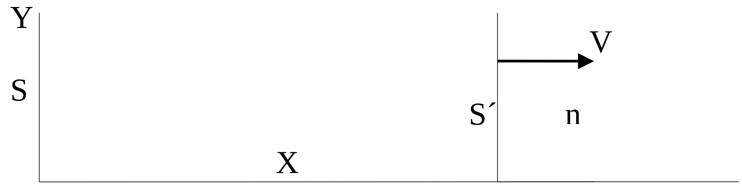
31-.**(323) **Un sistema de referencia S´ se desplaza respecto de un sistema inercial S con una velocidad V<< c, tal como se indica en la figura. El índice de refracción del sistema S´ es n. Un rayo de luz se desplaza por S´ en la misma dirección y sentido que V. Calcular la velocidad del rayo de luz medida por un observador ligado al sistema S.



En el sistema S´ la luz viaja en un medio distinto al vacío y esto supone que su velocidad es inferior a la del vacío c. Si la velocidad de la luz en el medio es c´ según la definición de índice de refracción

$$c' = \frac{c}{n}$$

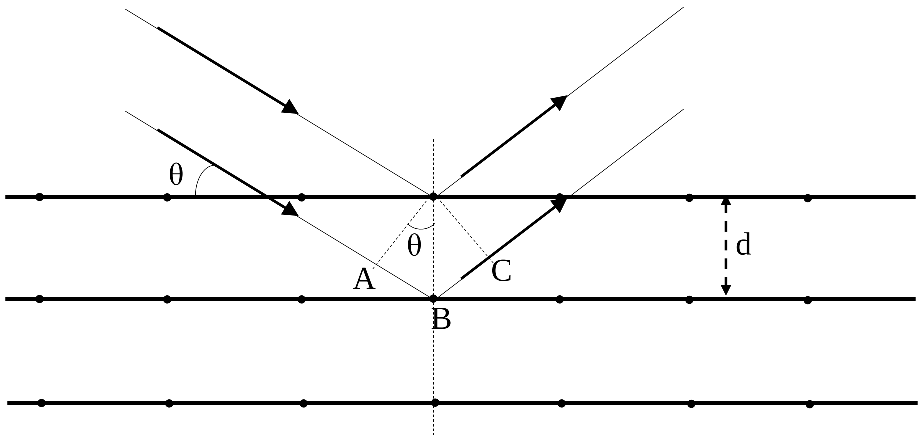
Designamos con u la velocidad del rayo medida por el observador situado en S. La relación relativista de velocidades es:

$$u = \frac{c' + V}{1 + \frac{V c'}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V c}{n c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{n c}} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{n c}\right)}{\left(1 + \frac{V}{n c}\right)\left(1 - \frac{V}{n c}\right)} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{n c}\right)}{1 - \frac{V^2}{n^2 c^2}}$$

Como V<<c el termino del denominador se puede aproximar a la unidad, entonces.

$$u = \left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{n c}\right) = \frac{c}{n} + V - \frac{c V}{n^2 c} - \frac{V^2}{n c} \approx \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

32-(329) ***Un haz de electrones monoenergéticos incide sobre la cara de un cristal con un ángulo θ=30º. Este ángulo se forma entre la dirección del haz y el plano cristalino, tal como indica la figura inferior. La distancia entre los planos cristalinos es d=0,20 nm. Si los electrones se aceleran desde el reposo con una tensión U, se observa un máximo en la reflexión especular. El siguiente máximo en esa reflexión se produce cuando la tensión de aceleración es: nU = 2,25 U . Determinar el valor de U.***
Datos. Constante de Planck = 6,63.10^{-34} Js; masa del electrón m=9,11.10^{-31} kg , carga del electrón q = 1,602.10^{-19} C



En la figura del problema se observa que el haz incidente en la cara cristalina y el reflejado en el plano cristalino inferior tienen una diferencia de marcha de

$$AB + BC = 2\,d\,\mathrm{sen}\theta$$

Si esta diferencia de marcha es un múltiplo entero de la longitud de onda de los electrones se producirá un máximo (ley de Braag).

$$2\,d\,\mathrm{sen}\,\theta = k\lambda$$

El siguiente máximo se produce cuando

$$2\,d\,\mathrm{sen}\,\theta = k'\lambda' = (k+1)\lambda' \quad \Rightarrow \quad k\,\lambda = (k+1)\lambda' \;\Rightarrow\; \frac{k+1}{k} = \frac{\lambda}{\lambda'} \;\; (1)$$

Las longitudes de onda de los electrones están determinadas por la teoría de De Broglie que establece la dualidad onda corpúsculo

$$\lambda = \frac{h}{mv} \;; \qquad \lambda' = \frac{h}{m\,v'}$$

h es la constante de Planck, *m* la masa del electrón; *v* y *v´* sus velocidades, las cuales dependen de la tensión con que se han acelerado los electrones. Igualamos el trabajo eléctrico con la energía cinética adquirida por los electrones

