PROBLEMAS DE

LAS OLIMPIADAS

INTERNACIONALES

DE FÍSICA

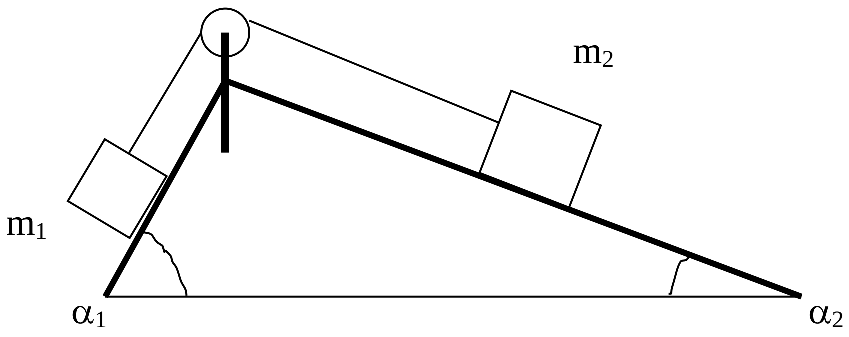
José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

5ª OLIMPIADA DE FÍSICA. SOFIA. BULGARIA . 1971

1.-Las masas m_1 y m_2 que están unidas entre sí por una cuerda que pasa por una polea, están situadas en lo más alto de una cuña que tiene forma de dos planos inclinados. La masa de la cuña es m y los ángulos de los planos son α_1 y α_2 respectivamente.



Inicialmente el sistema se encuentra en reposo ¿Cuál es la aceleración de la cuña y de las masas m_1 y m_2 cuando el sistema se deja en libertad?¿Cuál es la condición para que la cuña permanezca en reposo?. Se supone que los rozamientos son nulos. 5ª Olimpiada Internacional de Física. Sofía. Bulgaria. 1971

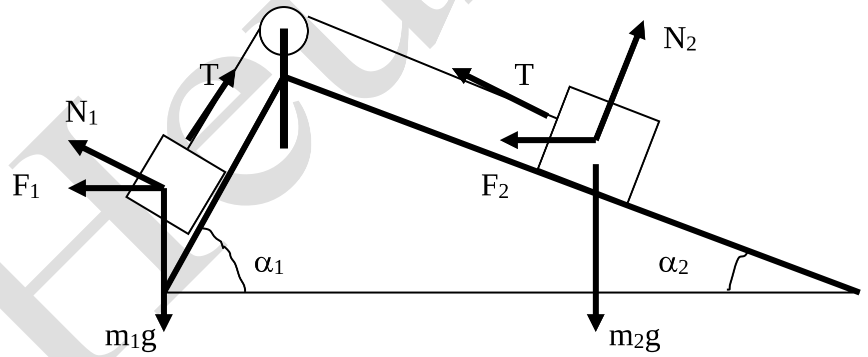


Fig 1

Designamos con a la aceleración de la cuña respecto del suelo. Tomamos como sistema de referencia uno ligado a la cuña. Este sistema es no inercial ya que la cuña está acelerada. El diagrama de fuerza del sistema está en la figura 1.

F_1 y F_2 son fuerzas de inercia que aparecen debido a que el sistema de referencia elegido es no inercial. Aplicamos la segunda ley de Newton a cada una de las masas, admitiendo que la masa m_1 desciende.

$$m_1 g\ \text{sen}\alpha_1 - T + m_1\ a\ \cos\alpha_1 = m_1 a_r$$

$$T - m_2 g\ \text{sen}\alpha_2 + m_2\ a\ \cos\alpha_2 = m_2 a_r$$

a_r significa la aceleración relativa de las masas respecto del sistema elegido, que es el ligado a la cuña.. Si sumamos las dos ecuaciones para eliminar T nos queda:

$$m_1 g\ \text{sen}\alpha_1 - m_2 g\ \text{sen}\alpha_2 + a\left(m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2\right) = a_r\left(m_1 + m_2\right) \quad (1)$$

