41. (412).- ***En algunas diagnosis médicas se precisa conocer el volumen de sangre del paciente. Un método consiste en preparar 1 cm³ de disolución de glóbulos rojos marcados con el isótopo ^{99}Tc de vida media 6 horas. Esta disolución se inyecta al paciente en su sistema circulatorio.. Al cabo de hora y media se toman 20 cm³ de su sangre y se determinan su actividad que resulta ser de 43,5 kBq. La actividad inicial de la muestra es de 15 MBq.***
1.- Calcular el volumen de sangre del paciente.
2.- Calcular los gramos del isótopo del tecnecio que se han empleado para preparar la disolución.
El isótopo del tecnecio es un beta emisor y en la energía promedio de los electrones emitidos es 0,3 MeV. La masa del paciente es 70 kg.
3.- ¿Cuál es la dosis de energía que ha recibido el paciente en el supuesto de que la totalidad de la radiación ha sido absorbida?
4.- ¿Cuál es la dosis equivalente? La radiación promedio de una persona debido a fuentes naturales en España es 3,7 mSv en un año. Compare este valor con la recibida por el paciente

1.- La desintegración radiactiva obedece a la siguiente ley exponencial

$$N = N_o e^{-\lambda t} \quad (1)$$

N_o es el número de átomos en el tiempo t=0 y N los que quedan al cabo de un tiempo t. La constante de desintegración λ depende del átomo radiactivo y está ligada a la vida media. La vida media es el tiempo que transcurre para que el número de átomos de una muestra radiactiva se reduzca a la mitad

$$\frac{N_o}{2} = N_o e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -\lambda e^{T_{1/2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\ln 0{,}5}{T_{1/2}} = -\frac{-0{,}693}{6\cdot 3660} = 3{,}21.10^{-5}\,s^{-1}$$

La actividad de una muestra radiactiva representa la variación con el tiempo del número de átomos que se desintegra de forma sencilla..

$$A = -\frac{dN}{dt} = -\frac{d\left[N_o e^{-\lambda t}\right]}{dt} = -N_o e^{-\lambda t}\left(-\lambda\right) = N_o e^{-\lambda t}\cdot\lambda = \lambda N \quad (2)$$

Según la ecuación (2) el número de átomos radiactivos que se desintegra por unidad de tiempo es proporcional al número de los que aún no se han desintegrado.

Sustituimos en la ecuación (1) el número de átomos por su actividad, resulta

$$\frac{A(t)}{\lambda} = \frac{A_o}{\lambda} e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad A(t) = A_o e^{-\lambda t} \quad (3)$$

Calculamos la actividad de la muestra introducida en el paciente al cabo de hora y media

$$A(t) = 15\,\mathrm{MBq}\,.e^{-3{,}21.10^{-5}\cdot 1{,}5\cdot 3600} = 12{,}6\ \ \mathrm{MBq}$$

Esta es la actividad en todo el volumen V de sangre del paciente, por tanto:

$$\frac{20\,\mathrm{cm}^3}{43{,}5\,\mathrm{kBq}} = \frac{V}{12{,}6.10^3\,\mathrm{kBq}} \qquad V = 5{,}79.10^3\,\mathrm{cm}^3 = 5{,}79\,\mathrm{L}$$

2..- $\dfrac{A_o}{\lambda} = N_o = \dfrac{15.10^6}{3{,}21.10^{-5}} = 4{,}7.10^{11}$

Un mol supone $6{,}02.10^{23}$ átomos y una de tecnecio de 99 gramos

$$\frac{99\ \mathrm{g\ de\ Tc}}{6{,}02.10^{23}\,\text{átomos}} = \frac{x}{4{,}7.10^{11}\,\text{átomos}} \qquad x = 7{,}68.10^{-11}\,\mathrm{g}$$

3.-
La energía recibida por el paciente

$$E = 4{,}7.10^{11}\cdot 0{,}3\ \mathrm{MeV} = 1{,}41.10^{11}\,\mathrm{MeV} = 1{,}41.10^{17}\,\mathrm{eV} = 1{,}41.10^{17}\,\mathrm{eV}\cdot 1{,}6.10^{-19}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}} = 0{,}023\,\mathrm{J}$$