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV \quad \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{2qnU}{m}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2qU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2qmU}} \quad ; \quad \lambda' = \frac{h}{\sqrt{2qmnU}}$$

Sustituyendo en (1)

$$1 + \frac{1}{k} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2qmU}}}{\frac{h}{\sqrt{2qnmU}}} = \sqrt{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k} = \sqrt{n} - 1 \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d\,\mathrm{sen}\,\theta = k\lambda \quad \Rightarrow 2d\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{n} - 1} \cdot \frac{h}{\sqrt{2qmU}} \quad \Rightarrow U = \frac{h^2}{8\left(\sqrt{n} - 1\right)^2 q\,m\,d^2\,\mathrm{sen}^2\theta} \Rightarrow$$

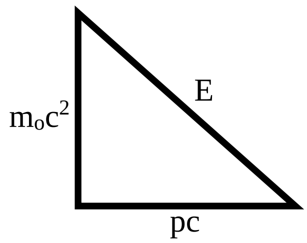
$$\Rightarrow \quad U = \frac{\left(6{,}63.10^{-34}\right)^2}{8\left(\sqrt{2{,}25} - 1\right)^2 \cdot 1{,}602.10^{-19} \cdot 9{,}11.10^{-31} \cdot \left(0{,}20.10^{-9}\right)^2 \cdot \mathrm{sen}^2 30} = 151 \text{ V}$$

33.-Una partícula relativista con carga Q y masa en reposo m_o, describe una trayectoria circular de radio R en el seno de un campo magnético uniforme de inducción B. Determinar a) su cantidad de movimiento, b) su energía cinética y c) su aceleración en función de las constantes anteriores.

a) La fuerza centrípeta que necesita la partícula para describir el círculo es la fuerza magnética de interacción entre el campo magnético y la carga de la partícula $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$; que al estar siempre dirigida hacia el centro del círculo por ser perpendicular al vector velocidad, actúa como una fuerza centrípeta, cuyo módulo se puede expresar por mv^2/R. Igualando esta expresión con el módulo de la fuerza magnética resulta:

$$\frac{m\,v^2}{R} = Q\,vB \Rightarrow m\,v = Q\,B\,R \quad (1)$$

Siendo p = m v el momento lineal de la partícula, $p = QBR$



Triángulo que permite recordar la relación entre las energías de una partícula, mediante el teorema de Pitágoras.

b) La energía de una partícula relativista es la suma de su energía en reposo más su energía cinética

$$E = m_o\,c^2 + E_c$$

Recurrimos al invariante relativista: $E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4$

A partir de las dos ecuaciones anteriores.

$$E_c = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4} - m_oc^2 = \sqrt{(QBR)^2\,c^2 + m_o^2c^4} - m_oc^2 = \sqrt{\frac{(QBR)^2}{m_o^2c^2}\,m_o^2c^4 + m_o^2c^4} - m_oc^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_C = m_oc^2\left[\sqrt{\left(\frac{Q\,B\,R}{m_o\,c}\right)^2 + 1} - 1\right]$$

c) La aceleración centrípeta es: $a_c = \frac{v^2}{R}$. A partir de la ecuación (1) y utilizando la ecuación relativista de la masa, vamos a determinar primero el valor de la velocidad.

$$v = \frac{QBR}{m} = \frac{QBR}{\frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{QBR}{m_o}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \left(\frac{QBR}{m_o}\right)^2 \Rightarrow \frac{v^2c^2}{c^2-v^2} = \left(\frac{QBR}{m_o}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{c^2-v^2}{v^2c^2} = \left(\frac{m_o}{QBR}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \left(\frac{m_o}{QBR}\right)^2 + \frac{1}{c^2} = \frac{m_o^2c^2+(QBR)^2}{(QBRc)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{(QBRc)^2}{m_o^2c^2+(QBR)^2}$$

El valor de la aceleración centrípeta es :

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(QBRc)^2}{\left[m_o^2c^2+(QBR)^2\right]R} = \frac{\frac{c^2}{R}}{\left[\frac{m_o^2c^2+(QBR)^2}{(QBR)^2}\right]} = \frac{\frac{c^2}{R}}{\left(\frac{m_oc}{QBR}\right)^2+1}$$

34.-**(352) **Un satélite geoestacionario se encuentra a una altura de H=35786 km sobre la superficie terrestre. Hallar la variación relativa de la frecuencia de la onda de radio del satélite debido al campo gravitatorio terrestre. Radio de la Tierra = 6,38.10^6 m

Designamos con f_H la frecuencia de la radio situada en el satélite y con f_T la frecuencia recibida en la Tierra.
Los fotones carecen de masa pero poseen energía según la teoría de la Relatividad, por tanto, es posible asignarle una masa

$$m c^2 = hf_H \quad \Rightarrow \quad m = \frac{hf_H}{c^2}$$

Establecemos una relación entre las energías del fotón en su órbita y en la superficie terrestre.