Transcurrido un cierto tiempo Δt, las masas llevan respecto de la cuña una cierta velocidad que llamamos $v_r = a_r\,\Delta t$ y la cuña se desplaza con una velocidad $v = a\Delta t$. La velocidad de cada masa respecto del suelo

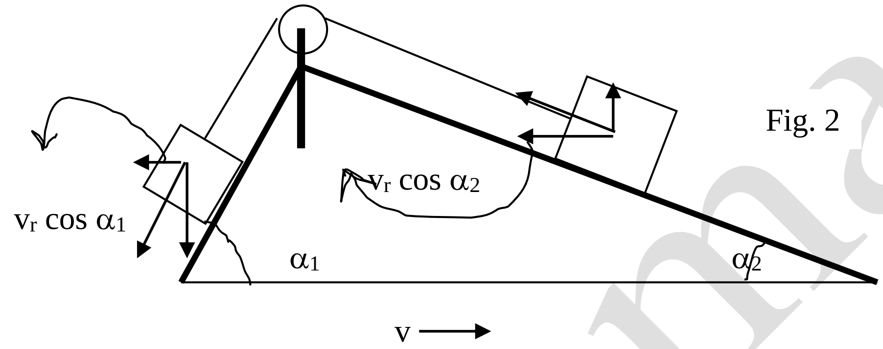


Fig. 2

se deduce de la observación de la figura 2 y valen:

$$v - v_r \cos\alpha_1 \qquad \text{y} \qquad v - v_r \cos\alpha_2$$

Sobre el sistema no actúan en dirección horizontal fuerzas exteriores, luego podemos aplicar el principio de la conservación de la cantidad de movimiento

$$mv + m_1\left(v - v_r \cos\ \alpha_1\right) + m_2\left(v - v_r \cos\ \alpha_2\right) = 0\,;$$

$$mv\ \ \Delta t + m_1\left(v - v_r \cos\ \alpha_1\right)\Delta t + m_2\left(v - v_r \cos\ \alpha_2\right)\Delta t = 0$$

$$ma + m_1\left(a - a_r \cos\ \alpha_1\right) + m_2\left(a - a_r \cos\ \alpha_2\right) = 0$$

$$ma + m_1 a - m_2 a\ \ = a_r\left(m_1 \cos\ \alpha_1 + m\ \ \cos\ \alpha_2\right) \quad (2)$$

Se despeja a_r de la ecuación (2) y su valor se lleva a la ecuación (1)

$$a_r = \frac{a\left(m + m_1 + m_2\right)}{m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2}$$

$$m_1 g \text{sen}\alpha_1 - m_2 g \text{sen}\alpha_2 + m_1 a \cos\alpha_1 + m_2 a \cos\alpha_2 = \left(m_1 + m_2\right)\frac{a\left(m + m_1 + m_2\right)}{m_1 \cos\alpha_1 + m_2 \cos\alpha_2}$$

Si se opera resulta finalmente:

$$a = g\frac{\left(m_1\text{sen}\alpha_1 - m_2\text{sen}\alpha_2\right)\left(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)\left(m + m_1 + m_2\right) - \left(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2\right)^2}$$

Si en la ecuación (2) se despeja a en función de a_r y se lleva el valor a la ecuación (1)

$$a_r = g\frac{\left(m + m_1 + m_2\right)\left(m_1\text{sen}\alpha_1 - m_2\text{sen}\alpha_2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)\left(m + m_1 + m_2\right) - \left(m_1\cos\alpha_1 + m_2\cos\alpha_2\right)^2}$$

Para que la cuña esté en reposo la aceleración a y la a_r deben ser nulas, lo cual ocurre si la expresión:

$$m_1\text{sen}\alpha_1 - m_2\text{sen}\alpha_2 = 0$$

O sea que las masas han de ser inversamente proporcionales a los senos de los ángulos de la cuña

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\text{sen }\alpha_2}{\text{sen }\alpha_1}$$

2.-Un tubo vertical de vidrio de sección S =1,0 cm^2 contiene una cantidad desconocida de hidrógeno. El extremo superior del tubo está cerrado. El otro extremo está abierto y sumergido en una cubeta con mercurio (el conjunto es un aparato de Torricelli). El tubo de vidrio y la cubeta están colocados en el interior de un cilindro provisto de un pistón móvil. El cilindro contiene aire a la temperatura T_0=273 K y a la presión P_0=1,334.10^5 Pa. En esta situación (situación 1) la altura de la columna de mercurio en el tubo por encima del nivel de mercurio de la cubeta es 70 cm.
Se desplaza el pistón del cilindro hacia arriba (una expansión isotérmica del aire) hasta que la altura del mercurio es h_1=40 cm, y la presión del aire P_1 =8,00.10^4 Pa. Esto constituye la situación 2.