La dosis depende la masa del paciente. La unidad en el sistema internacional es el gray, Gy que es igual a un J/ kg.

$$D = \frac{0{,}023\,\mathrm{J}}{70\,\mathrm{kg}} = 3{,}29.10^{-4}\,\mathrm{Gy}$$

4) La dosis equivalente esta relacionada con la dosis recibida y el tipo de radiación, esto es, si son electrones, neutrones, rayos X, etc y esto se expresa mediante la relación

$$H = D\cdot \mathrm{factior}$$

El factor depende del tipo de radiación recibida y en general varía de 1 a 20. Como la radiación emitida por el Tc son electrones el factor es 1. La unidad es el sievert , Sv

$$H = 3{,}29.10^{-4}\,\mathrm{Sv} = 0{,}329\ \mathrm{mSv}$$

$$\frac{0{,}329}{3{,}7} = 0{,}089$$

El efecto de la radiación sobre los humanos depende de la zona del cuerpo que la recibe, de la dosis y del tiempo en que se recibe esa dosis.

42. (423).-***Cuando un positrón choca de frente con un electrón se aniquilan ambos y, como resultado, se obtienen dos fotones dirigidos en sentidos contrarios. Si la energía cinética de cada partícula es de 1 MeV, determinar la longitud de onda de cada uno de los fotones producidos.***

Datos: Constante de Planck h= 6,62.10^{-34} Js ; masa del electrón m_e=9,1.10^{-31} kg ; velocidad d e la luz c=3,0.10^{8} m/s; carga del electrón q= - 1,6.10^{-19} C.

Propuesto en el libro Problemas de Física. J. Ruiz Vázquez. Selecciones Científicas. 1985.

La cantidad de movimiento de los dos fotones es nula, por tanto, las partículas tienen la misma energía.

La energía de un fotón es : $E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$.

La energía de cada partícula que se aniquila es la suma de $m_e c^2 + T$, siendo m_e la masa del electrón y también del positrón y T la energía cinética.

El principio de conservación de la energía nos dice

$$2\frac{hc}{\lambda} = 2m_e c^2 + 2T \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{m_e c^2 + T} = \frac{6{,}62.10^{-34}\cdot 3{,}0.10^{8}}{9{,}1.10^{-31}\cdot\left(3{,}0.10^{8}\right)^2 + 1{,}6.10^{-13}} = 8{,}2.10^{-13}\,\mathrm{m}$$

43. (434.)- ***Un haz de partículas iguales posee una energía total igual a cien veces su masa en reposo. La vida media de cada partícula es 10 ns. En el laboratorio la distancia entre el lugar donde se producen las partículas y el detector es 6,0 m. Calcular la fracción de las partículas producidas que alcanzan el detector.***

Ayuda. $N = N_o e^{\frac{-t}{t_o}}$ **, N_o, número de partículas producidas por el generador. N, partículas que no se han desintegrado al cabo de un tiempo t, t_o es la vida media de la partícula.**

Examen en la Universidad de Florida.

Designamos con S al sistema de referencia situado en el laboratorio y S´ el que acompaña al haz de partículas. La distancia d= 6,0 m es una longitud propia en el sistema S, el tiempo de vida media de cada partícula (t_o=10 ns) es el tiempo propio en el sistema S´

Analizamos el problema desde el sistema S, por tanto desde este sistema debemos calcular el tiempo t.

$$t_{propio} = t_o = t_S\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad t_S = \frac{t_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Para conocer la velocidad del haz recurrimos al invariante: $E^2 - p^2c^2 = m_o^2c^4$

$$E^2 = \gamma^2 m_o^2 v^2 c^2 + m_o^2c^4 = m_o^2 c^2\left(\gamma^2 v^2 + c^2\right) = m_o^2 c^2\left(\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + c^2\right) \Rightarrow$$

$$E^2 = m_o^2 c^2\left(\frac{c^2v^2}{c^2-v^2} + c^2\right) = m_o^2 c^2\left(\frac{c^4 - c^2v^2 + c^2v^2}{c^2-v^2}\right) = m_o^2 c^2\left(\frac{c^4}{c^2-v^2}\right) \Rightarrow$$

