1.- Un dispositivo óptico está fabricado con vidrio de n = 1,5, tiene la forma de un cuarto de cilindro (ver figura 1). Sobre él y por la cara plana se hacen incidir rayos luminosos a distintas alturas h, se pide encontrar una expresión que nos dé los valores de x positivos para los que la luz incide sobre la recta AB

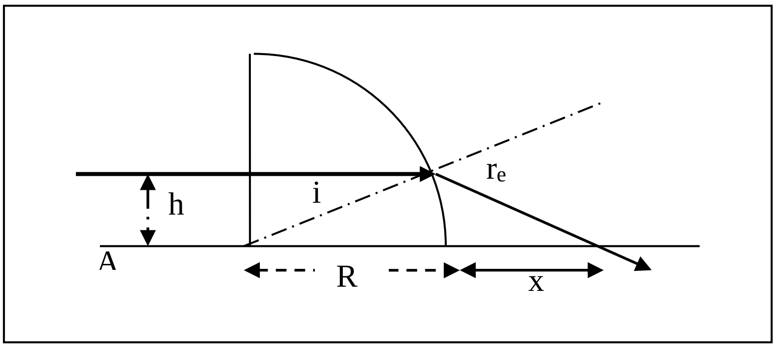


Fig. 1

Como la luz incide desde el vidrio al aire, esto es, desde un medio de mayor índice a uno de menor, habrá una altura máxima h_{max}, para la que el rayo refractado forme un ángulo de 90º, por encima de ese h_{max} los rayos se reflejarán y no se refractarán. Para ese h_{max} corresponde un x mínimo.

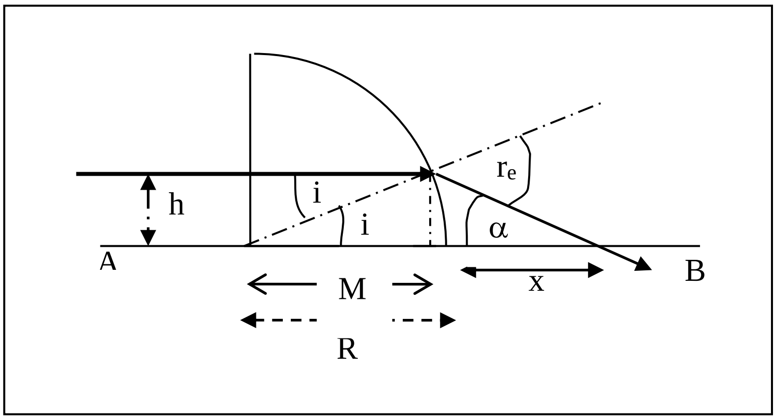


Fig.2

Según la ley de Snell n sen i = 1 sen r_e

De la figura 2 se deduce: $\text{sen } i = \dfrac{h}{R} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } r_e = \dfrac{nh}{R} \quad ; \quad \text{tag } i = \dfrac{h}{M}$

$$\text{tag } \alpha = \frac{h}{x + R - M} = \frac{h}{x + R - \dfrac{h}{\text{tag } i}}$$

Pero el ángulo alfa es igual a $\alpha + i = r_e \quad \Rightarrow \quad \alpha = r_e - i$

$$\operatorname{tag}\left(r_e - i\right) = \frac{h}{x + R - \dfrac{h}{\operatorname{tag}\ i}} \quad (1)$$

Cuando r_e = 90º se obtendrá el valor de x mínimo

$$\operatorname{tag}\left(90º - i\right) = \frac{h}{x_{min} + R - \dfrac{h}{\operatorname{tag}\ i}} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tag}\ i} = \frac{h}{x_{min} + R - \dfrac{h}{\operatorname{tag}\ i}} \Rightarrow x_{min} = h\left(\operatorname{tag}\ i + \frac{1}{\operatorname{tag}\ i}\right) - R \Rightarrow$$