A partir de la situación 2 se calienta el aire del cilindro a volumen constante hasta una temperatura T_2, entonces la altura del mercurio es h_2=50 cm (situación 3).

A partir de la posición 3 se expansiona el aire del cilindro, sin variar su presión, hasta que la altura del mercurio es h_3= 45 cm (situación 4).
Se admite que el sistema está en equilibrio mecánico y térmico durante todos los procesos.

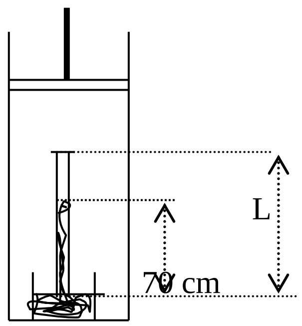
Se pregunta ¿cuál es la masa m de hidrógeno, la temperatura intermedia T_2 (situación 2) y la presión P en el estado final (situación 4)?
La densidad del mercurio a la temperatura T_0 es ρ_o=1,36.10^4 kg/m^3, el coeficiente de expansión del mercurio β =1,84.10^{-4} K^{-1} , la constante de los gases R =8,314 J/(mol K).
La expansión térmica del vidrio y la variación del nivel de mercurio en la cubeta se consideran despreciables.
Nota.- Si ΔT es el intervalo de variación de la temperatura del sistema entonces $\beta\ \Delta T = x << 1$m, se puede usar la aproximación $\frac{1}{1+x} = 1 - x$
5ª Olimpiada Internacional de Física. Sofía. Bulgaria 1971

Para resolver el problema admitimos que el hidrógeno y el aire se comportan como gases ideales y que en las cuatro situaciones existe equilibrio entre el aire y el hidrógeno. Designamos con L a la altura del tubo de mercurio del aparto de Torricelli y dado que su sección es la unidad, es por lo que numéricamente el volumen del tubo coincide numéricamente con su altura.

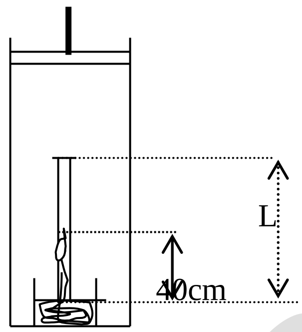
situación 1:

L representa la altura total de la columna de vidrio y 70 cm es la altura de la columna de mercurio. Como la presión del aire sobre la cubeta debe ser igual a la que ejerce el hidrógeno más la columna de mercurio, resulta:

$1{,}334.10^{5} = pH_2 + \rho gh \quad ; \quad pH_2 = 1{,}334.10^{5}-1{,}36.10^{4}*9{,}8*0{,}70 = 4{,}01.10^{4}$ Pa



Situación 1



Situación 2

En la situación 2 la presión del hidrógeno es:

$$8{,}00.10^{4} = pH_2 + \rho gh \quad ; \quad pH_2 = 8{,}00.10^{4}-.1{,}36.10^{4}*9{,}8*0{,}40 = 2{,}67.10^{4}\ \text{Pa}$$

La cantidad de gas hidrógeno entre 1 y 2 no ha variado ni tampoco la temperatura. Aplicamos la ley de Boyle-Mariote para este gas

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad ; 4{,}01.10^{4} * (L-0{,}70) * S = 2{,}67.10^{4} * (L-0{,}40) * S \quad ; \quad L = 1{,}30 \ \ \text{m}$$

En todas las situaciones la masa de hidrógeno no ha variado ni tampoco la de aire. Podemos escribir en forma de tabla los volúmenes de aire e hidrógeno, sus presiones y temperaturas:

AIRE

	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4
Presión /Pa	$1{,}334.10^{5}$	$8{,}00.10^{4}$	P_{3A}	$P_4=P_{3A}$
Volumen/m³	V_1	V_2	V_2	V_4
Temperatura/K	273	273	T_2	T_4

HIDRÓGENO

	Situación 1	Situación 2	Situación 3	Situación 4
Presión /Pa	$4{,}01.10^{4}$	$2{,}67.10^{4}$	$P_3 = P_{3A}-\rho_3 g0{,}50$	$P_4 = P_{3A}-\rho_4 g0{,}45$
Volumen/ m³	(1,30-0,70)*S	(1,30-0,40)*S	(1,30-0,50)*S	(1,30-0,45)*S
Temperatura/K	273	273	T_2	T_4

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre las situaciones (2) y (3) para el aire y entre (1) y (3) para el hidrógeno:

$$\frac{8,00.10^4}{273}=\frac{P_{3A}}{T_2}\quad(1)\quad;\quad\frac{4,01.10^4*0,60*S}{273}=\frac{\left(P_{3A}-\rho_3 g0,50\right)*0,80*S}{T_2}\quad(2)$$

Si aplicamos la ecuación de los gases para el hidrógeno entre las situaciones (3) y (4)

$$\frac{\left(P_{3A}-\rho_3 g0,50\right)*0,80*S}{T_2}=\frac{\left(P_{3A}-\rho_4 g0,50\right)*0,85*S}{T_4}\quad(3)$$

La variación del volumen con la temperatura de referencia cero grados es la siguiente:

$$V_3=V_o\left[1+\beta\ \left(T_2-273\right)\right]\Rightarrow\rho_3=\frac{m}{V_3}=\frac{m}{V_o\left[1+\beta\ \left(T_2-273\right)\right]}=\rho_o\left[1-\beta\ \left(T_2-273\right)\right]$$

A partir de las ecuaciones (1) y (2)

$$293T_2=P_{3A};110,16T_2=293T_2-\left(1,36.10^4\left[1-1,84.10^{-4}\left(T_2-273\right)\right]\right)*9,8*0,5$$

Operando resulta T_2 = 359 K , P_{3A}=1,05.10^5 Pa , ρ_3 =1,34.10^4 kq/m^3

$$\rho_4=1,36.10^4\left[1-1,84.10^{-4}\left(T_4-273\right)\right]=1,43.10^4-2,50\ T_4$$

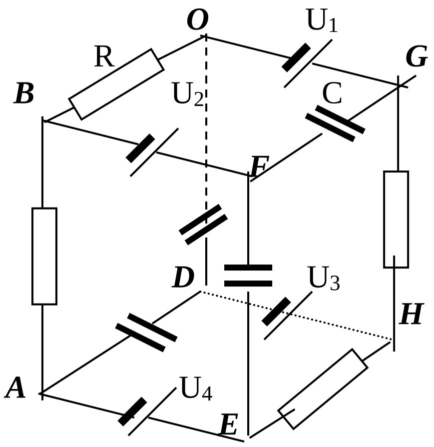
A partir de la ecuación (3)

$103,14\ T_4=1,05.10^5-\left(1,43.10^4-2,50\ T_4\right)*9,8*0,5$. Operando, T_4 = 384,3 K

Para calcular la masa de hidrógeno operamos con la ecuación de los gases con los datos de la situación 1