$$-G\frac{M_T m}{R_T + H} + hf_H = -G\frac{M_T m}{R_T} + hf_T \quad \Rightarrow \quad f_T - f_H = \frac{GM_T m}{h}\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + H}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_T - f_H = \frac{G M_T}{h}\frac{h f_H}{c^2}\frac{H}{R_T(R_T + h)}$$

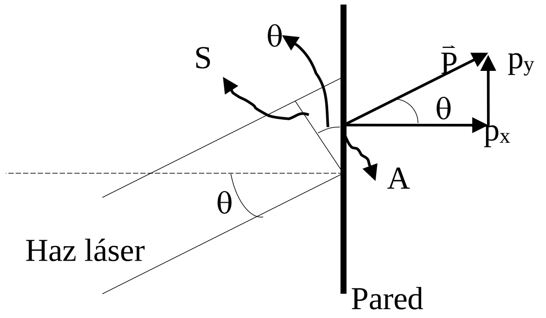
Si g representa la intensidad del campo gravitatorio en la superficie terrestre: $g = \dfrac{G M_T}{R_T^2}$

$$f_T - f_H = \frac{g R_T^2}{h}\frac{h f_H}{c^2}\frac{H}{R_T(R_T + h)} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_T - f_H}{f_H} = \frac{g R_T H}{c^2(R_T + h)} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{f_T - f_H}{f_H} = \frac{9{,}8 \cdot 6{,}38.10^6 \cdot 35786.10^3}{(2{,}89.10^8)^2(6{,}38.10^6 + 35786.10^3)} = 6{,}4.10^{-10}$$

35.-**(355) **Un haz de luz procedente de un láser de intensidad I=0,2 W/cm^2 incide sobre una pared vertical formando un ángulo de 45 º. Calcular la presión ejercida por el haz si, a) la pared refleja totalmente el haz b) la pared absorbe el haz. En el caso a) representar la presión frente al ángulo de incidencia.

En la figura inferior el haz del láser incide sobre la pared formando una superficie que denominamos A. Esa superficie proyectada en dirección normal al haz da lugar a una superficie de valor numérico $S= A \cos\theta$



El haz de láser está formado por fotones cada un o de ellos con una energía E. La intensidad del haz es energía por unidad de área normal al haz y unidad de tiempo. Si N representa el número de fotones que atraviesan la superficie S en un tiempo Δt, se deduce que

$$I = \frac{NE}{S\Delta t} = \frac{nE}{S} = \frac{nE}{A\cos\theta} \quad (1)$$

Siendo n el número de fotones que atraviesan la superficie en cada unidad de tiempo (segundo).

Cada fotón del haz lleva consigo una cantidad de movimiento de valor numérico $\frac{E}{c}$, si en un tiempo $\Delta\tau$ llegan a la superficie A n´ fotones, el valor numérico de la cantidad de movimiento es:

$$P = \frac{n´E}{c} = \frac{n\Delta\tau\, E}{c}$$

La ecuación anterior nos da el valor del modulo de la cantidad de movimiento. El vector $\vec{P}$ tiene dos componentes, una de módulo p_x en dirección horizontal, por tanto, perpendicular a la pared, y otra p_y paralela a la pared.

$$p_x = \frac{n\Delta\tau E}{c}\cos\beta \;\; ; \;\; p_y = \frac{n\Delta\tau E}{c}\operatorname{sen}\beta$$

Si la pared refleja totalmente el haz, éste rebota formando un ángulo θ, en el rebote aparecen dos componentes, una horizontal dirigida hacia la izquierda y otra paralela dirigida hacia abajo, en consecuencia, la componente paralela a la pared se anula y la variación de la cantidad de movimiento es 2 p_x.

$$\Delta P = \frac{2n\Delta\tau\, E}{c}\cos\beta$$

La fuerza sobre el área de la pared A es:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta \tau} = \frac{2\,n\,E}{c}\cos\beta$$

