61.- *(625.)-* ***Desde el borde una galaxia se lanza una nave espacial hacia el centro de la misma. La nave se desplaza en línea recta con velocidad constante. El tiempo del recorrido, medido por el reloj situado en la nave, es de 10000 años terrestres. La distancia desde el borde de la galaxia al centro es 2,850.10^{17} km. Determinar la velocidad de la nave-***

Designamos con S al sistema ligado a la galaxia S' el sistema ligado a la nave.

Para el sistema S la longitud del recorrido de la nave es una longitud propia y el tiempo del recorrido impropio. Para S' el tiempo es propio y la longitud del recorrido impropio. Analizamos el problema desde el Sistema S', para el que la longitud que debe recorrer la nave es:

$$L_N = L_P\sqrt{1-\beta^2} = 2{,}850.10^{20}\sqrt{1-\beta^2} \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \beta\, c = \frac{2{,}850.10^{20}\sqrt{1-\beta^2}}{10^4 \cdot 365 \cdot 86400} = 9{,}037.10^8\sqrt{1-\beta^2} \quad \Rightarrow \beta^2 c^2 = (9{,}037.10^8)^2(1-\beta^2) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta^2\left(2{,}9979.10^8\right)^2 = (9{,}037.10^8)^2 - (9{,}037.10^8)^2\beta^2 \quad \Rightarrow \beta^2 \cdot 9{,}065..10^{17} = 8{,}167.10^{17}$$

$$\Rightarrow \beta = 0{,}95 = \frac{v}{c} \;\Rightarrow\; v = 0{,}95\,c$$

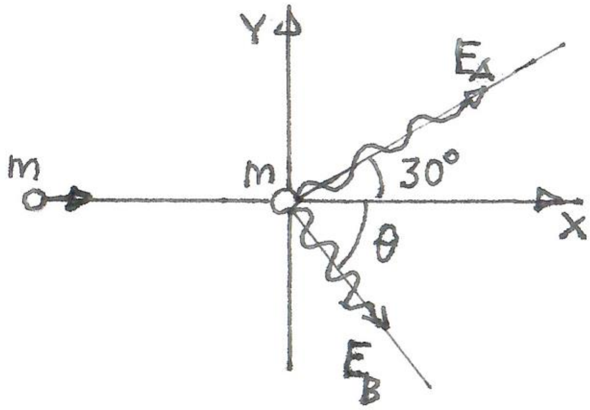
Para el sistema S el tiempo es impropio y el que se mide desde S es

$$t_S = \frac{t_N}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{10^4 \cdot 365 \cdot 86400}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{3.154.10^{11}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$v = \beta\, c = \frac{2{,}850.10^{20}}{\dfrac{3.154.10^{11}}{\sqrt{1-\beta^2}}} = 9{,}037.10^8\sqrt{1-\beta^2}$$

El resultado de v es el mismo.

62.-630.-Un electrón de masa en reposo m se desplaza por el eje X poseyendo un momento lineal p, colisiona con un positrón de la misma masa m, produciéndose una aniquilación con la aparición de dos fotones. Uno de ellos forma un ángulo de 30º con la dirección positiva del eje X, se pide calcular su energía



Designamos con E_A y E_B la energía de los fotones

Aplicamos el principio de conservación del momento lineal. Los fotones carecen de masa pero tienen momento cuyos valores son: $\frac{E_A}{c}$ y $\frac{E_B}{c}$, siendo c la velocidad de la luz

Sobre el eje X $\quad p=\frac{E_A}{c}\cos 30º+\frac{E_B}{c}\cos\theta \quad\Rightarrow\quad E_B\cos\theta = pc - E_A\cos 30º$

Sobe el eje Y $\quad E_A \operatorname{sen} 30º - E_B \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \Rightarrow E_B \operatorname{sen}\theta = E_A \operatorname{sen} 30º$

Elevando al cuadrado las ecuaciones anteriores y sumándolas

$$E_B^2 = (pc - E_A\cos 30º)^2 + E_A^2 \operatorname{sen}^2 30º = p^2c^2 + E_A^2\cos^2 30º - 2pcE_A\cos 30º + E_A^2\operatorname{sen}^2 30º \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_B^2 = p^2c^2 + E_A^2 - 2pcE_A\cos 30º \quad (1)$$

Aplicamos el principio de conservación de la energía

$$\text{Eelecrón} + \text{Epositron} = E_A + E_B \quad \Rightarrow \quad \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 = E_A + E_B$$

Despejamos E_B y elevamos al cuadrado

$$E_B^2 = \left(\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 - E_A\right)^2 \quad (2)$$

Igualamos las ecuaciones (1) y (2)