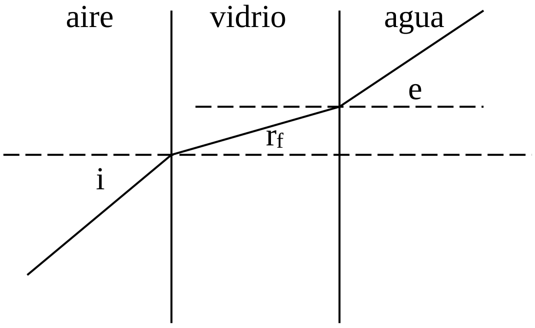
$$x_{min} = R\ \operatorname{sen}\ i\left(\frac{1 + \operatorname{tag}^2 i}{\operatorname{tag}\ i}\right) - R = R\ \operatorname{sen}\ i\left(\frac{1}{\cos^2 i\ \ \operatorname{tag}\ i}\right) - R = R\left(\frac{1}{\cos\ i} - 1\right)$$

El valor del ángulo de incidencia para el que r_e = 90º, se calcula a partir de la ley de Snell $\quad n\ \operatorname{sen} i = \operatorname{sen} 90 \quad ; \quad \operatorname{sen} i = \dfrac{1}{1{,}5} = \dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos\ i = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 i} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$x_{min} = 5 * \left(\frac{3}{\sqrt{5}} - 1\right) = 1{,}708\ \ \text{cm}$$

2.-Sobre la pared lateral de un acuario de vidrio y desde el aire se envía un rayo luminoso con un cierto ángulo de incidencia. Se pide determinar si existe un ángulo de incidencia tal que después de penetrar en el vidrio no lo haga en el agua.
Índice de refracción del vidrio 1,5 y del agua 1,33.

El esquema de la marcha de los rayos es el de la figura

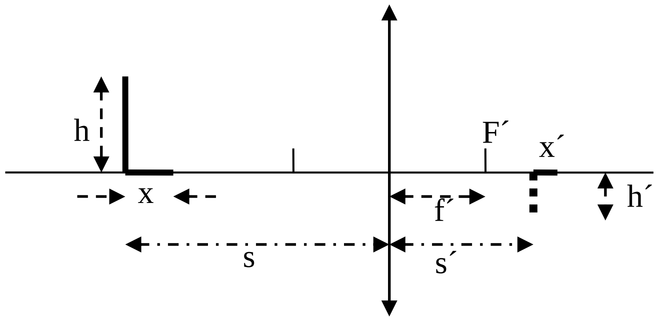


La aplicación de la ley de Snell

$$1 \text{ sen } i = 1{,}5 \text{ sen} r_f \quad ; \quad 1{,}5 \text{ sen} r_f = 1{,}33 \text{ sen } e$$

Si queremos que el rayo no penetre en el agua entonces e = 90º, luego el seno del ángulo de incidencia tenía que valer 1,33 y eso no es posible, en consecuencia, cualquiera que sea el ángulo de incidencia el rayo llegará al agua.

3.- Un objeto en forma de L se encuentra a la izquierda de una lente convergente de distancia focal f´. Las dimensión vertical del objeto el h y la horizontal x, tal como se indica en la figura.



El aumento transversal es $\beta = \frac{h'}{h}$ ***y el longitudinal*** $\alpha = \frac{x'}{x}$***. Encontrar la relación entre ambos aumentos y en particular cuando x sea muy pequeño comparado con s.***

De la figura se deduce que: $\beta = \frac{h'}{h} = \frac{s'}{s}$

La ecuación de las lentes delgadas

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s} = \frac{f'+s}{f's} \quad \Rightarrow \quad s' = \frac{f's}{f'+s}$$

$$\beta = \frac{\frac{f's}{f'+s}}{s} = \frac{f'}{f'+s}$$

Aplicando de nuevo la ecuación de las lentes delgadas:

$$-\frac{1}{s-x} + \frac{1}{s'+x'} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'+x'} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{s-x} = \frac{f'+s-x}{f'(s-x)} \quad \Rightarrow \quad x' = \frac{f'(s-x)}{f'+s-x} - s' \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' = \frac{f'(s-x)}{f'+s-x} - \frac{f's}{f'+s} = \frac{(f's - f'x)(f'+s)}{(f'+s)(f'+s-x)} = \frac{f'^2 s + f's^2 - f'^2 x - f'xs - f'^2 s - f's^2 + f'xs}{(f'+s)(f'+s-x)} \Rightarrow$$