Y la presión

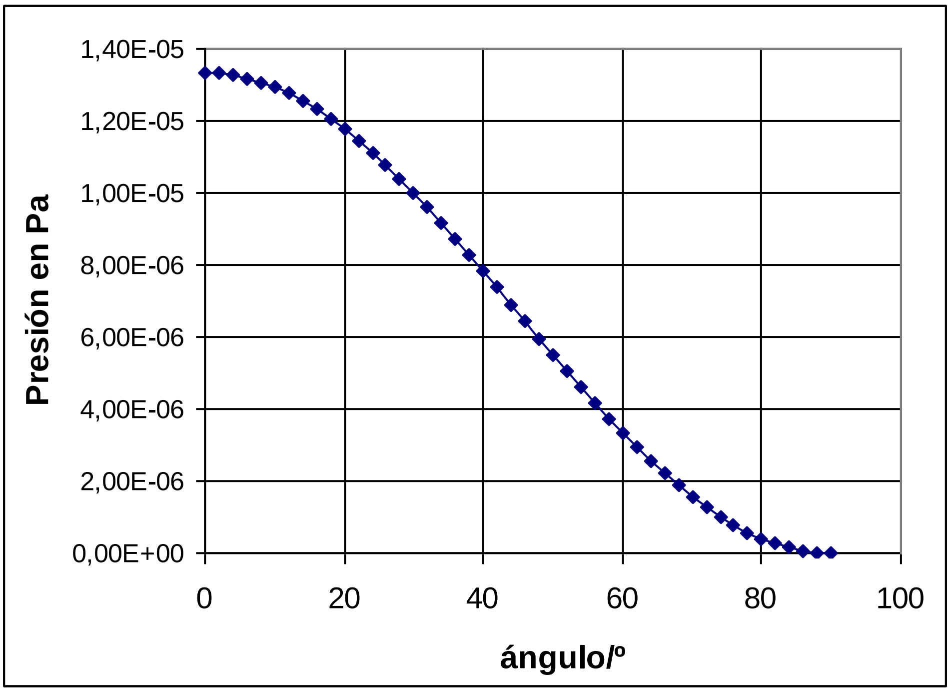
$$\text{Presión} = \frac{F}{A} = \frac{2\,n\,E}{cA}\cos\beta \quad (2)$$

De la ecuación (1) despejamos E: $E = \dfrac{I\,A\cos\beta}{n}$ y lo sustituimos en (2)

$$\text{Presión} = \frac{2\,n\dfrac{IA\cos\beta}{n}}{cA}\cos\beta = \frac{2\,I\cos^2\beta}{c} \quad (3)$$

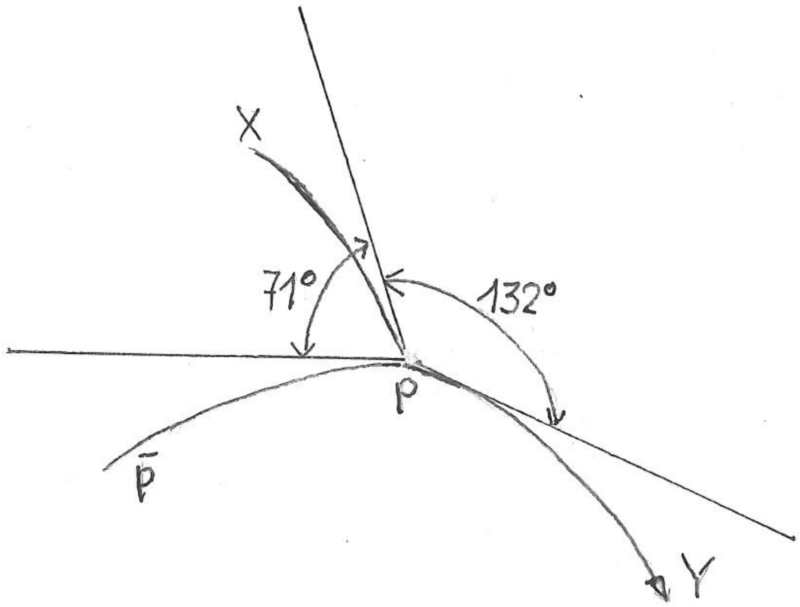
Si la pared absorbe el haz aparecerá una fuerza que tiene dos componentes una sobre la dirección horizontal y otra sobre la dirección vertical. Esta última no ejerce presión sobre la pared y solamente la ejerce la componente horizontal, por tanto, la variación de la cantidad de movimiento es p_x, la mitad que en el caso anterior, luego la presión es también la mitad.

Para construir la gráfica, basta dar valores al ángulo β en la ecuación (3)



Ricardo David Fernández Cruz José Luis Hernández Pérez

36.-(360)***- El esquema de la figura inferior corresponde a una fotografía realizada en una cámara de burbujas. Un antiprotón colisiona con un protón que se encuentra en reposo. El resultado es la aparición de dos partículas X e Y, detectadas por la cámara de burbujas. Las líneas rectas que aparecen en la figura indican las direcciones de las velocidades de las partículas en el punto de impacto y la curvatura es debida a la presencia del campo magnético.***
Los radios de curvatura de las trayectorias son: antiprotón = 4 m , X= 1,5 m, e Y = 5,0 m. La cantidad de movimiento del antiprotón es 1497MeV/c.



a) Probar que en el proceso se origina una tercera partícula Z y calcular su cantidad de movimiento.
b) Comprobar si es razonable que en el proceso se produzca un mesón (π^+), un mesón (π^-) y un mesón (π^o).
c) Calcular la velocidad de las partículas.
Dato: masa del protón 938 MeV/c²; Masa del (π^+)=masa del (π-) =140 MeV/c²; Masa del (π^o)= 135 MeV/c²

