51.-** (579.)- **El radón es el resultado de la desintegración radiactiva del $^{226}_{88}Ra$ por emisión de una partícula alfa ($^{4}_{2}He$) con una energía cinética Ec= 4,9 MeV. Sabiendo que la energía de enlace de la partícula alfa es ΔE_α = 0,0303 u. Calcular la diferencia de energía entre el núcleo de radio y el de radón.

La desintegración radiactiva del radio es:

$$^{226}_{88}\text{Ra} \Rightarrow \ ^{222}_{86}\text{Rn} + ^{4}_{2}\text{He}$$

Imaginemos que la anterior reacción se produce de la forma siguiente tomando con signo positivo la energía que se aporte desde el exterior al sistema y negativo cuando sea éste el que ceda energía al medio

El núcleo de radio se deshace en sus componentes de protones y neutrones, este proceso ocurre con aportación de la energía de enlace, por tanto, es positiva +ΔRa

La formación del núcleo de radón a partir de los protones y neutrones, en este proceso desprende la energía de enlace de ese núcleo -ΔRn

Formación de la partícula alfa a partir de los protones y neutrones, desprende la energía de enlace de ese núcleo - $\Delta E\alpha$

La energía cinética de la partícula α que aparece en el medio exterior procedente de la reacción + ΔE_C

El principio de la conservación de la energía permite escribir

$$\Delta\text{Ra} - \Delta\text{Rn} - \Delta\text{E}\alpha + \Delta\text{Ec} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\text{Ra} - \Delta\text{Rn} = \Delta\text{E}\alpha - \Delta\text{Ec}$$

Recordando que 1eV es la energía que adquiere un electrón sometido a la diferencia de potencial de un voltio, luego 1eV= $1{,}602.10^{-19}$ C · 1 V= $1{,}602.10^{-19}$ J

Una unidad de masa es en gramos la doceava parte de la masa de un átomo de carbono 12

$$1\,\text{u} = \frac{1}{12}\cdot\frac{12}{6{,}022.10^{23}} = 1{,}661.10^{-24}\ \text{g} = 1{,}661.10^{-27}\,\text{kg}$$

De acuerdo con la ecuación relativista E = m c^{2}, la masa anterior equivale a una energía

$$E = 1{,}661.10^{-27} \cdot (3{,}00.10^{8})^{2} = 1{,}495.10^{-10}\,J = 1\,u$$

$$1u = 1{,}495.10^{-10}\,J \cdot \frac{1\,eV}{1{,}6061.10^{-19}\,J} = 931.10^{6}\,eV = 931\ \ MeV$$

$$\Delta E\alpha = 4{,}9MeV \cdot \frac{u}{931\ MeV} = 5{,}26.10^{-3}\,u$$

$$\Delta Ra - \Delta Rn = 0{,}0303 - 5{,}26.10^{-3} = 0{,}0250\ u$$

52.-** (581.)- **¿Cuál es la velocidad final de un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 12000 V si tiene una velocidad inicial de 10^7m/s?

Datos: masa del electrón en reposo m_o =9,11.10^{-31} kg,

Carga del electrón q= 1,602.10^{-19} C

Velocidad de la luz, c=2,998.10^8 m/s

Propuesto en el Volumen II Campos y ondas, M. Alonso y E.J. Finn

Según la teoría de la Relatividad

$$E = m c^2 = m_o c^2 + E_C \quad \Rightarrow \; E_C = (m - m_o) c^2 = (\gamma m_o - m_o) c^2 = m_o c^2 (\gamma - 1) \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; E_C = m_o c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right)$$

La energía cinética final del electrón es la suma de la inicial, más la energía proporcionada por el trabajo electrostático realizado sobre el electrón, por la acción de la diferencia de potencial.