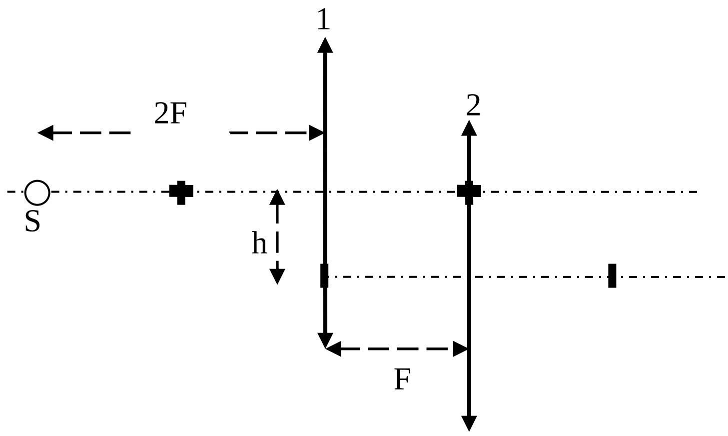
$$x' = \frac{-f'^2 x}{(f'+s)(f'+s-x)}$$

$$\alpha = \frac{x'}{x} = \frac{-f'^2}{(f'+s)(f'+s-x)} = \frac{-f'^2(f'+s)}{(f'+s)^2(f'+s-x)} = \frac{-\beta^2}{\frac{(f'+s-x)}{(f'+s)}} = \frac{-\beta^2}{1 - \frac{x}{f'+s}}$$

En el caso de que x sea muy pequeño frente s , la fracción del denominador es un número muy pequeño , y para este caso

$$\alpha = \beta^2$$

4.- Dos lentes convergentes tienen la misma distancia focal F y están situadas a una distancia F una de la otra. La segunda lente está a una altura h por debajo de la primera tal como indica la figura.



En el eje principal de la lente 1 está situado un punto luminoso S a una distancia 2F de dicha lente. Calcular la distancia en línea recta entre S y la imagen S_1 que forman las dos lentes.

Para determinar donde se forma la imagen de S_1 escogemos dos rayos luminosos procedentes de S. Uno que se desplaza por el eje principal de 1 y otro que se dirige desde S a la lente 1 apuntando al lugar donde se encuentra el foco objeto de la lente 2.

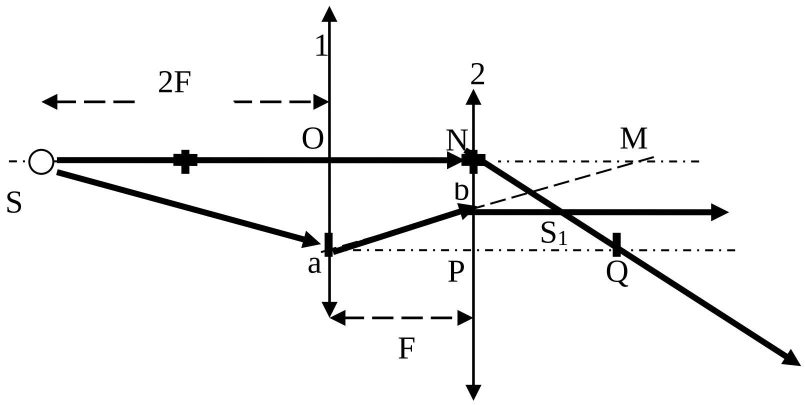
El primer rayo atraviesa la lente 1 sin desviarse y llega a la dos, en ella se refracta y pasa por el foco imagen de la lente 2 ya que es un rayo paralelo a su eje principal.

Si sólo estuviese la lente 1 podremos calcular dónde se forma la imagen de S, aplicando las formulas de las lentes delgadas

$$-\frac{1}{-2F}+\frac{1}{s_2}=\frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_2}=\frac{1}{F}-\frac{1}{2F} \quad \Rightarrow \quad s_2=2F$$

En la figura ese lugar está señalado con la letra M.