$$E^2 = m_o^2 c^4 \cdot \frac{c^2}{c^2-v^2} = m_o^2 c^4 \gamma^2 \Rightarrow \quad E = m_o c^2\gamma \Rightarrow \quad \gamma = \frac{E}{m_o c^2} = 100\frac{m_o c^2}{m_o c^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = 100 \quad \Rightarrow 10^4 = \frac{c^2}{c^2-v^2} \Rightarrow \; 1-\frac{v^2}{c^2} = 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1-10^{-4} \approx 1 \quad \Rightarrow v \approx c$$

$$N = N_0 e^{-\frac{t_S}{t_o}} \Rightarrow t_S = \frac{d}{v} = \frac{d}{c} = \frac{6{,}0\,m}{3.10^8\,\frac{m}{s}} = 2.10^{-8}\,s \Rightarrow \quad \frac{N}{N_o} = e^{-\frac{2.10^{-8}}{10.10^{-9}}} = e^{-2} = 0{,}135$$

El 13,5% de las partículas producidas en el generador llegan al detector.

44. (435).-***Un haz de muones describe una órbita circular por acción de un campo magnético uniforme. Se desprecian las pérdidas de energía debidas a la radiación electromagnética.***

a) Si la velocidad de los muones es mucho menor que la velocidad de la luz, se encuentra que la mitad de ellos decaen durante una vuelta completa ¿Cuál es el módulo del campo magnético?

b) El experimento se repite con el mismo campo magnético pero con muones cuya velocidad es comparable a la velocidad de la luz ¿Calcular la fracción que decaen en una vuelta completa?

Datos. Masa del muón m= 1,88.10^{-28} kg carga q= -1,602.10^{-19} C , vida media $T_{1/2}$=1,523 μs

American Association of Physics Teacher

a) De acuerdo con la mecánica clásica la fuerza centrípeta de los muones es proporcionada por la fuerza magnética que existe entre el campo magnético y la carga de los muones.

$$\frac{m\,v^2}{R} = qvB \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m\,v}{q\,R}$$

El tiempo que emplean las partículas en dar una vuelta es igual a su vida media y en ese tiempo desaparecen la mitad de las partículas

$$v = \frac{2\pi R}{T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{m\dfrac{2\pi R}{T_{1/2}}}{q\,R} = \frac{2\pi m}{q\,T_{1/2}} = \frac{2\pi \cdot 1{,}88.10^{-28}}{1{,}602.10^{-19} \cdot 1{,}523.10^{-6}} = 4{,}84.10^{-3}\ \mathrm{T}$$

b) Ahora utilizamos la mecánica relativista. Desde el punto de vista de un observador ligado al sistema del laboratorio, la longitud del radio es una longitud propia, pero el tiempo de desintegración de la partícula es un tiempo impropio

$$q\,v'B = F = ma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,m_o\,\frac{v'^2}{R} \quad \Rightarrow \quad q\,B = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\,m_o\,\frac{v'}{R}$$

$$v' = \frac{2\pi R}{t_{impropio}} = \frac{2\pi R}{\dfrac{T_{1/2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}} \Rightarrow \frac{v'}{R} = \frac{2\pi\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{T_{1/2}}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$qB = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} m_o \frac{2\pi\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}{T_{1/2}} = \frac{2\pi m_o}{T_{1/2}}$$

El resultado es el mismo que en la mecánica clásica, por tanto, la velocidad de los muones no influye en su desintegración por cada orbita realizada.

45. (454). ***Un acelerador lineal se emplea para acelerar electrones hasta alcanzar una energía de 40 GeV.***
a) Calcular la masa del electrón cuando alcanza la citada energía.
b) La longitud del acelerador son 3000 metros medidos en el sistema del laboratorio ¿cuál es la longitud en el sistema de referencia del electrón?
c) Determinar el tiempo que emplea el electrón en recorrer la longitud del acelerador medido en el sistema del laboratorio y medido en el sistema ligado al electrón.
La masa en reposo del electrón es $m_o = 9{,}109.10^{-31}$ kg, velocidad de la luz $C=2{,}9979.10^{8}$ m/s, carga del electrón = $-1{,}602 .10^{-19}$ C

