54 - (-13,6) = 13,06\,\text{eV} = 13,06\,\text{eV}\cdot\frac{1,6.10^{-19}\,\text{J}}{\text{eV}} = 2,09.10^{-18}\,\text{J}$$

$$2\frac{2,09.10^{-18}}{1\cdot 1,66.10^{-27}} = 2,52.10^{9}\,\frac{m^2}{s^2}\ ;c^2 = 9.10^{16}\,\frac{m^2}{s^2}$$

De los valores se deduce que: $c^2 >> 2\frac{\Delta E}{M}$ y como consecuencia de ello $v \approx 0$. La energía ΔE se la lleva el fotón

$$\Delta E = h\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2,09.10^{-18}}{6,63.10^{-34}} = 3,2.10^{15}\,\text{Hz}$$

22.-Una partícula de masa en reposo $m(o)_1$ se desplaza con una velocidad $+v_1$ constante paralela al eje X de un sistema de referencia S. En este mismo sistema se encuentra, enfrente de la partícula anterior, otra de masa en reposo $m(o)_2$ con velocidad nula. Aplicando la teoría de la relatividad

a) Calcular la cantidad de movimiento de ambas partículas en el sistema S.

b) Calcular la energía de cada partícula respecto del sistema S

c) Calcular la velocidad del centro de masa del sistema formado por las dos partículas respecto de S

d) Calcular las velocidades de las partículas respecto del centro de masas.

e) Calcular las cantidades de movimiento de ambas partículas respecto del sistema ligado al centro de masas.

Utilizar las relaciones siguientes: $\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}=\gamma \;\; ; \;\; \dfrac{m(o)_2}{m(o)_1}=\mu$

a) La cantidad de movimiento en la teoría de la relatividad es: $\vec{p}=\gamma m \vec{v}$, siendo m la masa en reposo de la partícula

$$\vec{p}_1=\gamma m(o)_1 \vec{v}_1 \;\; ; \;\; \vec{p}_2=\gamma m(o)_2 \vec{v}_2=0$$

b) La ecuación de la energía según la teoría de la relatividad: $E=\gamma mc^2$. Para la partícula 2 que esta en reposo $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}}=1$

$$E_1=\gamma m(o)_1 c^2 \;\; ; \quad E_2=\gamma m(o)_2 c^2=m(o)_2 c^2$$

c) Recurrimos a la ecuación de la velocidad del centro de masas

$$\vec{v}_{CM}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

Las masas que figuran en la ecuación anterior son las masas medidas en el sistema S

$$\vec{v}_{CM}=\frac{\gamma m(o)_1 \vec{v}_1+\gamma m(o)_2 \vec{v}_2}{\gamma m(o)_1+m(o)_2}=\frac{\gamma m(o)_1 \vec{v}_1}{\gamma m(o)_1+m(o)_2}=\frac{\gamma \vec{v}_1}{\gamma+\dfrac{m(o)_2}{m(o)_1}}=\frac{\gamma \vec{v}_1}{\gamma+\mu}$$

d) La ecuación relativista que relaciona las velocidades medidas en dos sistemas es:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}$$

Aplicando la ecuación anterior, tenemos:

$$(v_1)_{CM} = \frac{v_1 - v_{CM}}{1 - \frac{v_1 v_{CM}}{c^2}} = \frac{v_1 - \frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}}{1 - \frac{v_1 \frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}}{c^2}} = \frac{\frac{v_1 \mu}{\gamma + \mu}}{1 - \frac{v_1^2 \gamma}{c^2(\gamma + \mu)}} = \frac{\frac{v_1 \mu}{\gamma + \mu}}{\frac{c^2(\gamma + \mu) - v_1^2 \gamma}{c^2(\gamma + \mu)}} = \frac{v_1 \mu c^2}{\gamma(c^2 - v_1^2) + \mu c^2}$$

Tenemos en cuenta que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2}{c^2 - v_1^2} = \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 - v_1^2 = \frac{c^2}{\gamma^2}$$

Sustituyendo en $(v_1)_{CM}$

$$(v_1)_{CM} = \frac{v_1 \mu c^2}{\gamma \frac{c^2}{\gamma^2} + \mu c^2} = \frac{v_1 \mu}{\frac{1}{\gamma} + \mu} = \frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma}$$

Para la masa m_2.

$$(v_2)_{CM} = \frac{v_2 - v_{CM}}{1 - \frac{v_2 v_{CM}}{c^2}} = -\frac{\gamma v_1}{\gamma + \mu}$$

e) Aplicando la ecuación relativista de la cantidad de movimiento en su aspecto modular

$$(p_1)_{CM} = \gamma\ m(o)_1 \cdot (v_1)_{CM} = \frac{m(o)_1}{\sqrt{1 - \frac{[(v_1)_{CM}]^2}{c^2}}} \cdot (v_1)_{CM} = \frac{c\ m(o)_1}{\sqrt{c^2 - \left[\frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma}\right]^2}} \cdot \frac{v_1 \mu \gamma}{1 + \mu \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (p_1)_{CM} = \frac{c\, m(o)_1\, v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2(1 + \mu \gamma)^2 - (v_1 \mu \gamma)^2}} = \frac{c\, m(o)_1\, v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + c^2 \mu^2 \gamma^2 + 2 c^2 \mu \gamma - \mu^2 \gamma^2 v_1^2}} =$$