$$E_C(f) = E_C(i) + q\,\Delta V \Rightarrow m_o c^2 (\gamma_f - 1) = m_o c^2 (\gamma_i - 1) + q\,\Delta V \;\Rightarrow\; \gamma_f - 1 = \gamma_i - 1 + \frac{q\,\Delta V}{m_o c^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_f - \gamma_i = \frac{q\,\Delta V}{m_o c^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_i}{c}\right)^2}} = \frac{q\,\Delta V}{m_o c^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{10^7}{2{,}998.10^8}\right)^2}} = \frac{1{,}602.10^{-19} \cdot 1{,}2.10^4}{9{,}109.10^{-31} \cdot (2{,}998..10^8)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}} - 1{,}001 = 0{,}0235 \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2}} = 1{,}024 \;\Rightarrow\; 1 - \left(\frac{v_f}{c}\right)^2 = 0{,}954 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; \frac{v_f}{c} = 0{,}214 \quad \Rightarrow \quad v_f = 0{,}214\,c$$

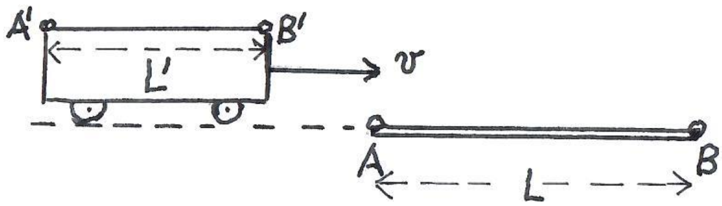
53.-** (587.)- **Un vagón A'B' se desplaza con velocidad v respecto de una plataforma AB. La longitud propia del vagón es L' y la de la plataforma L. En los extremos del vagón y de la plataforma existen relojes sincronizados el A con el B y el A' con B'.Cuando B' pasa por delante de A los relojes marcan t. Determinar los siguientes tiempos:

1)** τ_1 **tiempo indicado por el reloj en B cuando B' pasa ante B

2)** τ_2 **tiempo indicado por el reloj en B cuando A' pasa ante B

3)** τ_3 **tiempo indicado por el reloj en B' cuando B pasa ante B'

4)** τ_4 **tiempo indicado por el reloj en A' cuando B pasa ante B'



1) Ahora observamos desde la plataforma. Cuando B' pasa ante A su reloj marca t, según el enunciado a partir de aquí la delantera del vagón recorre la distancia L a una velocidad

$$\tau_1 = t + \frac{L}{v}$$

2) Seguimos observando desde la plataforma. Cuando B' pasa ante A el reloj B marca t .Ahora el vagón comienza a moverse por la plataforma y cuando B' pasa ante B ha recorrido la distancia L y a continuación el vagón sigue avanzando, cuando A' pasa ante B desde la plataforma la longitud del vagón no es L' ya que la longitud se contrae. Desde la plataforma la longitud que se observa desde B es:

$$\ell = L'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\text{, c velocidad de la luz}$$

$$\tau_2 = t + \frac{L}{v} + \frac{\ell}{v} = t + \frac{L + L'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v}$$

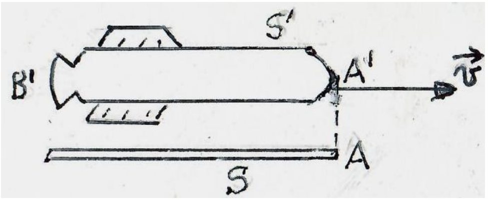
3) Un observador situado en el vagón que para él está en reposo "ve" que la plataforma se desplaza hacia la izquierda y cuando para él A llega ante B' su reloj marca t. Cuando B pasa ante B' la distancia L se contrae

$$\tau_3 = t + \frac{L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v}$$

4) A partir del momento anterior B pasa anta A' después de recorrer la distancia L'

$$\tau_3 = t + \frac{L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v} + \frac{L'}{v}$$

***54.-** (588.)-Un cohete espacial de longitud propia L_o se desplaza a velocidad constante v relativa a un sistema de referencia S (ver la figura). La punta del cohete (A') pasa por el punto A de S en el instante t=t'=0 y en ese instante se emite una señal luminosa desde A' a B'*



a) ¿Cuánto tardará la señal en términos del tiempo del cohete t' en alcanzar la cola B' de la nave?
b)¿En qué instante t_1, medido en S, pasa la cola de la nave(B') por el punto A?
c) ¿En qué instante t_2 , medido en S, pasa la cola de la nave (B') por el punto A?