Consideramos dos sistemas de referencia el del laboratorio (sistema L) y el ligado al electrón (sistema L´).
a) La energía y la masa están relacionada entre sí por la famosa ecuación de Einstein

$$E = mc^2 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{E}{c^2} = \frac{40.10^9\,\mathrm{eV}\cdot 1{,},602.10^{-19}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}}}{\left(2{,}9979.10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 7{,}13.10^{-26}\,\mathrm{kg}$$

b) La longitud de 3000 m es la longitud propia medida en el sistema L. Desde el sistema L´ al medir esa longitud se encuentra un valor diferente ya que para el observador de L´el sistema L se está desplazando con velocidad v.

$$l = l_o\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad (1)$$

La relación entre la masa m_o y la medida en a) es:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{m_o}{m} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$l = l_o\frac{m_o}{m} = 3000\frac{9{,}109.10^{-31}}{7{,}13.10^{-26}} = 0{,}0383\,\mathrm{m} = 3{,}83\,\mathrm{cm}$$

c) A partir de la ecuación (2)

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_o}{m}\right) \;\Rightarrow\; \frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{m_o}{m}\right)} \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_o}{m}\right)}$$

Para el observador del sistema del laboratorio:

$$t = \frac{3000}{c\sqrt{1-\left(\frac{m_o}{m}\right)}} = \frac{3000}{2{,}9979.10^{8}\sqrt{1-\frac{9{,}109.10^{-31}}{7{,}11.10^{-26}}}} = 1{,}00.10^{-5}\ \mathrm{s}$$

Para el observador del sistema L´, relaciona ese tiempo por la ecuación

$$t = \frac{t_o}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t_o\, m,}{m_o} \Rightarrow t_o = \frac{m_o t}{m} = \frac{9{,}109.10^{-31}\cdot 1{,}00.10^{-5}}{7{,}13.10^{-26}} = 1{,}28.10^{-10}\ \mathrm{s}$$

46. (456). ***Un muón de masa en reposo m$_\mu$ se desintegra en un electrón de masa en reposo m$_e$ y dos neutrinos (se consideran sin masa) mediante la reacción***

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

a) ¿En qué dirección deben viajar los neutrinos cuando el electrón adquiere la máxima energía?
b) Calcular esa energía máxima del electrón y su momento.

a) El proceso se verifica con conservación del momento, como el muón se encuentra en reposo, se debe cumplir que

$$\vec{p}_e + \vec{p}_{\nu e} + \vec{p}_{\nu\mu} = 0$$

Si el electrón ha de tener la máxima energía eso conlleva que también tenga el módulo máximo del momento, lo cual supone que los neutrinos se muevan en una dirección y el electrón en la misma dirección pero en sentido contrario; podemos escribir que en módulo se cumple que

$$p_e = p_{\nu e} + p_{\nu\mu}$$

La relación entre las energías y los momentos

$$E_e^2 - m_e^2c^4 = p_e^2c^2 \Rightarrow p_e = \sqrt{\frac{E_e^2 - m_e^2c^4}{c^2}} \quad p_{\nu e} = \frac{E_{\nu e}}{c} \quad p_{\nu\mu} = \frac{E_{\nu\mu}}{c} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{E_e^2 - m_e^2c^4}{c^2}} = \frac{E_{\nu e}}{c} + \frac{E_{\nu\mu}}{c} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{E_e^2 - m_e^2c^4} = E_{\mu e} + E_{\nu\mu} \qquad (1)$$

El principio de conservación de la energía nos permite escribir

$$m_\mu c^2 = E_{\nu e} + E_{\nu\mu} + E_e \quad \Rightarrow \quad E_{\nu e} + E_{\nu\mu} = m_\mu c^2 - E_e$$

Sustituyendo en la ecuación (1)

$$\sqrt{E_e^2 - m_e^2c^4} = m_\mu c^2 - E_e \quad \Rightarrow \quad E_e^2 - m_e^2c^4 = m_\mu^2c^4 + E_e^2 - 2E_e m_\mu c^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_e = \frac{m_\mu^2c^4 + m_e^2c^4}{2m_\mu c^2} = c^2\,\frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu}$$