Ricardo David Fernández Cruz José Luis Hernández Pérez

$$.\, p^2c^2 + E_A^2 - 2pcE_A \cos 30^o = \left(\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 - E_A\right)^2$$

Quitamos el paréntesis del segundo miembro, Para realizar la operación de forma más cómoda, hacemos $\Lambda = \left(p^2c^2 + m^2c^4\right)^2$ .En el desarrollo siguiente las magnitudes que se agrupan se han escrito en negrita y cursiva y las que se anulan en cursiva.

$$p^2c^2 + E_A^2 - 2pcE_A \cos 30^o = \left(\Lambda + mc^2 - E_A\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\Lambda + mc^2 - E_A\right)^2 = \Lambda^2 + \boldsymbol{\mathit{\Lambda m c^2}} - \boldsymbol{\mathit{\Lambda E_A}} + \boldsymbol{\mathit{\Lambda m c^2}} + m^2c^4 - mc^2E_A - \boldsymbol{\mathit{\Lambda E_A}} - E_A mc^2 + E_A^2$$

$$\mathit{p^2c^2} - 2pcE_A \cos 30^o + \mathit{E_A^2} = \mathit{p^2c^2} + \boldsymbol{\mathit{m^2c^4}} + 2\Lambda mc^2 - 2\Lambda E_A + \boldsymbol{\mathit{m^2c^4}} - 2mc^2E_A + \mathit{E_A^2}$$

$$-2pcE_A \cos 30^o = 2m^2c^4 + 2\Lambda mc^2 - 2\Lambda E_A - 2mc^2E_A$$

$$2mc^2E_A + 2\Lambda E_A - 2pcE_A \cos 30^o = 2m^2c^4 + 2\Lambda mc^2 \Rightarrow E_A = \frac{2m^2c^4 + 2\Lambda mc^2}{2mc^2 + 2\Lambda - 2pc\cos 30^o}$$

Sustituyendo Λ

$$E_A = \frac{2m^2c^4 + 2mc^2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}}{2mc^2 + 2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - 2pc\cos 30^o} = \frac{mc^2\left(mc^2 + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}\right)}{mc^2 + \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - pc\cos 30^o}$$

63.-(634).-Los niveles de energía de un cierto átomo están dados por $E_n = -\frac{A}{n^2}$ ***. La longitud de onda de dos líneas contiguas de su espectro son:*** $\lambda_1 = 97{,}5\,nm$ ***y*** $\lambda_2 = 102{,}8\,nm$***, cuando el electrón salta de niveles excitados al fundamental. Calcular el valor de la constante A en eV.***
Datos Constante de Planck = 6,62.10^{-34} ***Js, velocidad de la luz 3,0.10***^{8} ***m/s***
Carga del electrón -1,60.10^{-19} ***C***

Las líneas del espectro aparecen cuando un electrón salta de un nivel de mayor energía al nivel fundamental (n=1)..Los saltos se producen desde los niveles n y n+1 a n=1. El salto desde n+1 a n =1 es el de mayor energía de los dos,
Si comparamos la energía de los dos fotones

$$\Delta E = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

El de mayor energía es el de menor longitud de onda

$$\Delta E_1 = \left[\frac{-A}{(n+1)^2}\right] - \frac{-A}{1^2} = A\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{h\,c}{97{,}5.10^{-9}}$$

$$\Delta E_2 = \left(\frac{-A}{n^2}\right) - \frac{-A}{1^2} = A\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{h\,c}{102{,}8.10^{-9}}$$

Dividiendo las ecuaciones

$$\frac{1 - \frac{1}{(n+1)^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{102{,}8}{97{,}5} = 1{,}054$$

Como n es un número entero resolvemos por tanteo la ecuación anterior

$$n = 2 \;\rightarrow\; \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{4}} = 1{,}185 \quad ; \quad n = 3 \rightarrow \frac{1 - \frac{1}{16}}{1 - \frac{1}{9}} = 1{,}054$$

$$A\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{h\,c}{102{,}8.10^{-9}} \;\Rightarrow\; A = \frac{6{,}62.10^{-34} \cdot 3{,}0.10^{8}}{0{,}8889 \cdot 102.8.10^{-9}} = 2{,}173.10^{-18}\,J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2.{,}173.10^{-18}\,J \cdot \frac{eV}{1{,}6.10^{-19}\,J} = 13{,}6\,eV$$

Ricardo David Fernández Cruz José Luis Hernández Pérez

64.-** (584.)- **El modelo original de Bohr para el átomo de hidrógeno suponía que un electrón de carga e y masa m recorría una circunferencia de radio a con velocidad angular ω alrededor de un núcleo mucho más pesado que tenía un carga positiva de igual magnitud e.