El segundo rayo procede de S y llega a la lente1 en el foco objeto de la lente 2 , se refracta y camina hacia el punto M , pero en su camino se encuentra con la lente 2, para ésta es un rayo que procede del foco objeto y por tanto después de atravesar la lente sale paralelo a su eje principal. En la figura se observa dónde se cortan los dos rayos considerados y ese es el lugar donde se forma la imagen S_1.



Comparando los triángulos semejante aOM y BNM

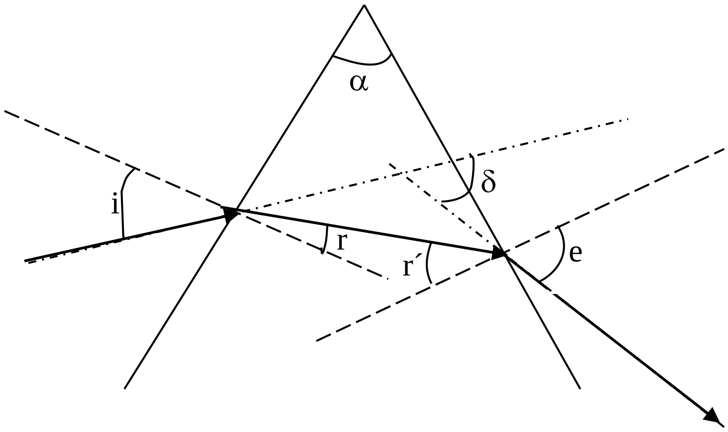
$$\frac{aO}{OM}=\frac{bN}{NM}\quad\Rightarrow\quad\frac{h}{2F}=\frac{bN}{F}\quad\Rightarrow\quad bN=\frac{h}{2}$$

Comparando los triángulos semejantes bNS_1 y PNQ

$$\frac{Nb}{bS_1}=\frac{NP}{PQ}\quad\Rightarrow\quad\frac{\frac{h}{2}}{bS_1}=\frac{h}{F}\quad\Rightarrow\quad bS_1=\frac{F}{2}$$

$$SS_1=\sqrt{\left(2F+F+\frac{F}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{49F^2+h^2}$$

5.- Encontrar la relación general entre el ángulo de desviación δ de un prisma, de ángulo α, e índice de refracción n, situado en el aire (n=1) en función de α, i, n, r, r´, e,(ver figura) y a partir de esa ecuación deducir la expresión para el ángulo de desviación mínima.
Determinar el ángulo de incidencia que produce desviación mínima en un prisma de a =60º y n=1,5.



De la figura se deduce que $i - r + e - r' = \delta \quad ; \quad r + r' = \alpha \quad \Rightarrow \quad \delta = i + e - \alpha$

Aplicando la ley de Snell

$$\text{sen } i = n \ \text{sen } r \quad ; \quad n \ \text{sen } r' = \text{sen } e$$

$$\text{sen } i + \text{sen } e = 2 \ \text{sen}\frac{i+e}{2}\cos\frac{i-e}{2} = n \ (\text{sen } r + \text{sen } r')$$

Sustituyendo de (1)

$$2 \ \text{sen}\frac{i+e}{2}\cos\frac{i-e}{2} = n \ (\text{sen } r + \text{sen } r') \Rightarrow 2 \ \text{sen}\frac{\delta+\alpha}{2} = \frac{n \ (\text{sen } r + \text{sen } r')}{\cos\frac{i-e}{2}} \quad (2)$$

$$\text{sen} r + \text{sen} r' = 2\text{sen}\frac{r+r'}{2}\cos\frac{r-r'}{2} = 2 \ \text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{r-r'}{2} \quad (3)$$

Llevando (3) a (2)

$$2 \ \text{sen}\frac{\delta+\alpha}{2} = \frac{n \cdot 2 \ \text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-e}{2}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\frac{\delta+\alpha}{2} = n \cdot \text{sen}\frac{\alpha}{2}\frac{\cos\frac{r-r'}{2}}{\cos\frac{i-e}{2}}$$