Propuesto en el libro Relatividad Especial A, P.French

a) Estamos en el sistema S' en el que la longitud que tiene que recorrer la luz el L_o a una velocidad c

$$t' = \frac{L_o}{c}$$

b) Ahora se analiza el problema desde el sistema S, para el que la longitud del cohete es menor según la ecuación relativista

$$L_S = L_o \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = L_o\sqrt{1-\beta^2}$$

En el tiempo t_1 el cohete se desplaza de izquierda a derecha una longitud $v t_1$. La luz se mueve en sentido contrario a una velocidad c y recorre una distancia ct_1. El cohete y la luz se mueven en sentido contrario, podemos decir que el extremo del cohete se dirige hacia la luz. Las dos distancias sumadas son la longitud del cohete medida desde S

$$L_o\sqrt{1-\beta^2} = v t_1 + c t_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{L_o\sqrt{1-\beta^2}}{v+c} = \frac{L_o\sqrt{1-\beta^2}}{c\beta + c} = \frac{L_o}{c}\frac{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}{1+\beta} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad t_1 = \frac{L_o}{c}\frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}}$$

c) Desde el sistema S la longitud del cohete es $L_o\sqrt{1-\beta^2}$ y el tiempo

$$t_2 = \frac{L_o\sqrt{1-\beta^2}}{v}$$

***55.-** (589).-En un experimento fotoeléctrico en el que se utiliza luz monocromática y un fotocátodo de sodio se encuentra un potencial de frenado de 1,85 voltios para una longitud de onda de 3000 Angstrom y 0,82 voltios para una longitud de onda de 4000Angstrom. Con esos datos calcule*
***a)** Un valor para la constante de Planck **b)** La función de trabajo del sodio expresa en electrón voltios **c)** La longitud de onda umbral para el sodio*

***Datos:** Carga del electrón $1,602.10^{-19}$ C ; 1 angstrom =Aº= 10^{-10} m*
Velocidad de la luz c = $2,998.10^{8}$ m .s^{-1}

Propuesto en el libro Conceptos de Relatividad y Teoría Cuántica R. Resnick

a) La ecuación del efecto fotoeléctrico establecida por Einstein es

$$E_c = h\nu - w$$

Ec, energía cinética del electrón emitido (fotoelectrón) con la máxima energía , h constante de Planck , ν, frecuencia de la luz incidente sobre el fotocátodo, w energía característica del metal denominada función de trabajo, o trabajo de extracción, que es la energía mínima que se necesita para que un electrón salga hasta la superficie del metal pero sin proporcionarle energía cinética .El potencial de frenado V_f ,es un voltaje que se aplica para anular la energía cinética .de los fotoelectrones emitidos, evitando que puedan escapar del metal. Podemos escribir la ecuación anterior

$$V_f e = h\,\nu - w = h\frac{c}{\lambda} - w$$

e es la carga del electrón.

Aplicando la ecuación anterior a los datos del problema

$$1{,}85 \cdot 1{,}602.10^{-19} = h\frac{2{,}998.10^{8}}{3000.10^{-10}} - w \Rightarrow 2{,}964.10^{-19} = 9{,}994.10^{14}\,h - w$$

$$0{,}82 \cdot 1{,}602.10^{-19} = h\frac{2{,}998.10^{8}}{4000.10^{-10}} - w \Rightarrow 1{,}314.10^{-19} = 7{,}495.10^{14}\,h - w$$

Restando las ecuaciones

$$2{,}964.10^{-19} - 1{,}314.10^{-19} = (9{,}994.10^{14} - 7{,}495.10^{14})\,h \Rightarrow h = \frac{1{,}650.10^{-19}}{2{,}499.10^{14}} = 6{,}60.10^{-34}\ \text{J.s}$$

b) Sumando las dos ecuaciones

$$4{,}278.10^{-19} = 1{,}749.10^{15}\,h - 2w \Rightarrow w = \frac{4{,}278.10^{-19} - 1{,}749.10^{15} \cdot 6{,}60.10^{-34}}{-2} = 3{,}633..10^{-19}\ \text{J}$$

Como un electrón voltio es igual a $1{,}602.10^{-19}$ J

$$w = \frac{3{,}633.10^{-19}}{1{,}602.10^{-19}} = 2{,}27 \text{ eV}$$

c) La longitud de onda umbral es el límite que determina que la energía cinética de los electrones sea nula, esto es, si la longitud de onda es mayor no hay electrones abandonando el metal y si es menor existen electrones que salen del fotocátodo.