En problemas de colisiones de partículas es frecuente expresar la cantidad de movimiento en MeV/c y la masa de las partículas por MeV/c^2**.**
La razón es la siguiente:
De acuerdo con la teoría de la relatividad

$$E = m c^2 \;\Rightarrow\; m = \frac{E}{c^2} \;;\; p = mv \;;\; E = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow p \approx m\sqrt{\frac{E}{m}} = \sqrt{E\,m} = \sqrt{E\cdot\frac{E}{c^2}} = \frac{E}{c}$$

Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento. Consideramos dos ejes coordenados cartesianos. El eje X tiene la dirección de la velocidad del antiprotón y dirigido hacia la derecha y el eje Y es perpendicular al anterior en el punto donde se encuentra el protón en reposo. La partícula Y forma con el eje X un ángulo de 71º y con el eje Y , 90-71= 19º.La partícula Y forma con el eje X un ángulo de 132-19-90= 23º.

$$1497 = -p_X \cos 71º + p_Y \cos 23º + p_Z(X) \quad \Rightarrow \quad p_X \cos 19º = p_Y \mathrm{sen} 23º + p_Z(Y) \quad (1)$$

Para calcular la cantidad de movimiento de las partículas X e Y hacemos uso de la interacción de dichas partículas con el campo magnético de la cámara de burbujas. Igualamos la fuerza magnética con la centrípeta

$$F = qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m\,v}{q\,B} = \frac{p}{qB} \Rightarrow q\,B = \frac{p}{R}$$

Aplicando para el antiprotón resulta: $qB = \dfrac{1497}{4}$ (2)

Para identificar las cargas de X e Y observamos la trayectoria: X debe tener carga positiva e Y negativa. La partícula Z carece de carga ya que no deja rastro en la cámara de burbujas. La suma de las cargas del antiprotón y del protón es cero, luego la carga de las partículas X e Y es la misma en valor absoluto, una positiva y otra negativa. Es razonable suponer que ambas partículas tengan la misma carga que la del protón y la del antiprotón, pues en estas colisiones no se forman partículas con doble carga.
La ecuación (2) nos vale para X e Y.

$$\frac{1497}{4} = \frac{p_X}{1{,}5} \Rightarrow p_X = 561\frac{\text{MeV}}{c} \quad ; \quad \frac{1497}{4} = \frac{p_Y}{5} \Rightarrow p_Y = 1871\frac{\text{MeV}}{c}$$

Volviendo a las ecuaciones (1)

$$1497 = -561 \cdot \cos 71º + 1871 \cdot \cos 23º + p_Z(X) \quad \Rightarrow \quad p_Z(X) = -43\frac{\text{MeV}}{c}$$

$$561 \cdot \cos 19º = 1871 \cdot \mathrm{sen} 23º + p_Z(Y) \Rightarrow \quad p_Z(Y) = -201\frac{\text{MeV}}{c}$$

$$\Rightarrow \; p_Z = \sqrt{201^2 + 43^2} = 206\frac{\text{MeV}}{c}$$

b) Para comprobar si la hipótesis es plausible hacemos uso del principio de conservación de la energía – masa: $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

$$E(\bar{p}) = \sqrt{1487^2\left(\frac{MeV}{c}\right)^2\cdot c^2 + 938^2\left(\frac{MeV}{c^2}\right)^2\cdot c^4} = \sqrt{1487^2+938^2} = 1758\ MeV$$

$$E(p) = 938\,MeV$$

$$E(\pi^+) = \sqrt{561^2+140^2} = 578 MeV$$

$$E(\pi^-) = \sqrt{1871^2+140^2} = 1876\,MeV$$

$$E(\pi^o) = \sqrt{206^2+135^2} = 246\,MeV$$

Partículas incidentes = 1758+938=2696 MeV

Partículas formadas= 578+1876+246=2700 MeV

Como la diferencia es muy pequeña y está dentro de los errores que se cometen, la hipótesis es plausible.

c) Expresamos la cantidad de movimiento según la teoría de la relatividad

$$p = \frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m\,v\,c}{\sqrt{c^2-v^2}} \Rightarrow p^2 = \frac{m^2v^2c^2}{c^2-v^2} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{c^2-v^2}{m^2v^2c^2} = \frac{1}{m^2v^2} - \frac{1}{m^2c^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m^2v^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{m^2c^2} = \frac{p^2+m^2c^2}{p^2m^2c^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{p^2+m^2c^2}{p^2c^2} \Rightarrow \quad v^2 = \frac{p^2c^2}{p^2+m^2c^2} = \frac{p^2c^4}{p^2c^2+m^2c^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{p\,c^2}{E}\,(3)$$

Aplicamos la ecuación (3)

$$v(\pi^+) = \frac{561\frac{MeV}{c}\cdot c^2}{578\,MeV} = 0{,}97c\ ;\ v(\pi^-) = \frac{1871\frac{MeV}{c}\cdot c^2}{1876\,MeV} = 0{,}997c\ ;\ v(\pi^o) = \frac{206\frac{MeV}{c}\cdot c^2}{246\,MeV} = 0{,}84c$$

37.-**(362)**- Comprobar que si un fotón incide sobre un electrón en reposo es imposible que toda la energía del fotón se transmita íntegramente al electrón.