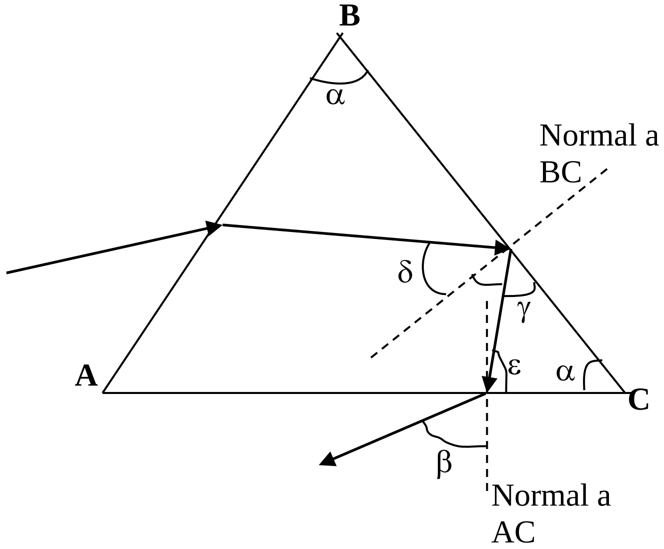
Para que la expresión anterior d sea mínimo el denominador del segundo miembro ha de ser máximo y el máximo valor posible del coseno es la unidad , por tanto eso ocurre cuando i=e,. Además

$$\text{sen } i = n \ \text{sen} r \quad ; \quad n \ \text{sen} r' = \text{sen } e = \text{sen } i \quad \Rightarrow \quad r = r' \quad \Rightarrow \quad \cos\frac{r - r'}{2} = 1$$

$$\text{sen}\frac{\delta_{min} + \alpha}{2} = n \cdot \text{sen}\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{sen}\frac{\delta_{min} + 60º}{2} = 1{,}5 \cdot \text{sen}\frac{60º}{2} = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \frac{2i - 60 + 60º}{2} = 48{,}59º \quad \Rightarrow \quad i = 48{,}59º$$

6.-Un prisma de vidrio de n =1,5 posee un ángulo α = 60º. Por su cara AB inciden rayos luminosos que llegan a la cara BC, unos se refractan y otros se reflejan. Los que se reflejan llegan a la cara AC y salen al aire formando un cierto ángulo β. Se pide determinar el mayor ángulo β posible.



Los rayos que llegan a la cara BC y se reflejan deben hacerlo con un ángulo δ el cual ha de ser mayor que el ángulo límite, ya que si es menor se refractan en la cara BC.

De la figura se deduce: que el ángulo de incidencia sobre la cara AC vale:
$90-\varepsilon$ y $\gamma = 90-\delta$

Según la ley de Snell

$$n \cdot \operatorname{sen}(90-\varepsilon) = 1 \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Para que β sea el mayor ángulo posible es necesario que ε sea el menor posible.

$$\varepsilon + \gamma + \alpha = 180 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = 180 - (90-\delta) - \alpha = 30 + \delta$$

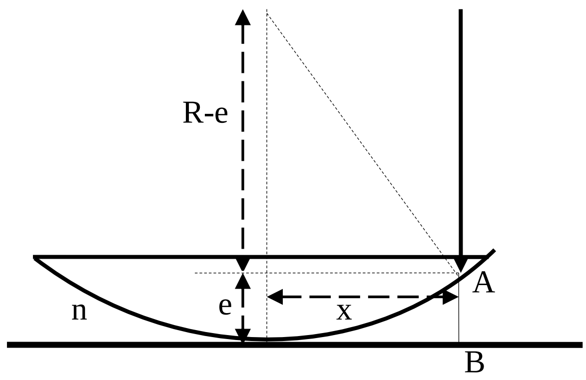
De la última expresión se deduce que el valor mínimo de ε ocurre cuando δ sea mínimo y precisamente el valor mínimo de δ se produce cuando es igual al ángulo límite prisma aire.