Se admitía que el momento cinético del electrón estaba cuantificado de modo que $m a^2 \omega = \frac{nh}{2\pi}$, h es la constante de Planck y n un entero:1, 2 …

a) Hállese a en función de n, h, m ,e y ε_o.

b) Compruebe que la energía total W_n (cinética más potencial) vale

$$W_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o a}$$

c) De acuerdo con la hipótesis de Bohr, un átomo de hidrógeno emite luz siempre que el electrón vaya de una órbita de valor n mayor a otra n menor. La frecuencia f de la luz emitida viene dada por $h\,f = W_n - W'_n$. Calcúlense la frecuencia y la longitud de onda de la luz emitida cuando un electrón cae de la órbita n=4 a la n=2

Datos.-

$h = 6{,}62.10^{-34}$ Js ,; $e = -1{,}60.10^{-19}$ C ; $m = 9{,}11.10^{-31}$kg ; $\varepsilon_o = 8{,}85.10^{-12} N^{-1} m^{-2} C^2$

Propuesto en el libro: Fundamentos de Electricidad y Magnetismo. E.M. Pugh E.W. Pugh. Editorial Aguilar

a) El electrón al girar a un distancia a del núcleo está sometido a una fuerza electrostática atractiva, dirigida al núcleo, que proporciona al electrón la fuerza centrípeta

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a^2} = m\,\omega^2 a \qquad (1)$$

De la cuantificación del momento cinético despejamos ω y lo sustituimos en (1)

$$m a^2 \omega = \frac{nh}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{nh}{2\pi m a^2} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a^2} = m\frac{n^2h^2}{4\pi^2 m^2 a^4}a \quad \Rightarrow \frac{e^2}{\varepsilon_o} = \frac{n^2h^2}{\pi m a} \Rightarrow \quad a = \frac{n^2h^2\varepsilon_o}{\pi\, m e^2} \qquad (3)$$

b) La energía del electrón es la suma de la cinética más la potencial electrostática.

$$W_n = E_C + E_P = \frac{1}{2}m v^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a} = \frac{1}{2}m\,\omega^2 a^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a}$$

Sustituimos ω de (2) en la anterior ecuación

$$W_n = \frac{1}{2} m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 a^4} a^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a} = \frac{n^2h^2}{8\pi^2 m a^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a} \qquad (4)$$

Despejamos $n^2 h^2$ de la ecuación (3) $n^2 h^2 = \dfrac{\pi m a e^2}{\varepsilon_o}$ y lo sustituimos en (4)

$$W_n = \frac{\pi m a e^2}{8\pi^2 m a^2 \varepsilon_0} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a} = \frac{e^2}{8\pi a \varepsilon_0} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{e^2}{a} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o a}\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o a} \ (5)$$

En la ecuación (5) sustituimos el valor de a, ecuación (3)

$$W_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o \dfrac{n^2h^2\varepsilon_o}{\pi m e^2}} = -\frac{e^4 m}{8\varepsilon_o^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{K}{n^2}$$

La energía de los niveles n =4 y n= 2 son respectivamente $W_4 = -\dfrac{K}{16}$; $W_2 = -\dfrac{K}{4}$ siendo $W_4 > W_2$, por ser menos negativa, siendo la diferencia de energías la que aparece en forma de fotón

$$\Delta W = -\frac{K}{16} - \left(-\frac{K}{4}\right) = \frac{-K+4K}{16} = \frac{3K}{16} = \frac{3}{16}\cdot\frac{e^4 m}{8\varepsilon_o^2 h^2} = h\frac{c}{\lambda} \ \Rightarrow \lambda = \frac{128\ \varepsilon_o^2 h^3 c}{3\ e^4\ m} \quad (6)$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$\lambda = \frac{128\left(8{,}85.10^{-12}\right)^2\left(6{,}62.10^{-34}\right)^3 3.10^8}{3\left(1{,}60.10^{-19}\right)^4 9{,}11.10^{-31}} = \frac{128\cdot(8{,}85)^2\, 6{,}62^3\cdot 3}{3\ \cdot.1{,}60^4.\cdot 9{,}11}\cdot\frac{10^{-118}}{10^{107}} = 48{,}7.10^{-8}\ \mathrm{m}$$

$\lambda = 487.10^{-9}$ m = 487 nm; corresponde con el color cian, que es intermedio entre el verde y el azul.