Para calcular el momento del electrón nos vamos a la ecuación

$$E_e^2 - m_e^2 c^4 = p_e^2 c^2 \Rightarrow \quad p_e = \frac{\sqrt{\left[c^2 \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2 m_\mu}\right]^2 - m_e^2 c^4}}{c} = c\sqrt{\frac{m_\mu^4 + m_e^4 + 2 m_\mu^2 \cdot m_e^2}{4 m_\mu^2} - m_e^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_e = c\sqrt{\frac{m_\mu^4 + m_e^4 - 2 m_\mu^2 \cdot m_e^2}{4 m_\mu^2}} = \frac{c}{2 m_\mu}\sqrt{\left(m_\mu^2 - m_e^2\right)^2} = \frac{c\left(m_\mu^2 - m_e^2\right)}{2 m_\mu}$$

47.(486).-***Un recipiente contiene 2,00 μg de tritio. La vida media de este isótopo es $t_{1/2}$= 12,3 años y la masa de un átomo m = 3,02 u.***
a) Calcular la velocidad inicial de desintegración inicial de este isótopo
b) Determinar el tiempo que ha de transcurrir para que la muestra inicial se reduzca al 1% de su masa inicial.

a) La desintegración radiactiva es un proceso estadístico regido por la ecuación siguiente

$$N = N_o e^{-\lambda t}$$

N_o es el número de átomos iniciales y l es la constante radiactiva característica de cada átomo.
El tiempo que transcurre para que una muestra de un isótopo se reduzca a la mitad se denomina vida media

$$\frac{N_o}{2} = N_o e^{-\lambda t_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{1}{2} = -\lambda\, t_{1/2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

La velocidad de desintegración es dN/dt

$$\frac{dN}{dt} = N_o\, e^{-\lambda\, t} \cdot (-\lambda)$$

Como se pide la velocidad inicial, t=0

$$\frac{dN}{dt} = -N_o \lambda = -N_o \frac{\ln\ 2}{t_{1/2}}$$

N_o es el cociente entre la masa en kilos de la muestra dividido por la masa de un átomo expresada en kilos.. La unidad de masa atómica es 1/12 de la masa de un átomo de $_{12}$C. Como 12,0000 gramos de carbono 12 contienen N_A= 6,02.10^{23} átomos la masa de un solo átomo es

$$\frac{12{,}0000\text{g}}{N_A}$$

Y como u es l /12 de esa masa resulta:

$$u = \frac{1}{12} \cdot \frac{12{,}0000}{N_A} = \frac{1}{6{,}02.10^{23}} = 1{,}6611.10^{-24}\,\text{g} = 1{,}6611.10^{-27}\ \text{kg}$$

La masa en kg de un solo átomo de tritio es:

$$m\left({}^3_1H\right) = 3{,}02\,u \cdot 1{,}611.10^{-27}\,\frac{kg}{u} = 5{,}02.10^{-27}\,kg \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad N_o = \frac{2{,}00.10^{-9}\,kg}{5{,}02.10^{-27}\,kg} = 3{,}98.10^{17}\ \text{átomos}$$

$$\frac{dN}{dt} = -3{,}98.10^{17} \cdot \frac{\ln 2}{12{,}3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\,s} = 7{,}11.10^{8}\ s^{-1}$$

b)

$$N = \frac{N_o}{100} = N_o\, e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln\frac{1}{100} = -\lambda\, t = -\frac{\ln 2}{t_{1/2}}\, t \Rightarrow t = -\frac{\ln\frac{1}{100} \cdot t_{1/2}}{\ln 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = -\frac{-4{,}605 \cdot 12{,}3}{0{,}693} = 81{,}7\,\text{años}$$

48.-**(554).- **Un acelerador lineal de longitud 2000 m comunica a los electrones una energía de 30 GeV.
a) Calcular la masa del electrón cuando posee esa energía.
b) Determinar la longitud del acelerador medida desde un sistema ligado a esos electrones.
c) Calcular el tiempo que emplean esos electrones en recorrer el acelerador visto desde el sistema del laboratorio. Calcular el tiempo si el proceso se observa desde el sistema ligado a los electrones.