$$1{,}5 \ \operatorname{sen} l = 1 \ \operatorname{sen} 90 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} l = \frac{1}{1{,}5} \quad \Rightarrow \quad l = \delta = 41{,}8º$$

$$1{,}5 \cdot \operatorname{sen}[90-(30+\delta)] = \operatorname{sen}\beta \quad \Rightarrow 1{,}5 \cdot \operatorname{sen}(90-71{,}8) = \operatorname{sen}\beta \quad \Rightarrow \quad \beta = 27{,}9º$$

7.-El espacio comprendido entre una lente plano-convexa y un vidrio plano (dispositivo para formar anillos de Newton) está lleno de un líquido de índice de refracción n. El radio del tercer anillo brillante observado por reflexión vale 3,32 mm. Determinar el valor de n, sabiendo que el radio de la cara convexa de la lente es 10 m y la luz empleada tiene una longitud de onda de 589 nm.

Los anillos de Newton se forman debido a que el espacio entre la lente y el vidrio crece desde el punto de contacto hacia fuera



Supongamos que el índice de refracción n es mayor que el de la lente y el vidrio plano. Un rayo luminoso que se refleje en A lo hace con un cambio de fase de 180º. El que se refleja en B lo hace sin cambio de fase. La diferencia de caminos ópticos recorridos por ambos rayos es 2ne y producirán una interferencia constructiva si

$$2ne = N\lambda + \frac{1}{2}\lambda \qquad \text{siendo, } N = 0,\, 1\, ,\, 2\, ,\, 3\, \ldots\ldots \quad (1)$$

Si n fuese menor que el índice de refracción de la lente en A no se produciría cambio de fase pero sí en B, por tanto la expresión anterior es válida para ambos casos.
De la figura se deduce que:

$$R^2 = (R-e)^2 + x^2 = R^2 + e^2 - 2eR + x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2eR - e^2$$

Teniendo en cuenta que el radio de la lente R es mucho mayor que e, podemos escribir:

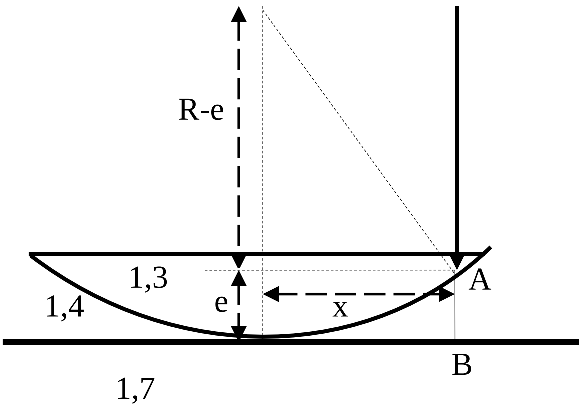
$$e = \frac{x^2}{2R}$$

Ecuación que llevada a (1)

$$2n\frac{x^2}{2R} = N\lambda + \frac{1}{2}\lambda \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)\lambda R}{n}}$$

$$3{,}32^2 = \frac{\left(2 + \frac{1}{2}\right)589.10^{-6} \cdot 10.10^3}{n} \quad \Rightarrow \quad n = 1{,}33$$

8.-El espacio comprendido entre una lente plano-convexa y un vidrio plano (dispositivo para formar anillos de Newton) está lleno de un líquido de índice de refracción 1,4. La lente tiene un índice de 1,3 y el vidrio donde se apoya de 1,7. El quinto anillo brillante visto por reflexión vale 2,83 mm ; determinar la longitud de onda de la luz.
Si en el dispositivo anterior se elimina el líquido de índice de refracción 1,4 y se sustituye por aire n=1, y se emplea la misma luz anterior, calcular el radio del quinto anillo



El rayo que se refleja en A sufre un cambio de fase de 180º y el que se refleja en B también, es como avanzar una longitud de onda.
Se producirán franjas brillantes cuando

$$2ne= m\lambda$$

siendo m un entero que vale 1,2....