$$= \frac{c\, m(o)_1\, v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + \mu^2 \gamma^2 (c^2 - v_1^2) + 2 c^2 \mu \gamma}} = \frac{c\, m(o)_1\, v_1 \mu \gamma}{\sqrt{c^2 + \mu^2 \gamma^2 \frac{c^2}{\gamma^2} + 2 c^2 \mu \gamma}} \Rightarrow$$

$$\left(p_1\right)_{CM} = \frac{m(o)_1\, v_1\, \mu\, \gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\,\mu\,\gamma}}$$

Dado que la cantidad de movimiento es un vector podemos escribir

$$\left(\vec{p}_1\right)_{CM} = \frac{m(o)_1\, \mu\, \gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\,\mu\,\gamma}}\,\vec{v}_1 \quad ; \quad \left(\vec{p}_2\right)_{CM} = -\frac{m(o)_2\ \gamma}{\sqrt{1+\mu^2+2\,\mu\,\gamma}}\,\vec{v}_1$$

Como $m(o)_2 = \mu\, m(o)_1$, resulta que: $\left(\vec{p}_1\right)_{CM} + \left(\vec{p}_2\right)_{CM} = 0$.

23.-Desde un sistema de referencia S que se considera en reposo se lanza una onda electromagnética plana la cual incide normalmente sobre un espejo plano situado en reposo en un sistema de referencia S´. El sistema S´ se dirige con velocidad constante relativista v hacia el sistema S. La onda se refleja en el espejo.¿Cuál es la frecuencia de esa onda que mide un observador situado en el sistema S?
Deducir la frecuencia en el caso de que v sea mucho menor que la velocidad de la luz.
Ayuda : La fórmula del efecto Doppler relativista es:

$$\omega = \sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}}\,\omega_o \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

La onda emitida desde S con frecuencia ω_o es recibida en el espejo situado en S´. Como S´ se acerca hacia el sistema S, un observador situado en S´, mediría una frecuencia angular mayor que ω_o. Según la expresión del efecto Doppler.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_o \quad ; \quad \omega_1 > \omega_o$$

La onda de frecuencia ω_1 es reflejada en el espejo y se dirige hacia el sistema S donde un observador situado en ese sistema mide una frecuencia mayor, dado que la fuente emisora se acerca a él.

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_1$$

Sustituyendo en la última ecuación ω_1 resulta:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,\omega_o = \frac{1+\beta}{1-\beta}\omega_o \Rightarrow$$

$$\omega_2 = \frac{(1+\beta)^2}{(1-\beta)(1+\beta)}\omega_o = \frac{1+\beta^2+2\beta}{1-\beta^2}\omega_o \quad \Rightarrow \quad \omega_2 \approx (1+2\beta)\,\omega_o$$

24.- Un pulso de un láser que dura T segundos con una energía E, incide sobre una superficie plana. Una mitad de los fotones son reflejados en la dirección incidente y la otra mitad son absorbidos. El haz provoca en la superficie una mancha circular de radio r. Calcular la presión media que sufre la superficie. Realizar el cálculo si E = 1 J , r=0,5 mm y T = 1 ms.

Designamos con N al número de fotones que contiene el pulso del láser. La energía por cada uno de los fotones es: $E_f = \frac{E}{N}$. El momento que cada fotón posee es igual a $p_f = \frac{E_f}{c}$. La variación de la cantidad de movimiento que experimenta cada uno de los fotones que se refleja es: $2p_f = 2\frac{E_f}{c}$.La variación de la cantidad de movimiento de cada uno de los fotones que se absorbe es: $\frac{E_f}{c}$.

La variación de la cantidad de movimiento de todos los fotones dividido por el tiempo en que se produce esa variación es igual a la fuerza que se ejerce sobre la superficie $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$. A su vez la presión media sobre la superficie es: $\langle P \rangle = \frac{F}{S}$

$$F = \frac{2\frac{N E_f}{c} + \frac{N E_f}{c}}{T} \text{ y además } \quad F =< p > \cdot S \;\Rightarrow\; \text{ como } NE_f = E, \text{ resulta}$$

$$<, P >= \frac{3E}{\pi r^2 c T} \;\Rightarrow\; < P >= \frac{3 \cdot 1\,J}{\pi \left(0,5.10^{-3}\right)^2 m^2 \cdot 3.10^8 \frac{m}{s} \cdot 1.10^{-3} s} = 12,7\frac{N}{m^2} = 12,7\,Pa$$

25.- El recorrido libre medio de una partícula alfa en el aire viene dado por la ecuación empírica

$$R = 10^{-23}\, v_i^3$$

R en metros y velocidad inicial en m/s.
Deducir la relación entre el recorrido libre medio y la energía cinética inicial de la partícula. Representar gráficamente R (eje Y) frente a la energía cinética (eje X).
Durante el recorrido la partícula alfa produce pares de iones siendo la energía de formación de dicho par 34 eV. Calcular el número de pares de iones formados durante todo el recorrido de una partícula alfa de 7 MeV y el número formado cuando solamente haya recorrido la mitad inicial.
Datos. Masa de la partícula alfa = 4 uma