$$0 = h\nu - w = h\frac{c}{\lambda} - w \quad \Rightarrow \; h\frac{c}{\lambda} = w \quad \Rightarrow \; \lambda_u = \frac{h\ c}{w} = \frac{6{,}60.10^{-34} \cdot 2{,}998.10^{8}}{3{,}633.10^{-19}} = 5{,}45.10^{-7}\,\text{m}$$

$$\lambda = 5{,}45.10^{-7}\ \text{m}.\frac{\text{A}^{\text{o}}}{10^{-10}\,\text{m}} = \ 5{,}45.10^{3}\,\text{A}^{\text{o}}$$

56.-** (599.)-**Considerar una partícula de masa m que realiza botes elásticos sobre una superficie horizontal dura e infinita bajo la influencia de la gravedad g. La energía mecánica total de la partícula es E. Suponer que la partícula es puntual y que el movimiento es no relativista.

a) Para estimar que el movimiento estuviese determinado por efectos cuánticos basta considerar que la altura del rebote es del mismo orden que la longitud de onda de deBroglie. Se supone que la longitud de onda de deBroglie está definida para el momento máximo de la partícula. Determinar el valor de la energía E_q donde los efectos cuánticos son importantes.

b) Ahora calculamos los posibles niveles de energía de una partícula que esta botando y alcanza una altura H, a partir de la expresión

$$2\int_0^H p\,dx = \left(n + \frac{1}{2}\right)h$$

p es el momento de la partícula en función de la altura x por encima de la tierra, n es un número entero h es la constante de Planck.

1) Determinar las energías permitidas E_n en función de n, g, m y h

2) Calcular el valor mínimo de la energía de un neutrón botando, dar el resultado en J en eV

3) Determinar la altura del bote de un neutrón dotado de esa mínima energía,

Datos . Masa del neutrón , m_n= 1,675.10^{-27} kg =940 MeV/c^2
h = 6,63.10^{-34} J s ; c=2,98.10^8 m/s ; e =-1,6.10^{-19} C

Olimpiadas USA

a) Cuando la partícula sale rebotada del suelo tiene la máxima velocidad y por tanto el máximo valor de p. A medida que se eleva disminuye su velocidad, por consiguiente su cantidad de movimiento. En el punto más alto, esto es, a la altura H, la velocidad es cero , y p=0, pero su energía es la misma que al rebotar en el suelo, E , por ser los rebotes elásticos, toda potencial.

La longitud de onda de deBroglie es; $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$

En el rebote en el suelo

$$E=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{h^2}{m^2\lambda^2}=\frac{1}{2}\frac{h^2}{m\lambda^2}=mgH \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\frac{h^2}{mH^2}=mgH \quad\Rightarrow\quad H=\sqrt[3]{\frac{h^2}{2m^2g}}$$

$$E=mgH=mg\sqrt[3]{\frac{h^2}{2m^2g}}=\sqrt[3]{\frac{h^2m^3g^3}{2m^2g}} \quad\Rightarrow\quad E_q=\sqrt[3]{\frac{h^2mg^2}{2}}$$

b)

1) En el suelo $E=\frac{1}{2}mv^2$. A una altura x respecto del suelo

$$E=E_x+m\,g\,x \quad\Rightarrow\quad E_x=E-mgx \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}mv_x^2=E-mgx$$

Si a la altura x la cantidad de movimiento es según el enunciado $p=mv_x$

$$\frac{1}{2}m\frac{p^2}{m^2}=E-mgx \quad\Rightarrow p^2=2m(E-mgx) \quad\Rightarrow\quad p=\sqrt{2m}\sqrt{E-mgx}$$

Llevando este valor a la integral del enunciado

$$2\int_0^H\left(\sqrt{2m}\sqrt{E-mgx}\right)dx=2\sqrt{2m}\int_0^H\sqrt{E-mgx}\quad dx$$