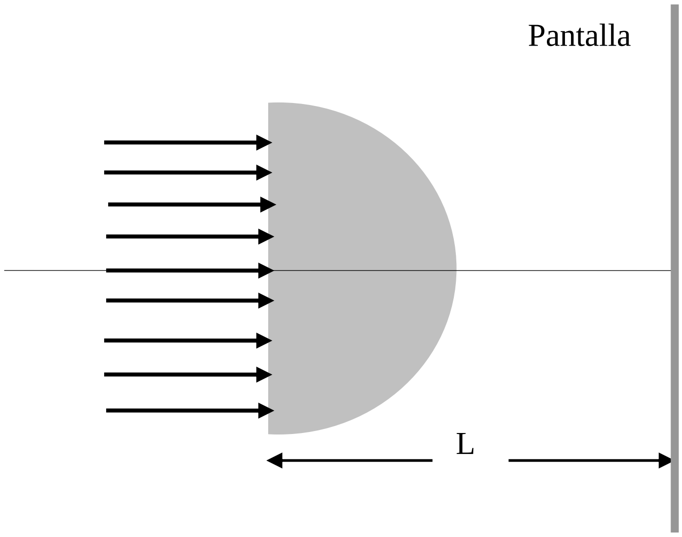
De la figura se deduce (ver problema 7), teniendo en cuenta que e<< R , $e = \frac{x^2}{2R}$

$$\frac{2nx^2}{2R} = m\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{nx^2}{mR} = \frac{1{,}4 \cdot 2{,}83^2}{5 * 4.10^3} = 5{,}61.10^{-4}\,\text{mm}$$

La segunda parte del problema es la misma que el anterior problema 7, ya que se produce un cambio de fase de 180º en B.

$$x = \sqrt{\frac{\left(N + \frac{1}{2}\right)\lambda R}{n}} = \sqrt{\frac{\left(4 + \frac{1}{2}\right)5{,}61.10^{-4} \cdot 4.10^3}{1}} = 3{,}18\ \text{mm}$$

9.-Sobre una semiesfera de vidrio, de índice de refracción n y radio r, se hace incidir un haz de rayos luminosos en la forma que indica la figura inferior



Se pide determinar el radio de la mancha luminosa que aparece en la pantalla en función de L, r y n.

Los rayos penetran en la semiesfera y llegan a la superficie esférica con distintos ángulos. Los que lleguen con ángulo menor que el límite salen al exterior de la esfera y llegan a la pantalla, lo que superen el ángulo límite no pueden salir al exterior y por tanto no alcanzan la pantalla.
En la figura 1 el ángulo α es el ángulo límite al que corresponde un refractado de 90º, el rayo correspondiente es tangente a la superficie esférica. El $\delta>\alpha$ se refleja.

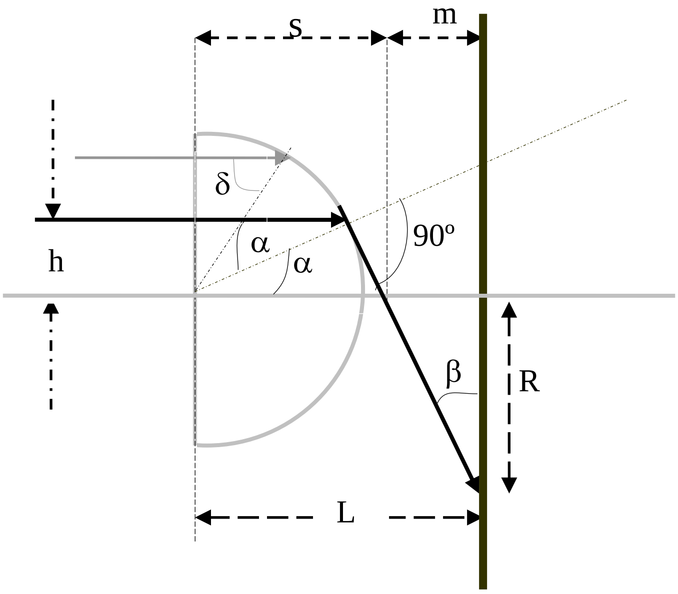


Fig.1

Por ser α el ángulo límite se cumple que:

$$n \ \text{sen}\alpha = 1 \ \text{sen} \ 90 \quad \Rightarrow \quad \text{sen} \ \alpha = \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \cos \ \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \text{tag} \ \alpha = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