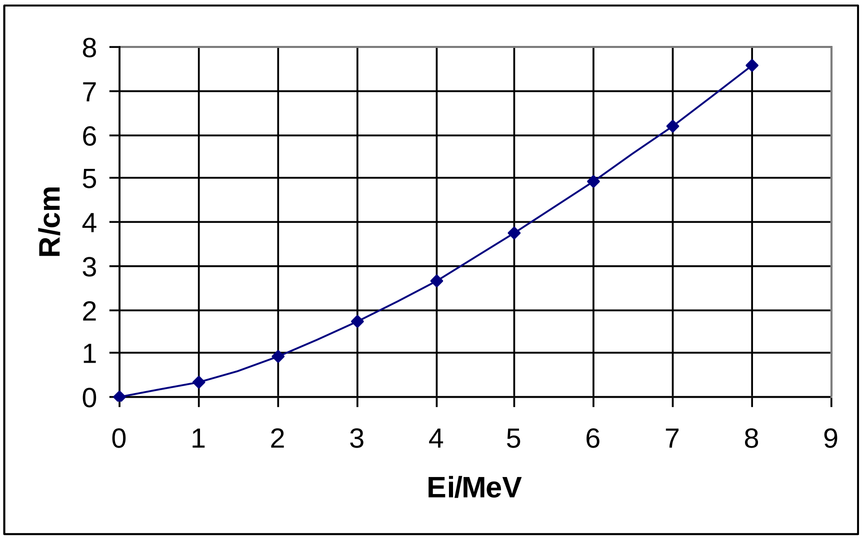
La energía cinética inicial es: $E_i = \frac{1}{2} m_\alpha v_i^2 \quad \Rightarrow \quad v_i = \left(\frac{2E_i}{m_\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$

Sustituyendo en R:

$$R = 10^{-23}\left(\frac{2E_i}{m_\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{10^{-23}\cdot 2^{\frac{3}{2}}}{\left(4\cdot 1{,}66.10^{-27}\right)^{\frac{3}{2}}} E_i^{\frac{3}{2}} = 5{,}23.10^{16} E_i^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

R en metro y E_i en julios.

En la gráfica se han representado R en cm y la energía cinética en MeV.



Designamos con N a los pares de iones que forma la partícula en su recorrido, admitiendo que toda su energía se emplea en formar dichos pares.

$$N.34. = 7.10^6 \quad \Rightarrow \quad N = 2{,}1.10^5$$

Designamos con N´ los pares de iones que se forman cuando la partícula alfa de 7 MeV solamente ha recorrido la primera mitad.

La energía inicial –energía gastada en formar los pares = Energía final a mitad del recorrido
De la ecuación (1)

$$\frac{R}{5{,}23.10^{16}} = E^{\frac{3}{2}} \Rightarrow E = \left(\frac{R}{5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{R}{5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}} - N´\cdot 34\cdot 1{,}6.10^{-19} = \left(\frac{R}{2\cdot 5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow N´= \frac{\left(\frac{R}{5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{R}{2\cdot 5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}}}{5{,}44.10^{-18}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N´= \frac{\left(\frac{R}{5{,}23.10^{16}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{2^{\frac{2}{3}}}\right)}{5{,}44.10^{-18}} = \frac{E_i \cdot 0{,}37}{5{,}44.10^{-18}} = \frac{\left(7.10^{6}.1{,}6.10^{-19}\right)\cdot 0{,}37}{5{,}44.10^{-18}} = 0{,}76.10^{5}$$

26.- Detector de partículas alfa
Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física

Uno de los tipos de radiación emitido por las sustancias radiactivas son las partículas alfa, consistentes en dos protones y dos neutrones, por tanto, con carga 2 q=+2.1,6.10^{-19} C y masa 4 uma.
El registro de las partículas alfa mediante sistemas eléctricos tiene su fundamento en la capacidad que tienen dichas partículas para producir iones cuando viajan a través de una sustancia gaseosa. Cuando lo hacen a través del aire y a una presión normal, existe una ecuación empírica que relaciona la energía E de la partícula alfa con el recorrido o rango R_α en ese medio.

$$R_\alpha = 0{,}318\,E^{\frac{3}{2}} \quad ; \quad R_\alpha \text{ en cm} \quad y \quad E \text{ en MeV}$$

Para detectar la radiación se utiliza una cámara de ionización (ver figura 1), la cual está llena de un gas que opera según el principio de separar las cargas positivas y negativas que produce la partícula alfa al ionizar el gas.