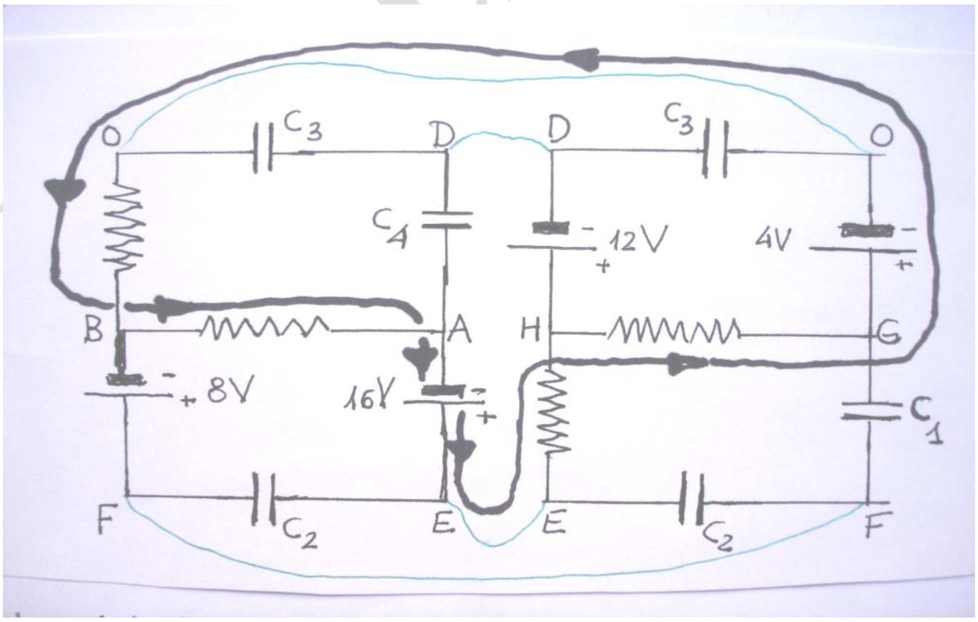
$$P_oV_0=\frac{m}{M}RT_0\Rightarrow 4,01.10^4*\left(10^{-4}*0,60\right)=\frac{m}{2.10^{-3}}*8,314*273\Rightarrow m=2,12.10^{-6}\,kg$$

3.-Cuatro resistencias iguales, cada una de valor R, cuatro condensadores de 1μF cada uno y cuatro pilas cuyas fuerzas electromotrices son: U_1 = 4 V , U_2 = 8V, U_3= 12V y U_4 = 16 V y reasistencias internas despreciables, están conectadas en las aristas de un cubo tal como indica la figura inferior



A) Calcular los voltajes y cargas de cada condensador b) calcular la carga del condensador situado en la arista EF si se cortocircuitan los puntos H y B. 5ª Olimpiada Internacional de Física. Sofía.Bulgaria 1971

a) El circuito se ve mejor si tratamos de colocarlo en forma plana. Para ello imaginemos que cortamos el cubo por el plano ODEF y aplanamos cada una de las mitades, resulta lo siguiente:



Al aplanar el circuito aparecen algunos puntos repetidos (OD y OF), como son iguales, en la figura aparecen unidos por una línea curva de trazo fino. Una vez alcanzado el régimen estacionario en el circuito, los condensadores están cargados y por ellos no pasa corriente, de ello se deduce que únicamente es posible que haya circulación de corriente a través de las pilas y las resistencias. La línea curva de trazo grueso señala el camino que puede seguir la corriente en ese circuito.

Aplicamos la ley de Ohm en ese circuito: $I=\frac{\sum\varepsilon}{\sum R}=\frac{16-4}{R+R+R+R}=\frac{12}{4\mathrm{R}}=\frac{3}{\mathrm{R}}$

Al punto A de la damos arbitrariamente el potencial $\mathbf{V_A=0}$, V_B-V_A = IR =3 V ; $\mathbf{V_B=3\ V}$

* V_O-V_B = I R = 3 V ; $\mathbf{V_O = 6\ V}$
* V_E-V_H = I R = 3 V ; $\mathbf{V_H = 13\ V}$
* V_D + 12 = V_H =13 V ; $\mathbf{V_D = 1\ V}$

* $\mathbf{V_E = 16\ V}$
* V_H-V_G = I R = 3 V ; $\mathbf{V_G = 10\ V}$
* V_B + 8 = V_F =11 V ; $\mathbf{V_F = 11\ V}$