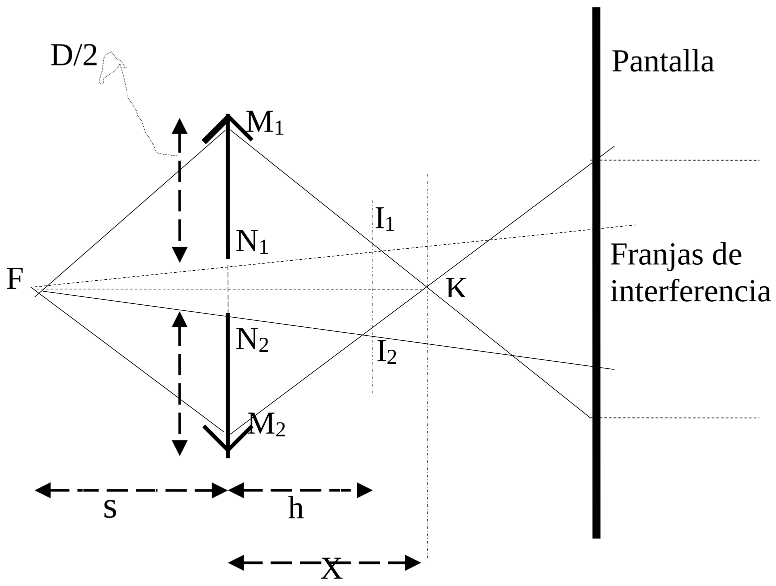
De la figura 1 se deduce que el ángulo α es igual al β, ya que sus lados son entre sí perpendiculares, además se cumple:

$$\text{sen}\alpha = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \ \text{sen} \ \alpha \quad ; \quad \text{tag}\alpha = \text{tag}\beta = \frac{m}{R} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad \Rightarrow \quad R = m\sqrt{n^2 - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad R = (L - s)\sqrt{n^2 - 1} \quad ; \quad \cos\alpha = \frac{r}{s} \Rightarrow s = \frac{nr}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

$$R = \left(L - \frac{nr}{\sqrt{n^2 - 1}} \right)\sqrt{n^2 - 1} = L\sqrt{n^2 - 1} - nr$$

10.- Una lente convergente de distancia focal 50 cm y diámetro D = 5 cm, se corta por la mitad y ambas mitades se separan una distancia de 5 mm. De esta manera se construye una bilente de Billet que permite obtener interferencias de la luz. La figura inferior muestra esquemáticamente el proceso. F es un foco luminoso situado a s = 100 cm de la lente, y cada una de las partes de la lente forma una imagen en I_1 e I_2, los cuales son focos coherentes: a partir del punto K interfieren los dos haces de luz los cuales al llegar a la pantalla forman figuras de interferencia. Determinar la distancia de K a la lente



Cada una de las mitades de la lente forma una imagen real, éstas son I_1 e I_2.La distancia N_1N_2 = d = 5 mm es muy pequeña, por lo que calculamos las posiciones de I_1 e I_2 mediante la fórmula de una lente delgada.

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}\Rightarrow \quad -\frac{1}{-100}+\frac{1}{h}=\frac{1}{50}\Rightarrow \quad \frac{1}{h}=\frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad h=100 \text{ cm}$$

Para calcular la distancia en vertical I_1I_2 comparamos los triángulos semejantes FN_1N_2 y FI_1I_2

$$\frac{d}{s}=\frac{I_1I_2}{s+h}\Rightarrow I_1I_2=\frac{d(s+h)}{s}=\frac{0,5\cdot 200}{100}=1 \text{ cm}$$

Para calcular la distancia X comparamos los triángulos semejantes KM_1M_2 y KI_1I_2.

$$\frac{M_1M_2}{X}=\frac{I_1I_2}{X-h}\Rightarrow \quad \frac{5+0,5}{X}=\frac{1}{X-100}\Rightarrow \quad 5,5X-550=X\Rightarrow \quad X=122 \text{ cm}$$