Para resolver la integral hacemos el siguiente cambio de variable

$$E-mgx=u^2 \quad\Rightarrow\quad -mg\,dx=2u\,du \quad\Rightarrow\ dx=-\frac{2u\,du}{mg}$$

$$2\sqrt{2m}\int_0^H\sqrt{E-mgx}\ dx=2\sqrt{2m}\int_0^H u\cdot\left(-\frac{2u\,du}{mg}\right)=2\sqrt{2m}\left|-\frac{2u^3}{3mg}\right|_0^H=2\sqrt{2m}\left|-\frac{2(E-mgx)^{\frac{3}{2}}}{3mg}\right|_0^H$$

$$2\sqrt{2m}\int_0^H\sqrt{E-mgx}\ dx=-\frac{4\sqrt{2m}}{3mg}\left[(E-mgH)^{\frac{3}{2}}-(E-0)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{4\sqrt{2}\ E^{\frac{3}{2}}}{3\ g\ \sqrt{m}}$$

Volviendo a la relación del enunciado

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)h=\frac{4\sqrt{2}\;E^{\frac{3}{2}}}{3\;g\sqrt{m}} \;\Rightarrow\; \left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot h^{\frac{2}{3}}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\;g\sqrt{m}}\right)^{\frac{2}{3}}E_n \;\Rightarrow\; E_n=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot h^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\;g\sqrt{m}}\right)^{\frac{2}{3}}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; E_n=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot h^{\frac{2}{3}}\,''\left(3g\sqrt{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{(4\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}}=\left(n+\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{9g^2mh^2}{32}}$$

2) Para calcular el valor mínimo, sustituimos n=0 en la ecuación anterior

$$E_0=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{9g^2mh^2}{32}}=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{\frac{9g^2mh^2}{32}}=\sqrt[3]{\frac{9g^2mh^2}{128}}$$

4) Sustituimos los valores numéricos en la ecuación anterior

$$E_0=\sqrt[3]{\frac{9\cdot 9{,}8^2\cdot 1{,}65.10^{-27}\cdot(6{,}63.10^{-34})^2}{128}}=1{,}70.10^{-31}\,J$$

Podemos realizar el cálculo a partir del dato de la masa del neutrón $m_n=940.10^6\,\frac{eV}{c^2}$

$$E_0=\sqrt[3]{\frac{9\cdot 9{,}8^2\,\frac{m^2}{s^4}\cdot 940.10^6\,\frac{eV}{(2{,}998.10^8)^2\,\frac{m^2}{s^2}}\cdot\left(6{,}63.10^{-34}\,J\cdot\frac{eV}{1{,}602.10^{-19}\,J}\right)^2\cdot s}{128}}=1{,}07.10^{-12}\,eV$$

3)

$$H=\frac{E_0}{mg}=\frac{1{,}70.10^{-31}}{1{,}65.10^{-27}\cdot 9{,}8}=1{,}05.10^{-5}\,m=10{,}5\;\mu m$$

57.-** (607).- **El núcleo de un átomo de carbono inicialmente en reposo en el laboratorio va de un estado a otro mediante la emisión de un fotón de energía 4,43 MeV. El átomo de carbono tiene una masa en reposo de 12 unidades de masa atómica.
a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento del átomo después del decaimiento según se mide en el laboratorio?
b) ¿Cuál es la energía cinética, en MeV, del átomo después del decaimiento según se mide en el sistema del laboratorio?
Datos . Número de Avogadro N_A= 6,022.1 ^{23}, átomos por /mol
Velocidad de la luz c= 2,998.10^8 m/s,
Carga del electrón e = -1,602.10^{-19} C

Propuesto en el libro. Conceptos de relatividad y teoría cuántica. Robert Resnick

a) En el proceso de emisión, el fotón sale en una dirección y el átomo de carbono retrocede en la misma dirección pero en sentido contrario a la marcha del fotón. Se conserva la cantidad de movimiento

$$p_F = \frac{E}{c} = p_C = \frac{4{,}43.10^6\,\text{eV}\cdot\dfrac{1{,}602.10^{-19}\,\text{J}}{\text{eV}}}{2{,}998.10^8\,\text{ms}^{-1}} = 2{,}38.10^{-21}\,\text{kg}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Para saber si la energía cinética la podemos calcular mediante la mecánica clásica, determinamos la velocidad del átomo de carbono
Una unidad de masa atómica (u) es 1/12 de la masa de un átomo de carbono 12