Ricardo David Fernández Cruz José Luis Hernández Pérez

65.- (587.-) ***Un vagón A'B' se desplaza con velocidad v respecto de una plataforma AB. La longitud propia del vagón es L' y la de la plataforma L. En los extremos del vagón y de la plataforma existen relojes sincronizados el A con el B y el A' con B'. Cuando B' pasa por delante de A los relojes marcan t. Determinar los siguientes tiempos:***

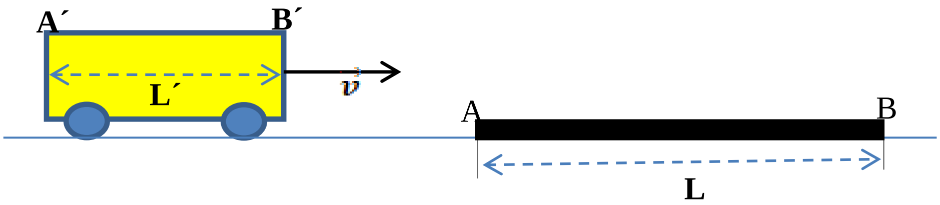
1) τ_1 ***tiempo indicado por el reloj en B cuando B' pasa ante B***

2) τ_2 ***tiempo indicado por el reloj en B cuando A' pasa ante B***

3) τ_3 ***tiempo indicado por el reloj en B' cuando B pasa ante B'***

4) τ_4 ***tiempo indicado por el reloj en A' cuando B pasa ante B'***

Resuélvase el problema mediante consideraciones relativistas.



1) Ahora observamos desde la plataforma. Cuando B' pasa ante A su reloj marca t, según el enunciado. A partir de aquí la delantera del vagón recorre la distancia L a una velocidad v.

$$\tau_1 = t + \frac{L}{v}$$

2) Seguimos observando desde la plataforma. Cuando B' pasa ante A el reloj B marca t Ahora el vagón comienza a moverse por la plataforma y cuando B' pasa ante B ha recorrido la distancia L y a continuación el vagón sigue avanzando, cuando A' pasa ante B desde la plataforma la longitud del vagón no es L' ya que la longitud se contrae. Desde la plataforma la longitud que se observa desde B es:

$$\ell = L'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \text{ , c velocidad de la luz}$$

$$\tau_2 = t + \frac{L}{v} + \frac{\ell}{v} = t + \frac{L + L'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v}$$

3) Un observador situado en el vagón que para él está en reposo "ve" que la plataforma se desplaza hacia la izquierda y cuando para él A llega ante B' su reloj marca t. Cuando B pasa ante B' la distancia L se contrae

$$\tau_3 = t + \frac{L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v}$$

4) A partir del momento anterior B pasa anta A' después de recorrer la distancia L'

$$\tau_3 = t + \frac{L\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{v} + \frac{L'}{v}$$

66.-(643).- Un mesón K que recorre el laboratorio se descompone en dos me.-sones π. Uno de los mesones permanece en reposo ¿Cuál es la energía cinética de K? ¿Cuál es la energía cinética del mesón?

Datos.- Masa en reposo del mesón K =494 MeV/c²; masa en reposo del mesónπ=137 MeV/c²

Propuesto en el libro Relatividad especial de A.P. French.

Puesto que un des mesones permanece en reposo el otro tiene momento, el cual es igual al momento del mesón K ya que en el proceso existe conservación del momento. Recordemos la igualdad relativista

$$E^2 = m_o^2 c^4 + p^2c^2 = E_o^2 + p^2c^2$$

Eo es la energía en reposo de la partícula

Aplicamos la ecuación anterior al mesón K y al mesón π en movimiento

$$(p^2c^2)_K = E_K^2 - E_{oK}^2 \quad ; \quad (p^2c^2)_\pi = E_\pi^2 - E_{o\pi}^2$$

Al conservarse el momento en el proceso

$$E_K^2 - E_{oK}^2 = E_\pi^2 - E_{o\pi}^2 \quad \Rightarrow \quad E_K^2 - E_\pi^2 = E_{oK}^2 - E_{o\pi}^2 = 494^2 - 137^2 \quad (1)$$

El proceso transcurre con conservación de la energía, por lo que

$$E_K = E_\pi + E_{o\pi}$$

Sustituyendo en (1) la ecuación anterior

$$(E_\pi + E_{o\pi})^2 - E_\pi^2 = 494^2 - 137^2 \Rightarrow E_\pi^2 + 137^2 + 2 \cdot 137\, E_\pi - E_\pi^2 = 494^2 - 137^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_\pi = \frac{494^2 - 2 \cdot 137^2}{2 \cdot 137} = 754 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad E_K = 754 + 137 = 891 \text{MeV}$$

Energía cinética del mesón K $\quad E_K = E_{oK} + E_C \quad \Rightarrow \; E_C = 891 - 494 = 397 \text{ MeV}$

Energía cinética del mesón π $\quad E_\pi = E_{o\pi} + E_C \quad \Rightarrow \; E_C = 754 - 137 = 617 \text{ MeV}$