Designamos con ν_o la frecuencia del fotón y tomamos el sistema de referencia ligado al electrón que se encuentra en reposo. La energía del fotón es: $h\nu_o$.
La energía del electrón es la energía cinética que adquiere por el impacto del fotón:

$$E_e = (m - m_o)c^2 = \left(\frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_o \right) c^2 = m_o c^2 (\gamma - 1)$$

Siendo v la velocidad del electrón después del impacto y $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Si toda la energía del fotón se transfiriese al electrón, podríamos escribir:

$$h\nu_o = m_o c^2 (\gamma - 1) \quad (1)$$

Por la conservación de la cantidad de movimiento

$$\frac{h\nu_o}{c} = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = m_o v \gamma \quad \Rightarrow \quad h\gamma_o = m_o c \cdot v \cdot \gamma \quad (2)$$

Igualando (1) y (2).

$$m_o c^2 (\gamma - 1) = m_o c \cdot v \cdot \gamma \Rightarrow \quad c(\gamma - 1) = v\gamma \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} = 1 - \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v}{c} = 1 - \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \Rightarrow \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)\right]^2 = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow 1 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 2\left(\frac{v}{c}\right) = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 2\left(\frac{v}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = 1$$

Si se transfiriese toda la energía, la velocidad del electrón sería igual a la de la luz, lo cual está en contradicción con la teoría de la relatividad. Por tanto, en el proceso descrito, solamente una parte de la energía del fotón se transmite al electrón; es el efecto Compton relativista.

38.-(365)***- La energía mínima de excitación del átomo de helio es 21,1 eV. Supongamos que un átomo de helio está en reposo en el sistema del laboratorio (sistema L) y sobre él: a) choca un protón dotado de una energía de 24 eV; b) un electrón con la misma energía. Mostrar si en estos choques es posible que se produzca una colisión inelástica, la cual llevaría al átomo de helio a un estado excitado.***

En una colisión elástica se transfiere en bloque la energía de excitación desde la partícula incidente a la de reposo, por tanto, para que esto ocurra la energía de la partícula en movimiento tiene que ser mayor que la energía de excitación. Si la energía de la partícula incidente es menor que la energía de excitación el choque es inelástico.
Pero la condición anterior no es suficiente para que pueda producirse un choque elástico, pues en el proceso intervienen las masas de las partículas, tanto la incidente como la de reposo.
En el problema que nos ocupa se cumple la condición de la energía, ya que la del protón como la del electrón superan a la energía de excitación del átomo de helio.

Designamos con la letra Y a la partícula incidente; en el problema Y representa o al protón o al electrón, con B al blanco en reposo, esto es, al átomo de helio en su estado fundamental, siendo E_F esa energía y Ex en el estado excitado

$$\Delta E = E_X - E_F = 21{,}1 \ \ \mathrm{eV}$$

P_Y es la cantidad de movimiento de la partícula incidente y P_B=0 de la partícula en reposo antes del choque. Después del choque las cantidades de movimiento las escribimos como $P_Y^{\prime}$ y $P_B^{\prime}$.
En el choque se conserva la cantidad de movimiento

$$\vec{P}_Y = \vec{P}_Y^{\prime} + \vec{P}_B^{\prime}$$

El balance de energía conduce a

$$\frac{1}{2m}P_Y^2 + E_F = \frac{1}{2m}\left(P_Y^{\prime}\right)^2 + \frac{1}{2M}\left(P_B^{\prime}\right)^2 + E_X \Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2m}\left(P_Y^{\prime}\right)^2 + \frac{1}{2M}\left(P_B^{\prime}\right)^2 + \Delta E \qquad (1)$$

En la ecuación anterior m es la masa de la partícula incidente (protón o electrón) y M la masa del átomo de helio. Se ha utilizado la expresión de la energía cinética en función de la cantidad de movimiento: $\frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2m}(m\,v)^2 = \frac{1}{2\,m}p$.