$$\frac{\frac{1}{12}12{,}00\ \text{g de}\ ^{12}\text{C}}{6{,}022.10^{23}\ \text{átomos de}\ ^{12}\text{C}} = \frac{\text{u}}{1\ \text{átomo de}\ ^{12}\text{C}} \Rightarrow \text{u} = \frac{1.00}{6{,}022.10^{23}} = 1{,}66.10^{-23}\,\text{g} = 1{,}66.10^{-27}\ \text{kg}$$

$$v = \frac{p}{m} = \frac{2{,}38.10^{-21}\ \dfrac{\text{kg m}}{\text{s}}}{12{,}00\ \text{u}\cdot 1{,}66.10^{-27}\ \dfrac{\text{kg}}{\text{u}}.} = 1{,}19.10^5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Al ser la velocidad pequeña respecto de la velocidad de la luz es posible aplicar la mecánica clásica

$$E_c = \frac{1}{2}m_C\,v^2 = \frac{1}{2}m_C\,\frac{p^2}{m_C^2} = \frac{1}{2}\,\frac{p^2}{m_C} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(2{,}38.10^{-21}\right)^2}{12\cdot 1{,}66.10^{-27}} = 1{,}42.10^{-16}\,\text{J}\cdot\frac{\text{eV}}{1{,}602.10^{-19}\ \text{J}} = 888\ \text{eV}$$

$$E_C = 8{,}88.10^{-4}\ \text{MeV}$$

58.- (608).- Calcular la velocidad de retroceso de un átomo de hidrógeno inicialmente en reposo que sufre una transición entre el nivel n=5 y el nivel n=1

Datos . Masa de un mol de átomos de hidrógeno $\boldsymbol{1{,}00794\ \frac{g}{mol}}$**,**

Número de Avogadro N_A= 6,02214.1 ^{23}, átomos por /mol
Velocidad de la luz c= 2,9979.10^{8} m/s,
Energía de ionización de un átomo de hidrógeno E_i = 13,5984 eV
Carga del electrón e = -1,60217.10^{-19} C

De acuerdo con el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno sus niveles de energía están dados por la ecuación

$$E = -\frac{E_I}{n^2}$$, n es el número cuántico principal

El signo menos indica que arrancar un electrón desde el nivel n=1 (estado fundamental) hasta fuera del átomo hay que aportar una energía de 13,5984 eV por átomo.
En el problema el electrón está en un estado n=5 y pasa al estado fundamental n=1, cediendo una energía ΔE

$$\Delta E = E_5 - E_i = \frac{13{,}5984}{5^2} - 13{,}5984 = 13{,}0545\,eV =$$
$$= 13{,}0545\,eV \cdot 1{,}60217.10^{-19}\ \frac{J}{eV} = 2{,}0916.10^{-18}\ J$$

Esta energía se reparte entre la energía de retroceso del átomo de hidrógeno y la que se lleva el fotón emitido.

$$\Delta E = E_H + E_F$$

En el proceso de emisión, el fotón sale en una dirección y el átomo retrocede en la misma dirección pero en sentido contrario a la marcha del fotón. Se conserva la cantidad de movimiento

$$p_H = p_F$$

La cantidad de movimiento del átomo de hidrógeno es, según la Mecánica clásica

p_H= m_H·v y su energía cinética $E_H = \frac{1}{2} m_H v^2$.

La cantidad de movimiento del fotón p_F= E_F/c según la Mecánica relativista. De la dos ecuaciones

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_H v^2 + p_F c = \frac{1}{2}m_H v^2 + p_H c = \frac{1}{2}m_H v^2 + m_H v \cdot c \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\Delta E}{m_H} = v^2 + v \cdot c \quad \Rightarrow \quad v^2 + v \cdot c - \frac{2\Delta E}{m_H} = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$v = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 8 \cdot \frac{\Delta E}{m_H}}}{2}$$

La solución valida es;

$$v = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 8 \cdot \frac{\Delta E}{m_H}}}{2} \quad (1)$$

Sustituimos valores numéricos en la ecuación anterior

$$m_H = \frac{1{,}00794}{6{,}02214.10^{23}} = 1{,}6737.10^{-24}\,g = 1{,}6737.10^{-27}\,kg \quad \Rightarrow 8.\frac{2{,}0916..10^{-18}}{1{,}6737.10^{-27}} = 9{,}9975.10^{9}\,s^2$$

$$c^2 = 8{,}9874.10^{16} s^2$$

Si comparamos los dos términos de la raíz cuadrada

$$\frac{c^2}{8 \cdot \frac{\Delta E}{m_H}} = \frac{8{,}9874.10^{16}}{9{,}9975.10^{9}} = 8{,}9896.10^{6}$$

.