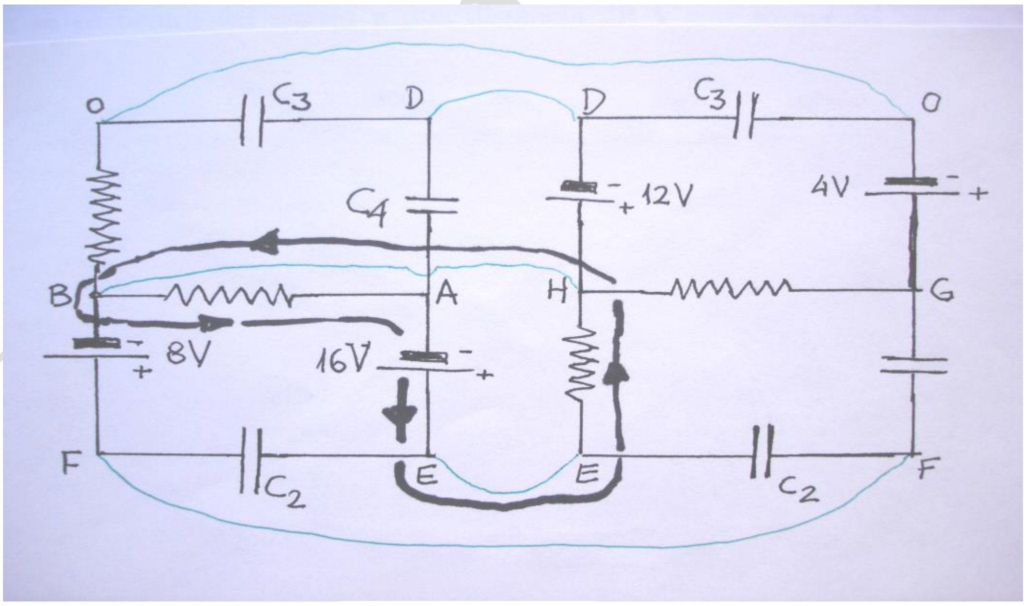
Condensador en la arista OD : $Q=C_{OD}V_{OD}=1.10^{-6}F*5V=5.10^{-6}C$

Condensador en la arista FE : $Q=C_{FE}V_{EF}=1.10^{-6}F*5V=5.10^{-6}C$

Condensador en la arista FG : $Q=C_{FG}V_{FG}=1.10^{-6}F*1V=1.10^{-6}C$

Condensador en la arista AD : $Q=C_{AD}V_{AD}=1.10^{-6}F*1V=1.10^{-6}C$

Al unir el punto H con el B la corriente puede seguir el camino indicado en la figura inferior mediante la línea curva de trazo grueso. A esa malla aplicamos la ley de Ohm generalizada



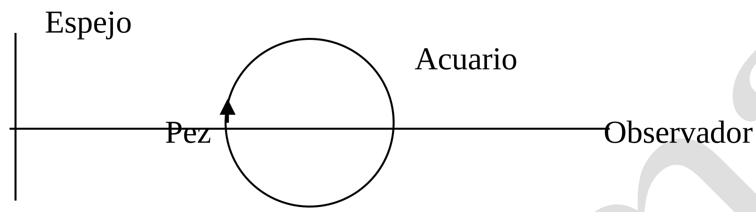
$$\mathrm{I}=\frac{\sum\varepsilon}{\sum\mathrm{R}}=\frac{16}{2\mathrm{R}}=\frac{8}{\mathrm{R}}$$

Si al punto A le asignamos potencial cero, el E se encuentra a 16 V y el H

V_E-V_H = IR = (8/R)*R = 8 V ; $\mathbf{V_H = 8\ V}$; $V_F=V_B+8=16\ \mathrm{V}$

Por tanto, la diferencia de potencial entre los extremos del condensador de la arista FE es nula y por consiguiente está descargado.

4.-Un acuario esférico de vidrio de radio R se sitúa frente a un espejo plano, colocado en posición vertical, tal como indica la figura. Las paredes del acuario son delgadas y el centro del acuario está situado a una distancia 3R del espejo. Un observador situado lejos mira hacia el centro del acuario desde la parte opuesta del espejo. Un pequeño pez nada con velocidad v y está situado en la posición más próxima al espejo. Calcular la velocidad de las imágenes del pez que ve el observador Índice de refracción del agua del acuario 4/3. 5ª Olimpiada Internacional de Física. Sofía. Bulgaria 1971



Resolvemos el problema admitiendo que los rayos están en la zona paraxial con lo que el valor del seno y de la tangente son numéricamente iguales a los ángulos cuando éstos se miden en radianes.