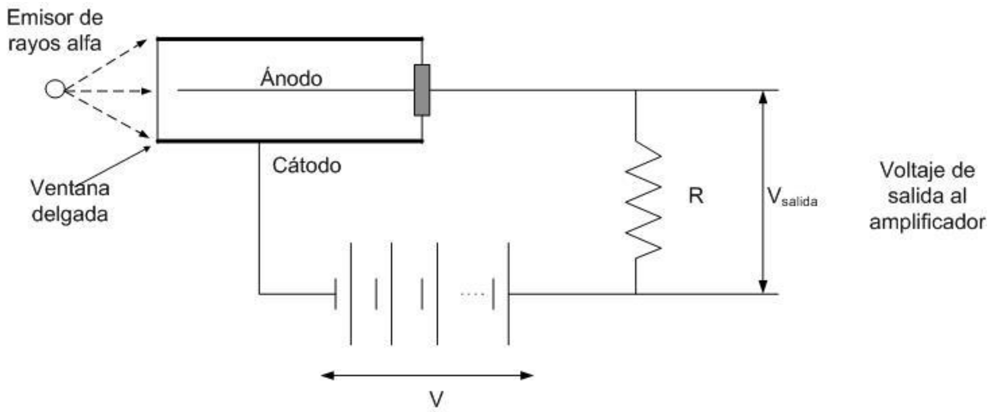


Fig.1.- Esquema del dispositivo de la cámara de ionización

La recolección de estas cargas da lugar a un pulso que se puede detectar, amplificar y luego grabar. La diferencia de voltaje entre el ánodo y el cátodo es lo suficientemente alta para evitar la recombinación de las cargas de distinto signo producidas durante la ionización.

1.- El sistema de la cámara de ionización tiene una capacidad de 45 picofaradios y sirve para detectar partículas α con un rango R_α=5,50 cm. Se supone que la energía necesaria para producir una ionización es 35 eV y que ésta da lugar a un electrón y a un ión con carga igual a la del electrón. Calcular el voltaje que produce cada partícula alfa.

A partir de la fórmula empírica determinamos la energía portadora por una partícula alfa.

$$E^{\frac{3}{2}} = \frac{R_\alpha}{0,318} \Rightarrow E = \left(\frac{R_\alpha}{0,318}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5,50}{0,318}\right)^{\frac{2}{3}} = 6,69 \text{ MeV}$$

Cuando la partícula α haya empleado su energía en ionizar el gas habrá producido un número de iones positivos igual a:

$$N = \frac{6,69.10^6}{35} = 1,91.10^5$$

La carga eléctrica que llevan los iones es:

$$Q = N \cdot 1,6.10^{-19} C = 1,91.10^5 \cdot 1,6.10^{-19} C = 3,06.10^{-14} C$$

Dado que la capacidad es 45 picofaradios, resulta:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{3,06.10^{-14}}{45.10^{-12}} = 6,8.10^{-4} \text{ V} = 0,68 \text{ mV}$$

2.- Los pulsos de voltaje producidos ocurren a través de una resistencia R. La corriente de saturación más pequeña que se detecta con el instrumento es 10^{-12} A. Se admite que la corriente es prácticamente constante y que la rapidez con que se recolecta la carga es igual a la producida por las partículas alfa. Calcular la actividad A, en partículas α, de una sustancia radiactiva con rango R_α = 5,50 cm suponiendo que el detector tiene una eficacia del 10%.

El número de partículas alfa emitidas en cada segundo es igual a la actividad A de la muestra, expresada en desintegraciones por segundo.
La energía total de las partículas alfa producidas en un segundo de tiempo es:

$$E_T = A \cdot 6,69 \text{ MeV}$$

El número de iones producidos es $N_1 = \frac{E_T}{35} = \frac{A \cdot 6,69.10^6}{35}$

La carga de estos iones en cada segundo es:

$$Q = N_1 \cdot 1,6.10^{-19} C = \frac{A \cdot 6,69.10^6}{35} \cdot 1,6.10^{-19} C$$

Como la eficacia es del 10% la carga que recoge el detector en cada segundo es:

$$Q' = \frac{A.6,69.10^6 \cdot 1,6.10^{-19}}{35} \cdot \frac{10}{100} = 3,06.10^{-15} \cdot A$$

Hacemos uso de la relación entre intensidad y carga

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow 10^{-12} = 3{,}06.10^{-15}\,A \Rightarrow A = \frac{10^{-12}}{3{,}06.10^{-15}} = 327\ \frac{\text{desintegra ciones}}{s}$$

3.-La cámara de ionización se utiliza para contar pulsos con una constante de tiempo $\tau = 10^{-3}\,s$. Calcular la resistencia R y la amplificación que se necesita realizar para producir una señal de 0,25 V.

Recordemos que cuando se carga un condensador la ecuación que rige el proceso es:

$$V = V_o e^{-\frac{t}{RC}}$$

Siendo RC la constante del tiempo:

$$10^{-3} = R\,C \Rightarrow R = \frac{10^{-3}}{45.10^{-12}} = 22{,}2.10^{6}\ \Omega$$

En el apartado 1 hemos deducido que el voltaje creado por una partícula alfa es 0,68 mV, luego la amplificación para obtener una señal de 0,25 V es:

$$G = \frac{250\,mV}{0{,}68\,mV} = 368$$

4.-La cámara de ionización consiste en un contador de forma cilíndrica, con un hilo metálico central (ánodo) de diámetro d, rodeado por una carcasa metálica (cátodo) de diámetro D. Obtener la expresión del campo eléctrico E y del potencial V a una distancia radial r (medida desde el eje central) siendo:

$$\frac{d}{2} \le r \le \frac{D}{2}$$

cuando existe en el hilo una carga λ por unidad de longitud. Deducir también la capacidad por unidad de longitud del tubo.
El campo de rotura que hace conductor al aire es: E_b= 3MV/m. Si d = 1 mm y D = 1 cm determinar el valor de la diferencia de potencial entre los hilos para que se produzca el campo E_b.