La relación anterior nos indica que según las cifras significativas el resultado de v es prácticamente igual a cero. No es posible por este método determinar el valor numérico de la velocidad de retroceso, solamente podemos afirmar que es muy pequeña y que por tanto el fotón se lleva prácticamente toda la energía,

Este problema aparece publicado en Internet y en una pequeña publicación (Problemas de Física Moderna) que edita la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid, los cuales después de llegar a la ecuación (1), no sustituyen los valores numéricos y dan un resultado de v = 4,172 m/s ¿?

59.- (617).-Una partícula no relativista de masa m se mantiene en una órbita circular alrededor del origen por una fuerza atractiva f(r)= -k r siendo k una constante positiva a) Comprobar que la energía potencial vale

$$U(r)=\frac{kr^2}{2}$$

Suponiendo que U(r)=0 cuando r =0

b) Suponiendo aplicable la cuantización de Bohr para el momento angular de la partícula comprobar que la velocidad y el radio de la partícula son.

$$v^2=\left(\frac{n\hbar}{m}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad r^2=\left(\frac{n\hbar}{k}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Siendo n un número entero

c) Comprobar que la energía total de la partícula es:

$$E_n=nh\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

d) Si $m=3.10^{-26}$ kg y k = 1180 Nm^{-1} calcular la longitud de onda del fotón producido en al transición de dos niveles de energía sucesivos. Dato velocidad de la luz ; c= 3,10^8 m/s

a) A partir de la relación entre la fuerza y el potencial

$$f(r)=-\frac{dU}{dr} \;\Rightarrow\; \int dU=-\int f(r)\,dr=\int k\,r\,dr=\frac{1}{2}k\,r^2+Cte \quad \text{para } r=0 \;\; U=0 \Rightarrow \; Cte=0$$

$$U=\frac{1}{2}k\,r^2 \quad (1)$$

b)La cuantización del momento angular del modelo de Bohr se expresa mediante la siguiente ecuación

$$m_e\,v\,r=n\frac{h}{2\pi} \;\Rightarrow\; m_e\,v\,r=n\hbar \;\; (2)$$

m_e masa del electrón , vv su velocidad , h la constante de Planck y n un número entero

La partícula m se desplaza describiendo una circunferencia de radio r y para ello la fuerza de atracción proporciona la fuerza centrípeta

$$kr=\frac{m\,v^2}{r} \;\Rightarrow\; k\,r^2=m\,v^2 \;\; (3)$$

Despejamos de (1) $r^2 = \dfrac{m v^2}{k}$ y lo sustituimos en (2)

$$m v \left(\frac{m v^2}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = n\hbar \;\Rightarrow\; v^2 \left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n\hbar}{m} \;\Rightarrow\; v^2 = \left(\frac{n\hbar}{m}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Despejamos de (1) $v^2 = \dfrac{k r^2}{m}$ y lo sustituimos en (2)

$$m\left(\frac{k r^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} r = n\hbar \;\Rightarrow\; r^2\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{n\hbar}{m} \;\Rightarrow\; r^2 = \left(\frac{n\hbar}{m}\right)\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r^2 = \left(\frac{n\hbar}{m}\right)\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{k}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; r^2 = \left(\frac{n\hbar}{k}\right)\left(\frac{m k^2}{m^2 k}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow r^2 = \left(\frac{n\hbar}{k}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

c) La energía de la partícula en la órbita es la suma de su energía cinética y potencial

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k r^2 \;\Rightarrow E = \frac{1}{2} m \left(\frac{n\hbar}{m}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} k \left(\frac{n\hbar}{k}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; E = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2} m\left(\frac{n\hbar}{m}\right) + \frac{1}{2} k\left(\frac{n\hbar}{k}\right)\right] \;\Rightarrow\; E = n\hbar\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