La energía cinética mínima del proyectil para verificar el proceso es aquella que tanto la partícula incidente como el blanco se encuentren en reposo en le sistema C (del centro de masa) después de la colisión, ya que en este caso no hay energía cinética de las partículas.
Si v representa la velocidad de la partícula incidente y v_{CM} la del centro de masas, antes del choque ocurrirá que

$$v_{CM} = \frac{m\,v}{m + M}$$

Sustituyendo términos de la ecuación (1)

$$P'_Y = m\,v_{CM} = m\frac{m\,v}{m+M} = \frac{m\,P_Y}{m+M} \quad ; \quad P'_B = M\,v_{CM} = \frac{M\,P_Y}{m+M}$$

La ecuación (1) queda ahora

$$\frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2m}\frac{m^2P_Y^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2M}\frac{M^2P_Y^2}{(m+M)^2} + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{mP_Y^2}{(m+M)^2} + \frac{1}{2}\frac{MP_Y^2}{(m+M)^2} + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{P_Y^2}{(m+M)^2}(m+M) + \Delta E \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}P_Y^2 = \frac{1}{2}\frac{P_Y^2}{m+M} + \Delta E \Rightarrow \frac{P_Y^2}{2}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+M}\right) = \Delta E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_Y^2}{2m}\left(\frac{M}{m+M}\right) = \Delta E \;\Rightarrow\; \frac{P_Y^2}{2m} = \left(\frac{m+M}{m}\right)\Delta E \quad \Rightarrow \quad E_c = \left(1+\frac{m}{M}\right)\Delta E \quad (2)$$

Para el protón la relación $\frac{m}{M} \approx \frac{1}{4}$, luego la energía cinética mínima para producir una colisión inelástica es: 1,25*21,1 =31,7 eV, como solamente lleva 24 eV, el protón no producirá ese proceso.

Para el electrón la relación $\frac{m}{M} \approx \frac{1}{8000}$, puesto que aproximadamente un electrón tiene una masa 2000 veces menor que la del protón, luego la energía cinética mínima es: $\left(1+\frac{1}{8000}\right)\cdot 21{,}1 \approx 21{,}1\,\text{eV}$, como el electrón posee una energía cinética 24 eV puede producir ese proceso de excitación del átomo de helio.

39. (399.)- ***Sobre un espejo plano de masa m_o incide perpendicularmente un haz de rayos láser, siendo E_i la energía de los fotones del haz. Determinar***
a) La velocidad que adquiere el espejo
b) La energía que se refleja en él.

a) El espejo recibe el haz y parte lo refleja en sentido contrario a la marcha del haz incidente y el espejo adquiere una velocidad en el sentido del movimiento del haz incidente.

Hacemos un balance de energía, designando a la energía del haz reflejado como E_r, c, a la velocidad de la luz y v, a la del espejo.

$$E_i + m_o c^2 = E_r + \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (1)$$

Aplicamos el principio de conservación de la cantidad de movimiento recordando que $p = \frac{E\,v}{c^2}$

$$\frac{E_i}{c} = -\frac{E_r}{c} + \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v}{c^2} \Rightarrow \frac{E_i}{c} = -\frac{E_r}{c} + \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow E_r = \frac{m_o v c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_i \quad (2)$$

El signo menos que aparece en el momento del rayo reflejado es porque camina en sentido contrario al haz incidente. Sustituimos (2) en (1).

$$E_i + m_o c^2 = \frac{m_o v c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_i = \frac{m_o c(v+c)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - E_i = \frac{m_o c^2(v+c)}{\sqrt{c^2-v^2}} - E_i \Rightarrow$$

$$E_i + m_o c^2 = \frac{m_o c^2(v+c)}{\sqrt{(c+v)(c-v)}} - E_i \qquad \Rightarrow \quad 2E_i + m_o c^2 = m_o c^2\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2E_i}{m_o c^2} + 1 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \Rightarrow \left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 = \frac{c+v}{c-v} \Rightarrow c\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 - v\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 = c+v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\left[\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 - 1\right] = v\left[\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 + 1\right] \Rightarrow \qquad v = c\,\frac{\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 - 1}{\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 + 1} \quad (3)$$

a) A partir de la ecuación (2)

$$E_r + E_i = \frac{m_o v c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_r + E_i}{vc} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Sustituimos en la ecuación (1)

$$E_i + m_o c^2 = E_r + c^2 \frac{E_r + E_i}{vc} \Rightarrow E_i + m_o c^2 - E_r = \frac{c}{v}\left(E_r + E_i\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{E_r + E_i}{E_i + m_o c^2 - E_r} \; (4)$$

A partir de las ecuaciones (3) y (4)

$$\frac{\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 - 1}{\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 + 1} = \frac{E_r + E_i}{E_i + m_o c^2 - E_r}$$

Para operar de manera más cómoda hacemos: $\left(\frac{2E_i}{m_o c^2}+1\right)^2 = K$

$$\frac{E_r + E_i}{E_i + m_o c^2 - E_r} = \frac{K-1}{K+1} \Rightarrow E_r K + E_r + E_i K + E_i = E_i K - E_i - E_r K + E_r + m_o c^2 \left(K-1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_r K + E_i = -E_i - E_r K + m_o c^2 \left(K-1\right) \Rightarrow \quad 2E_r K = m_o c^2 \left(K-1\right) - 2E_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{m_o c^2 \left(K-1\right) - 2E_i}{2K} = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{m_o c^2}{2K} - \frac{E_i}{K} = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{m_o c^2 + 2E_i}{2K}$$