Para calcular el campo hacemos uso del teorema de Gauss (fig.2) Para ello consideramos un superficie cilíndrica de longitud L y radio r>d/2. Esta superficie engloba por entero al ánodo de la cámara, por consiguiente encierra en su interior la carga eléctrica λ L.

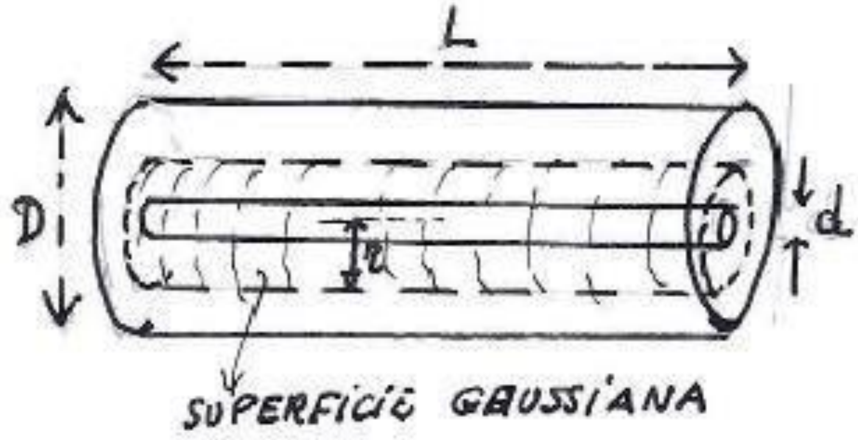


Fig.2

El flujo eléctrico se produce a través de la superficie lateral del cilindro y es nulo a través de sus bases.

$$E \cdot 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_o} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_o}$$

Para calcular el potencial recurrimos a la relación entre ambas magnitudes.

$$E = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad V = -\int E\,dr = -\int \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\frac{dr}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln r + Cte \quad (1)$$

Si en la ecuación (1) r=d/2, lo que indica que nos encontramos en la superficie exterior del ánodo y el potencial lo designamos como V_A.

$$V_A = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2} + Cte \Rightarrow Cte = V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln r + V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad V = V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2r} \quad (2)$$

Si en la ecuación (1) r=D/2, lo que indica que nos encontramos en la superficie interior del cátodo y el potencial lo designamos como V_C.

$$V_C = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2} + Cte \Rightarrow Cte = V_C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln r + V_C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2} \quad \Rightarrow \quad V = V_C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2r} \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3), resulta:

$$V_A + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{d}{2r} = V_C + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{2r} \Rightarrow V_A - V_C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\left(\ln\frac{D}{2r} - \ln\frac{d}{2r}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_A - V_C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{d} \Rightarrow \qquad \frac{C}{L} = \frac{1}{L}\frac{Q}{V_A - V_C} = \frac{\lambda L}{L\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{d}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\frac{D}{d}}$$

El valor máximo del campo ocurre cuando r adquiere el valor más pequeño, esto es, cuando r=d/2.

$$E_b = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_o\frac{d}{2}} \Rightarrow \lambda = \pi\varepsilon_o d E_b$$

Sustituyendo λ en la ecuación V_A-V_C.

$$V_A - V_C = \frac{\pi\varepsilon_o d E_b}{2\pi\varepsilon_o}\ln\frac{D}{d} = \frac{E_b d}{2}\ln\frac{D}{d} = \frac{3.10^6 \cdot 1.10^{-3}}{2}\ln\frac{1.10^{-2}}{1.10^{-3}} = 3{,}45.10^6\ \text{V}$$

27.- En la reacción nuclear $^{13}_{6}C + ^{1}_{1}H \rightarrow ^{14}_{7}N^{*}$, siendo el blanco de la reacción los núcleos de carbono, los protones con una energía de 1,750 MeV producen nitrógeno en estado excitado. a) Calcular la energía adscrita al centro de masas. b) Calcular la energía de excitación del nitrógeno c) Si el nitrógeno pasa a su estado fundamental lo hace emitiendo un fotón; probar que prácticamente toda la energía se la lleva el fotón.
d) Una de las reacciones más utilizadas en los aceleradores consiste en que un protón con cierta energía golpea a otro que se encuentra en reposo. Calcular la energía disponible para la reacción.
Datos . Masa del protón =1,007826 uma; masa del carbono = 13,003354 uma; M nitrógeno = 14,003074 uma ; 1 uma = 931,49 MeV/ c^2

a) Considerando el sistema Carbono-Protón como un sistema de partículas aislado, durante la colisión no actúan fuerzas externas por lo tanto el c.d.m. del sistema se mueve a velocidad constante. Designamos con v a la velocidad del protón respecto de un sistema inercial de referencia, con v_{CM} la velocidad del centro de masas del sistema. La energía del sistema está formada por dos términos a saber:

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

M es igual a la masa del protón más la masa del núcleo de carbono, v_{CM} es la velocidad del centro de masas respecto del sistema inercial. Además m_i es la masa de cada partícula y v_i su velocidad respecto del c.d.m.

$$v_{CM} = \frac{m_p v_p + m_C v_C}{m_p + m_C} = \frac{m_p v_p}{m_p + m_C} \Rightarrow E_{CM} = \frac{1}{2}\left(m_p + m_C\right)\cdot\left(\frac{m_p v_p}{m_p + m_C}\right)^2 = \frac{1}{2}m_p v_P^2 \frac{m_p}{m_p + m_C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad E_{CM} = 1{,}750\,\text{MeV}\cdot\frac{1{,}007826}{1{,}007826 + 13{,}003354} = 0{,}126 \text{ MeV}$$

b) La energía de la reacción es la del protón menos la energía adscrita al centro de masas más la energía de enlace debido a la variación de masa entre los reactivos y el producto de la reacción. Calculemos esta última.

La disminución de masa durante la formación del nuevo núcleo y la energía correspondiente valen:

$$\Delta m = 1{,}007826 + 13{,}003354 - 14{,}003074 = 0{,}008106 \text{ uma}$$

$$E_E = \Delta m.c^2 = 0{,}008106\,\text{uma.}\cdot c^2 \cdot 931{,}49\frac{\text{MeV}}{c^2} = 7{,}545 \text{ MeV}$$

La energía de excitación del nitrógeno es de acuerdo con lo explicado en b).

$$E_{EXC} = 7{,}545 + 1{,}750 - 0{,}126 = 9{,}169 \text{ MeV}$$

c) Cuando el nitrógeno vuelve a su estado fundamental emitiendo un fotón se cumplen dos leyes de conservación, a saber: la de la cantidad de movimiento y la de la energía. El fotón emitido se mueve en una dirección y sentido y el núcleo que retrocede lo hace en la misma dirección y sentido contrario al fotón.

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = p_N \ ; E_{EXC} = E_\gamma + E_N = p_N c + \frac{1}{2} m_N v_N^2 = m_N v_N c + \frac{1}{2} m_N v_N^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2E_{EXC}}{m_N} = 2 v_N c + v_N^2 \Rightarrow \quad v_N = \frac{-2c \pm \sqrt{4c^2 + \frac{8E_{EXC}}{m_N}}}{2} = -c + \sqrt{c^2 + \frac{2E_{EXC}}{m_N}}$$

Veamos ahora el valor numérico de la velocidad de retroceso del núcleo de nitrógeno

$$v_N = -c + \sqrt{c^2 + \frac{2 \cdot 9{,}169\mathrm{MeV}}{14{,}003 \cdot 931{,}49 \frac{\mathrm{MeV}}{c^2}}} = -c + \sqrt{c^2 + 0{,}001406\, c^2} = 0{,}000702\, c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_N = \frac{1}{2} m\, v_N^2 = \frac{1}{2} 14{,}003.1{,}66.10^{-27} \mathrm{kg} \left(7{,}02.10^{-4} c\right)^2 = 5{,}72.10^{-33} c^2 \ \ \mathrm{J} \Rightarrow$$

$$E_N = \frac{5{,}72.10^{-33} c^2}{1{,}6.10^{-13}} \mathrm{MeV} = 3{,}2.10^{-3}\, \mathrm{MeV}$$

El tanto por ciento de energía que se lleva el núcleo en su retroceso es:

$$\frac{3{,}2.10^{-3}}{9{,}169} \cdot 100 = 0{,}03\%$$

El 99, 97 % de la energía se la lleva el fotón.

d) En los choques en los que aparecen partículas nuevas es imposible convertir toda la energía cinética respecto del sistema inercial en masa en reposo de las partículas que se formen, puesto que además se debe conservar la cantidad de movimiento entre el estado inicial y final, lo cual implica que parte de la energía cinética inicial se transfiere como cinética de las partículas formadas. Sea v_p la velocidad no relativista del protón respecto de un sistema inercial de referencia, su energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2} m_p v_p^2$$

La velocidad del c.d.m. vale:

$$v_{CM} = \frac{m_p v_p + m_p v_p}{m_p + m_p} = \frac{m_p v_p}{m_p + m_p} = \frac{m_p v_p}{2 m_p} = \frac{v_p}{2}$$

En el sistema de referencia del centro de masas la velocidad de cada protón:

$$v'_p = v_p - v_{CM} = v_p - \frac{v_p}{2} = \frac{v_p}{2}; \qquad v''_P = 0 - \frac{v_p}{2} = -\frac{v_p}{2}$$

Volvamos a la ecuación $E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ en la que v_{CM} es la velocidad del centro de masas respecto del sistema inercial. En el caso que nos ocupa el centro de masas se mueve con velocidad $v_p/2$, por tanto, implica una energía adscrita al centro de masas $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$ y así la disponible para la reacción es:

$$\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_P v_p'^{\,2} + \frac{1}{2} m_P v_p''^{\,2} = \frac{1}{2} m_P \left(\frac{v_p}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m_P \left(-\frac{v_p}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} m_p v_p^2$$

En dicho sistema (el del centro de masas) toda la energía anterior está disponible para la reacción:

$$\frac{\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2}{E_C} = \frac{m_p v_p^2 / 4}{m_p v_p^2 / 2} = \frac{1}{2}$$

Como se ve el rendimiento es del 50%.