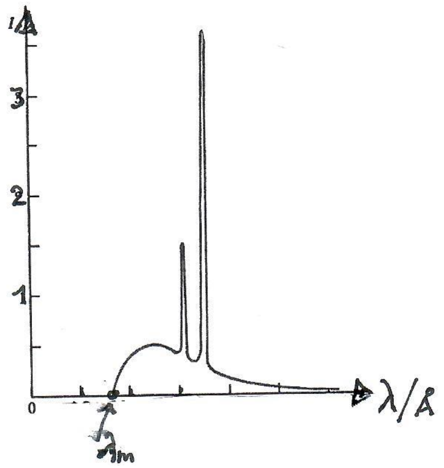
d)

$$\Delta E = (n+1)\hbar\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} - n\hbar\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \Delta E = \hbar\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = h f = h\frac{c}{\lambda} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{hc}{\hbar\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \lambda = \frac{hc}{\hbar\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{hc}{\frac{h}{2\pi}\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi c\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\pi\, 3{,}0.10^8\left(\frac{3.10^{-26}}{1180}\right)^{\frac{1}{2}} = 9{,}5.10^6 \text{ m}$$

60.- (618).- Un tubo de rayos X de 50 kV produce un espectro continuo de rayos X cuya longitud de onda mínima es 0,25 agmstron. Calcular la constante de Planck

En la figura 1 está representado el espectro de rayos X de un determinado elemento, en él aparece el espectro continuo y los dos picos que representan el espectro característico del elemento, también se señala la longitud de onda mínima del espectro continuo



Experimentalmente se comprueba que la longitud de onda mínima que aparece en el espectro continuo es independiente del material del blanco utilizado y es dependiente de la energía de los electrones, la cual depende de la tensión V del tubo de rayos X. La expresión matemática de tales hechos es:

$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24{,}10^4}{V} \quad (1)$$

λ_{min} se expresa en agmstron y V en voltios. La ecuación anterior se conoce con el nombre de regla de Duane-Hunt

.

El mecanismo que produce el espectro continuo se produce cuando los electrones que chocan contra al blanco son frenados (desacelerados) y toda partícula cargada que sufre una aceleración o desaceleración pierde energía emitiendo radiación, esto es, fotones.

Teniendo en cuenta que la λ_{min} supone energía máxima, ésta se producirá cuando un electrón con energía cinética eV convierta toda su energía en un fotón Igualando la energía del fotón con la cinética del electrón se llega a

$$eV = h\,\nu_{max} = h\frac{c}{\lambda_{min}} \Rightarrow h = \frac{e\,V\,\lambda_{min}}{c} = \frac{1{,}6.10^{-19}\cdot 50.10^{3}\cdot 0{,}250.10^{-10}}{3{,}0.10^{8}} = 6{,}67.10^{-34}\,Js$$

Esta ecuación da los mismos resultados que la experimental (1), veámoslo calculando el valor de la longitud de onda mínima

$$\lambda_{min} = \frac{1{,}24.10^4}{50.10^3} = 0{,}248\,A$$

Ricardo David Fernández Cruz   José Luis Hernández Pérez

A partir de la ecuación

$$\lambda_{max} = \frac{h\ c}{eV} = \frac{6,67.10^{-34} \cdot 3.10^{8}}{1,6.10^{-19}\ 50.10^{3}} = 2,50.10^{-11}\text{m} = 0,25\ \text{A}$$

Los picos que aparecen sobre el espectro continuo dependen de la naturaleza del blanco utilizado El mecanismo que produce este espectro característico se produce cuando un electrón incidente arranca del átomo bombardeado un electrón profundo y el hueco dejado en la estructura del elemento es ocupado por un electrón de nivel superior. La diferencia de energía entre los dos niveles da lugar a un fotón .
El estudio sistemático del espectro característico fue realizado por Mosely en 1913-14. relacionando las rayas del espectro que aparecen en las fotografías con el número atómico del elemento. Para detalles del procedimiento puede consultarse, por ejemplo, el libro Física Nuclear, de I, Kaplan. Editorial Aguilar.