Sustituimos el valor de K

$$E_r = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{m_o c^2 + 2E_i}{2\left(\frac{2E_i}{m_o c^2} + 1\right)^2} = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{m_o c^2 + 2E_i}{2\left(2E_i + m_o c^2\right)^2} \cdot \left(m_o c^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{m_o c^2}{2} - \frac{\left(m_o c^2\right)^2}{2\left(2E_i + m_o c^2\right)} = \frac{\left(m_o c^2\right) \cdot \left(2E_i + m_o c^2\right) - \left(m_o c^2\right)^2}{2\left(2E_i + m_o c^2\right)} = \frac{2E_i \cdot m_o c^2}{2\left(2E_i + m_o c^2\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_r = \frac{E_i}{1 + \frac{2E_i}{m_o c^2}} \quad (5)$$

Si $E_i >> m_o c^2 \Rightarrow E_r = \frac{m_o c^2}{2}$; Si $E_i << m_o c^2 \Rightarrow E_r \approx E_i$

40. (403)-***Una partícula subatómica recientemente descubierta, es el mesón S de masa M. Cuando está en reposo su vida es $\tau = 3.10^{-8}$ s y se desintegra en dos partículas iguales llamadas P, cada una con una masa αM.***
a) En un sistema de referencia en el que el mesón S se encuentra en reposo determinar: I , la energía cinética, II, el momento , III, la velocidad
b) En un sistema de referencia en el que el mesón S viaja 9 metros entre su creación y desintegración calcular su velocidad y su energía cinética

Olimpiadas USA

a)-Cuando la partícula S está en reposo y se desintegra en dos partículas P se conserva la energía y el momento.

$$E_s = 2E_P$$

I.- La energía de S es la energía en reposo por tener masa $E_S = Mc^2$(c velocidad de la luz)

La energía de una partícula P es la suma de su energía por tener masa más la energía cinética por tener velocidad

$$E_P = \alpha Mc^2 + E_C \Rightarrow Mc^2 = 2\alpha Mc^2 + 2E_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{Mc^2(1-2\alpha)}{2} = Mc^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)$$

II.-Para calcular el momento hacemos uso de la ecuación relativista $E = c\sqrt{m_o c^2 + p^2}$, aplicándola a una de las partículas P.

$$\alpha Mc^2 + Mc^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right) = c\sqrt{\alpha^2 M^2c^2 + p^2} \Rightarrow \frac{Mc^2}{2} = c\sqrt{\alpha^2 M^2c^2 + p^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{M^2c^2}{4} = \alpha^2 M^2c^2 + p^2 \Rightarrow p^2 = \frac{M^2c^2}{4} - \alpha^2 M^2c^2 \Rightarrow p = Mc\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha^2}$$

III.- La ecuación relativista del módulo del momento es: $p = m(v)\cdot v = \dfrac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot v$

Aplicamos esta ecuación a una partícula P.

$$\frac{\alpha Mvc}{\sqrt{c^2-v^2}} = Mc\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha^2} \Rightarrow \frac{\alpha^2v^2}{c^2-v^2} = c^2\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right) \Rightarrow \frac{c^2-v^2}{\alpha^2v^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}-\alpha^2} \Rightarrow$$

$$\frac{c^2}{\alpha^2v^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\frac{1}{4}-\alpha^2} = \frac{\frac{1}{4}-\alpha^2+\alpha^2}{\alpha^2\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)} \Rightarrow \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{1-4\alpha^2} \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1-4\alpha^2}$$

b) El tiempo de vida de la partícula τ es el tiempo propio ya que se mide en un sistema en que la partícula está en reposo
Escribimos

$$v = \frac{d}{t}$$

Siendo t el tiempo impropio ya que se mide en un sistema en el que la partícula no está en reposo
La relación entre ambos tiempos es:

$$\tau = t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\,\tau \Rightarrow \quad v = \frac{d}{\gamma\,\tau} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{d^2}{\gamma^2\tau^2}$$

Recordemos que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2-v^2}} \quad \Rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{c^2}{c^2-v^2} \quad \Rightarrow v^2 = \frac{d^2\left(c^2-v^2\right)}{c^2\,\tau^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2\left(c^2\tau^2+d^2\right) = c^2\,d^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c\,d}{\sqrt{c^2\tau^2+d^2}} = \frac{3.10^8\cdot 9}{\sqrt{9.10^{16}\cdot 9.10^{-16}+9^2}} = \frac{3.10^8\cdot 9}{9\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

La energía cinética vale $E_C = m_o c^2\left(\gamma-1\right)$

$$E_C(S) = M\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c}}}-1\right) = M\,c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{c^2}{2\,c^2}}}-1\right) = M\,c^2\left(\sqrt{2}-1\right)$$