En los aceleradores modernos los choques entre protones se hacen viajando unos en una dirección y sentido y los otros en la misma dirección y sentido contrario, así el centro de masas se encuentra en reposo respecto del sistema inercial y no existe energía adscrita al centro de masas.

28.- Un mesón K+ , en reposo, se desintegra en dos piones, uno con carga positiva y el otro sin carga

$$K^{+} \rightarrow \pi^{+} + \pi^{o}$$

Calcular la velocidad del pión positivo, a partir de los siguientes datos :

$$m_{K+}c^{2} = 493{,}9 \ MeV \quad ; \quad m_{\pi+}c^{2} = 139{,}6 \ MeV \quad ; \quad m_{\pi o}c^{2} = 135{,}0 \ MeV$$

Teniendo presente que el kaón se encuentra en reposo los dos piones se moverán en la misma dirección y sentido contrario y como ha de conservarse la cantidad de movimiento, los respectivos módulos de la cantidad de movimiento de las dos partículas son iguales.

Aplicamos el invariante relativista $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$ a cada uno de los piones y usamos el hecho anterior respecto a la cantidad de movimiento

$$p^2c^2 = E_{\pi+}^2 - m_{\pi+}^2c^4 = E_{\pi o}^2 - m_{\pi o}^2c^4$$

La conservación de la energía en el proceso nos permite escribir:

$$E_{K+} = E_{\pi+} + E_{\pi o} \quad \Rightarrow \quad E_{\pi o} = E_{K+} - E_{\pi+}$$

Combinando ambas ecuaciones:

$$E_{\pi+}^2 - m_{\pi+}^2c^4 = \left(E_{K+} - E_{\pi+}\right)^2 - m_{\pi o}^2\ c^4 \Rightarrow E_{\pi+}^2 - m_{\pi+}^2c^4 = E_{K+}^2 + E_{\pi+}^2 - 2E_{K+}E_{\pi+} - m_{\pi o}^2\ c^4$$

$$\Rightarrow\ E_{\pi+} = \frac{E_{K+}^2 + m_{\pi+}^2c^4 - m_{\pi o}^2\ c^4}{2E_{K+}} = \frac{493{,}9^2 + 139{,}6^3 - 135{,}0^2}{2 \cdot 493{,}9} = 248{,}2\ \mathrm{MeV}$$

La energía cinética del pión positivo vale:

$$T = E_{\pi+} - m_{\pi+}c^2 = 248{,}2 - 139{,}6 = 108{,}6\ \mathrm{MeV}$$

Para calcular la velocidad del pión hacemos uso de la expresión de la energía cinética en forma clásica

$$\frac{1}{2}m_{\pi+}v^2 = 108{,}6\ \mathrm{MeV} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot 108{,}6\,\mathrm{MeV}}{\frac{139{,}6}{c^2}\mathrm{MeV}}} = c\sqrt{\frac{2 \cdot 108.6}{139{,}6}} = 1{,}25c$$

El resultado es imposible ya que la velocidad supera la de la luz. Debemos emplear la teoría de la relatividad.

$$E_C = (m - m_o)c^2 = m_o\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)c^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E_c}{m_o c^2} + 1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\frac{E_c}{m_o c^2}+1} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{\frac{E_c}{m_o c^2}+1}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{E_c}{m_o c^2}+1}\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\frac{108,6}{139,6}+1}\right)^2} = 0,83 \quad \Rightarrow \quad v = 0,83c$$

29.- La pérdida de potencia de una partícula no relativista de carga q y con aceleración a, está expresada mediante la ecuación de Larmor

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^2}{3c^3}a^2 = k a^2$$

Si la partícula de carga q penetra perpendicularmente en un campo magnético constante de inducción B= 1 T, encontrar la ecuación que exprese la variación de la velocidad de la partícula con el tiempo. Calcular en cuánto tiempo un protón y un electrón reducen su velocidad inicial a la mitad.

Datos: q= 1,60.10^{-19} C (+ para el protón y - para el electrón)

c =3,0.10 ^{8} m/s ; ε_o=8,85.10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^{2}

Masa del protón=1,67.10^{-27} kg

Masa del electrón=9,11.10^{-31} kg

La partícula cargada al penetrar en el campo magnético experimenta una fuerza perpendicular a su vector velocidad, $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares, adquiere una aceleración centrípeta según la siguiente ecuación:

$$qvB = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{qvB}{m}$$

Como la partícula cargada se encuentra acelerada pero se halla libre, entonces, no está en un estado cuántico estacionario y por lo tanto radia energía de acuerdo con la ecuación de Larmor, lo cual lleva aparejado una pérdida de potencia.

$$P = \frac{dE}{dt} = -k\frac{q^2B^2}{m^2}v^2 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2q^4B^2}{3c^3m^2}v^2 = -K v^2$$