Datos- masa del electrón en reposo 9,1.10^{-31} kg,
velocidad de la luz, c= 3.10^{8} m/s

a)

$$E = mc^2 = m_o c^2 + E_C \quad \Rightarrow \quad m = m_o + \frac{E_C}{c^2} = 9{,}1.10^{-31} + \frac{30.10^9 \cdot 1{,}6.10^{-19}}{\left(3.10^8\right)^2} \approx 5{,}3.10^{-26}\,\text{kg}$$

b) La longitud propia del acelerador es $\ell_0 = 2000\,\text{m}$.

$$\ell = \ell_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

La relación entre las masas es $m = \dfrac{m_o}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{m_o}{m}$

Sustituyendo en (1)

$$\ell = \ell_o \frac{m_o}{m} = 2000 \cdot \frac{9{,}1.10^{-31}}{5{,}3.10^{-26}} = 0{,}034\,\text{m} = 3{,}4\,\text{cm}$$

c) Calculamos la velocidad de los electrones en el sistema del laboratorio

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_o}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_o}{m}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_o}{m}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{9{,}1.10^{-31}}{5{,}3.10^{-26}}\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = c\sqrt{1 - 2{,}95.10^{-10}} \approx c$$

$$t_L = \frac{\ell_o}{c} = \frac{2000}{3.10^8} = 6{,}7.10^{-6}\,\text{s}$$

El observador desde el sistema del electrón la longitud que recorre es 0,034 m y para él la velocidad del sistema del laboratorio es c

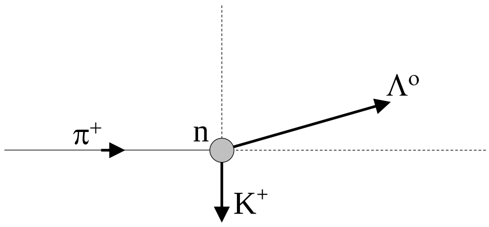
$$t_E = \frac{0{,}034}{3.10^8} = 1{,}13.10^{-10}\,\text{s}$$

49.- (557).- Determinar la energía cinética umbral de la partícula π^+ a partir de la cual se verifique la reacción

$$\pi^+ + n \Rightarrow K^+ + \Lambda^o$$

Sabiendo que el neutrón se encuentra en reposo en la dirección inicial de la partícula π^+ y que K+ se desplaza formando un ángulo de 90º con la mencionada dirección
Masas en reposo: $m_\pi c^2$= 140 MeV ; $m_n c^2$= 940 MeV ;
$m_K c^2$= 494 MeV ; $m_\Lambda c^2$= 1115 MeV

En el esquema de la reacción (figura inferior), si π tiene energía cinética por encima de la umbral se verfica la reacción citada y con la finalidad de cumplir la conservación del momento lineal, la partícula Λ forma un ángulo con la dirección del eje X que es la dirección en la que se movía la partícula π



En general, como la partícula π^+ viene según el eje X, las componentes del momento lineal, según el eje Y, de las otras dos partículas deben ser iguales y opuestas, para dar una suma cero.

Como la partícula K^+ tiene momento lineal también tiene energía cinética, dado que nos pide la energía mínima de la partícula π, ese mínimo debe corresponder a que la partícula K quede en reposo y que la partícula Λ adquiera el momento lineal de la partícula π y por consiguiente que se desplace sobre el eje X.

Aplicamos el principio de conservación de la energía

$$E_\pi^o + E_C \;+\; E_n^o = E_K^o + E_\Lambda \quad (1)5+$$

E_C es la energía cinética umbral de la partícula π, los superíndices indican la energía en reposote las otras partículas.