El observador al mirar al pez directamente los rayos luminosos pasan desde el agua tal como indica la figura 1.
Llamamos a la altura del pez en un instante determinado h y a la de su imagen AB = H.
Para construir la imagen se ha trazado un rayo paralelo al eje principal que incide en el punto I, formando un ángulo de incidencia i y de refracción re. Otro rayo pasa por el centro del acuario incide en M y abandona el acuario sin

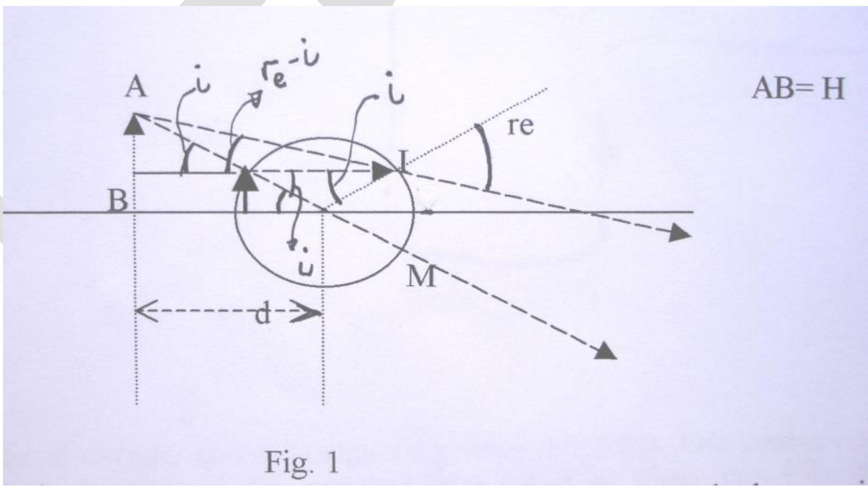


Fig. 1

sufrir desviación. La prolongación de ambos rayos forma la imagen virtual AB. La distancia de la imagen al centro del acuario se designa por d.
De la figura se deduce:

$$\mathrm{tg}(re-i)=\frac{H-h}{d+R}\quad ;\quad \mathrm{tagi}=\frac{H-h}{d-R}\qquad ;\qquad (d-R)\ \mathrm{tgi}=(d+R)\ \mathrm{tg}(re-i))$$

Si estamos en la zona paraxial

$$(d\text{-}R)\ i = (d+R)\ (re - i)\quad .$$

Por otra parte la ley de Snell se escribe para dicha zona n i = re, siendo n el índice de refracción del agua . Combinando ambas ecuaciones resulta: $(d - R)\ i = (d+R)\ (ni - i)$ y resolviendo se deduce que:

$$d = \frac{nR}{2-n} = \frac{\frac{4}{3}R}{2-\frac{4}{3}} = 2R \quad \text{y} \quad \text{también } H = 2h$$

Imaginemos que la cabeza del pez es la punta de la flecha indicada en la figura 1, si la cola del pez se desplaza hasta ocupar la posición de la cabeza con una velocidad v, la imagen al ser de doble tamaño recorre una distancia doble de la longitud del pez, esto es, se mueve con velocidad 2v hacia arriba

El pez se encuentra del espejo a una distancia 2R y éste forma del pez una imagen situada a la izquierda del espejo. Esa imagen es del mismo tamaño que el pez y dista del centro del acuario 5R. Esta imagen es objeto virtual para la superficie del acuario que está más próxima al espejo. El objeto virtual está en el aire y penetra en el agua, pasa de un medio de menor a mayor índice de refracción. Luego los rayos pasan del agua al aire hasta formar la imagen definitiva (fig. 2).Obsérvese que el rayo paralelo al eje principal se desvía al penetrar en el agua y lo vuelve a hacer al pasar al aire