La pérdida de energía se traduce en una disminución de su velocidad

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad dE = \frac{1}{2}m\,2v\,dv = m\,v\;dv \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m\,v\,dv}{dt} = -K v^2 \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{K}{m}dt \quad \Rightarrow \quad \ln v = -\frac{K}{m}t + Cte$$

Para calcular la Cte tenemos en cuenta que cuando el tiempo es cero, la partícula penetra en el campo magnético con una velocidad inicial que designamos con v_o.

$$\ln v = -\frac{K}{m}t + \ln v_0 \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{v}{v_o} = -\frac{K}{m}t \quad \Rightarrow \quad v = v_0 e^{-\frac{K}{m}t}$$

Calculamos el valor de K/m para el protón:

$$\left(\frac{K}{m}\right)_P = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^4B^2}{2c^3m^3} = \frac{\left(1{,}60.10^{-19}\right)^4 \cdot 1^2}{2\pi \cdot 8{,}85.10^{-12} \cdot \left(3{,}0.10^8\right)^3 \cdot \left(1{,}67.10^{-27}\right)^3} = 9{,}37.10^{-11}$$

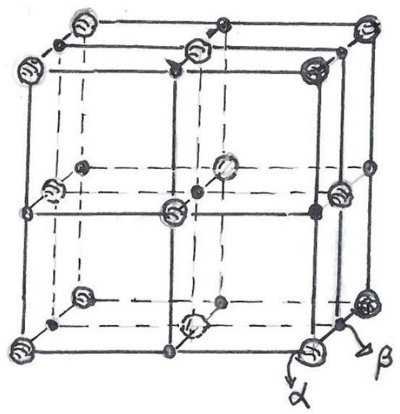
$$\frac{v_o}{2} = v_o\, e^{-9{,}37.10^{-11}t} \quad \Rightarrow \quad \ln 0{,}5 = -9{,}37.10^{-11}\,t \Rightarrow t = \frac{0{,}693}{9{,}37.10^{-11}} = 7{,}4.10^{9}\,s$$

Calculamos el valor de K/m para el electrón:

$$\left(\frac{K}{m}\right)_P = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q^4B^2}{2c^3m^3} = \frac{\left(1{,}60.10^{-19}\right)^4 \cdot 1^2}{2\pi \cdot 8{,}85.10^{-12} \cdot \left(3{,}0.10^8\right)^3 \cdot \left(9{,}11.10^{-31}\right)^3} = 0{,}577$$

$$\frac{v_o}{2} = v_o\, e^{-0{,}577\,t} \quad \Rightarrow \quad \ln 0{,}5 = -0{,}577\,t \Rightarrow t = \frac{0{,}693}{0{,}577} = 1{,}2\,s$$

30.- El cloruro de sodio cristaliza en una red cúbica centrada en las caras como indica la figura. Las esferas mayores representan los iones cloruro y las menores los cationes sodio



Sobre la cara α de un monocristal de cloruro de sodio se hace incidir un haz estrecho de rayos X bajo un ángulo de 60º Por reflexión especular se forma un máximo de segundo orden. Sabiendo que la densidad del cristal es 2,16 g/cm^3 que las masas de los iones son Cl^- = 35,5 g/mol y Na^+ =23,0 g/mol y que el número de Avogadro es N =6,02.10^{23} , calcular la longitud de onda de los rayos X.

Para calcular la longitud de onda de los rayos X debemos utilizar la ley de Bragg

$$2\ d\ \mathrm{sen}\,\theta = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2\ d\ \mathrm{sen}\,\theta}{n}$$

La distancia d corresponde a la que existe entre los planos delantero de la cara y el siguiente hacia dentro. Si L es la longitud del cubo unidad, entonces d = L/2.

Observando la figura del enunciado, se deduce que hay ocho iones cloruro en los vértices y cuatro en el centro de las caras. Los iones del vértice pertenecen a 8 celdas y los del centro de las caras a dos, por tanto para la celdilla unidad existen cuatro iones Cl^-.
Los iones Na^+ ocupan los centros de las aristas y en total son 12 y uno que está en el centro. Cada ión Na^+ de una arista se comparte con otras cuatro, por tanto el número total de iones sodio en una celda son: 12/4 más el del centro, en total 4 iones sodio.
El volumen de la celda y su masa son respectivamente:

$$V = \frac{m}{\rho} = L^3 \quad ; \quad L = \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$$

La masa de los cuatro iones cloro es : $\dfrac{4\cdot 35{,}5}{N} = 2{,}36.10^{-22}\,\mathrm{g}$

La masa de la celda unidad es:

$$m=(2{,}36+1{,}53)10^{-22}=3{,}89.10^{-22}\ \text{g}$$

Calculamos la longitud L de la celda

$$L=\sqrt[3]{\frac{3{,}89.10^{-22}\ \text{g}}{2{,}16\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}}=5{,}65.10^{-8}\,\text{cm}$$

$$\lambda=\frac{2\cdot\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\theta}{n}=\frac{5{,}65.10^{-8}\cdot\text{sen}\,60}{2}=2{,}45.10^{-8}\,\text{cm}$$