Como los momentos de las partículas π y Λ son iguales, escribimos haciendo uso del invariante

$$E_\pi^2 = \left(E_\pi^o\right)^2 + (pc)_\pi^2 \Rightarrow\ : (pc)_\pi^2 = E_\pi^2 - \left(E_\pi^o\right)^2; \quad E_\Lambda^2 = \left(E_\Lambda^o\right)^2 + (pc)_{\pi\Lambda}^2 \Rightarrow\ : (pc)_\Lambda^2 = E_\Lambda^2 - \left(E_\Lambda^o\right)^2$$

como $(pc)_\pi^2 =: (pc)_\Lambda^2$ resulta

$$E_\pi^2 - \left(E_\pi^o\right)^2 = E_\Lambda^2 - \left(E_\Lambda^o\right)^2 \Rightarrow \quad E_\Lambda^2 = E_\pi^2 - \left(E_\pi^o\right)^2 + \left(E_\Lambda^o\right)^2$$

Sustituyendo en (1)

$$E_\pi^o + E_C + E_n^o = E_K^o + \sqrt{E_\pi^2 - \left(E_\pi^o\right)^2 + \left(E_\Lambda^o\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\pi^o + E_C + E_n^o = E_K^o + \sqrt{E_\pi^2 - \left(E_\pi^o\right)^2 + \left(E_\Lambda^o\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\pi^o + E_C + E_n^o = E_K^o + \sqrt{\left(E_\pi^o + E_C\right)^2 - \left(E_\pi^o\right)^2 + \left(E_\Lambda^o\right)^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$140 + E_C + 940 = 494 + \sqrt{\left(140 + E_C\right)^2 - 140^2 + 1115^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_C + 586 = \sqrt{\left(140 + E_C\right)^2 + 1223625} \Rightarrow \left(E_C + 586\right)^2 = \left(140 + E_C\right)^2 + 1223625 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_C^2 + 343396 + 1172\,E_C = 19600 + E_C^2 + 280\,E_C + 1223625 \Rightarrow 892\,E_C = 899829 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ec = \frac{899829}{892} = 1009 \text{ MeV}$$

50.- (558).- Un átomo o ión con un solo electrón tiene niveles de energía $E_n = -A/n^2$. Dos líneas consecutivas en su espectro, procedentes de saltos de niveles más altos al nivel fundamental, presentan las siguientes longitudes de onda $\lambda_1 = 97{,}5\,nm$ y $\lambda_2 = 102{,}8\,nm$ ¿Cuál es el valor de la constante A, expresada en eV?

Datos: Constante de Planck h = 6,63.10^{-34} J s
Velocidad d la luz , c =2,998.10^{8} m/s, carga del electrón , e= 1,602.10^{-19} C

El estado fundamental del átomo es aquel en que el electrón ocupa el nivel más bajo de energía, siendo n=1.Si ese electrón se promociona a un nivel superior es a costa de suministrar energía al átomo. Si el electrón ocupa un nivel superior (átomo excitado) y pasa después al estado fundamental cede energía la cual aparece como una onda electromagnética. cuya energía es hν, siendo ν la frecuencia de la onda.

Salto energético desde el nivel n>1 al estado fundamental

$$E_f - E_i = 0 - E_i = -\frac{A}{1^2} - \left(-\frac{A}{n^2}\right) \Rightarrow E_i = A - \frac{A}{n^2} = A\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = h\nu_2 = \frac{hc}{102.8}$$

Salto energético desde el nivel n+1 al estado fundamental

$$E_f - E_i = 0 - E_i = -\frac{A}{1^2} - \left(-\frac{A}{(n+1)^2}\right) \Rightarrow E_i = A - \frac{A}{(n+1)^2} = A\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = h\nu_1 = \frac{hc}{97{,}5}$$

A partir de las ecuaciones anteriores

$$\frac{A\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{A\left(1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2\right)} = \frac{\frac{hc}{102{,}8}}{\frac{hc}{97{,}5}} \Rightarrow \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^2} = \frac{97{,}5}{102{,}8} = 0{,}9484$$

La solución de la ecuación anterior es un número entero, por ensayo en la ecuación se obtiene para n =3

$$\frac{1 - \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{15}{16}} = 0{,}9481$$

De la ecuación primera

$$A\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{hc}{102{,}8} \Rightarrow \quad A=\frac{9\,hc}{8.102{,}8}=\frac{9\cdot 6{,}63.10^{-34}\,J\,s\cdot 2{,}998.10^{8}\,m.s^{-1}}{8\cdot 102{,}8.10^{-9}\,m}=2{,}175{,}10^{-18}\ J$$

$$A = 2{,}175.10^{-18}\,J\cdot\frac{1\,eV}{1{,}602.10^{-19}\,J}=13{,}6\,eV$$