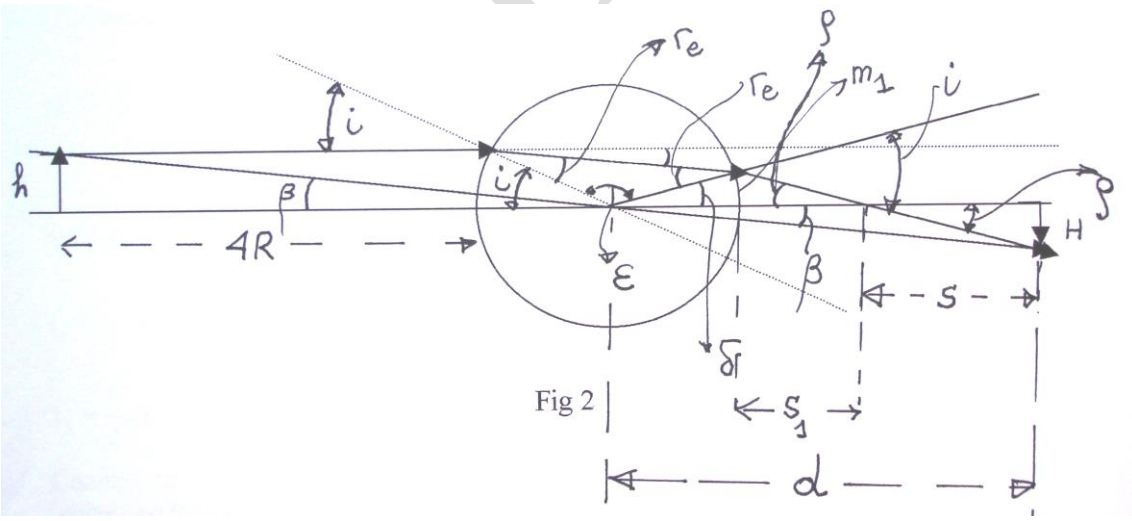


Fig 2

En la figura 2, la distancia del centro del acuario al objeto virtual es 5R y a la imagen la designamos con d. Con h se designa la altura del objeto y con H la de la imagen.
Vamos en primer lugar a ver la relación entre los ángulos señalados en la figura 2:

$$\beta = \frac{h}{5R} \quad ; \quad \beta = \frac{H}{d} \quad ; \quad i = \frac{h}{R} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{i}{5}$$

$$\varepsilon + 2r_e = 180^o \quad ; \quad i + \varepsilon + \delta = 180^o \quad \Rightarrow \quad \delta = 2r_e - i$$

$$\rho + \delta = i \,;\, \delta = \frac{m_1}{R}$$

De la figura 2 se deduce que:

$$\rho = \frac{H}{s} \quad ; \quad \rho = \frac{m_1}{s_1} \quad \Rightarrow s + s_1 = d - R = \frac{H + m_1}{\rho} = \frac{H + m_1}{i - \delta} = \frac{d\beta + \delta R}{i - \delta} = \frac{\frac{di}{5} + R\left(2r_e - i\right)}{i - \left(2r_e - i\right)}$$

Si en la última expresión aplicamos la ley de Snell: $i = n\,r_e$, resulta:

$$d - R = \frac{\frac{dnr_e}{5} + R\left(2r_e - nr_e\right)}{nr_e - \left(2r_e - nr_e\right)} = \frac{\frac{nd}{5} + 2R - nR}{2\left(n - 1\right)} \Rightarrow d \cdot 2(n-1) - \frac{nd}{5} = R \cdot 2(n-1) + 2R - nR$$

$$\Rightarrow d\,\left(2n - 2 - \frac{n}{5}\right) = nR \quad \Rightarrow d = \frac{nR}{\frac{9n}{5} - 2} = \frac{\frac{4}{3}R}{\frac{9*4}{5*3} - 2} = \frac{10R}{3}$$

La relación entre el tamaño del objeto y de la imagen es: $\frac{h}{5R} = \frac{H}{d} \quad ; \quad \frac{H}{h} = \frac{\frac{10R}{3}}{5R} = \frac{2}{3}$

La imagen es real e invertida, es decir, que el pez y su imagen se desplazan en sentido contrario Así la imagen obtenida se desplaza hacia abajo con una velocidad 2/3 v.