11.-Un prisma recto isósceles tiene sus caras perpendiculares plateadas. Si un rayo de luz incide sobre la cara hipotenusa con un ángulo arbitrario. Demostrar que el rayo incidente y el emergente son paralelos.

La figura inferior indica la marcha de la luz .La figura 1, a propósito, es errónea, pues admitimos que todavía no hemos demostrado lo que piden en el problema.

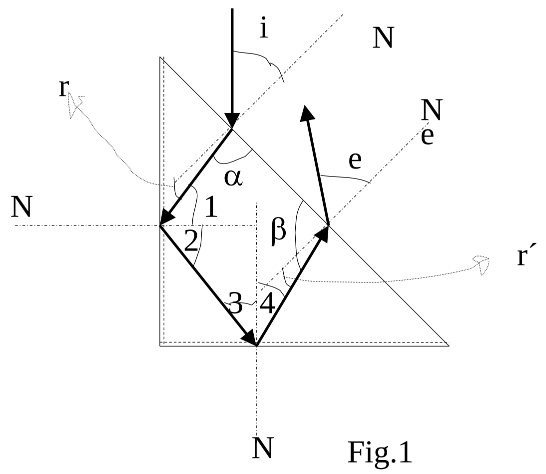


Fig.1

Designamos las siguientes magnitudes.
i ángulo de incidencia sobre la hipotenusa
r ángulo de refracción
n_1 índice del medio exterior al prisma
n_2 índice de refracción del prisma
1 y 2 ángulos de incidencia y reflexión sobre la primera cara plateada
3 y 4 ángulos de incidencia y reflexión sobre la segunda cara plateada.
e, ángulo de emergencia de la luz
Cualquier normal N es perpendicular a la cara y por tanto el ángulo que forma con ella es de 90º
Si demostramos que el ángulo r es igual al r´, entonces se deduce, a partir de la ley de Snell,

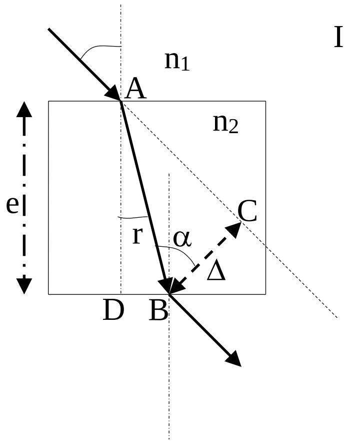
$$\left.\begin{array}{l} n_1 \operatorname{sen} i = n_2 \operatorname{sen} r \\ n_2 \operatorname{sen} r' = n_1 \operatorname{sen} e \end{array}\right\}$$

que i = e y por tanto los rayos incidentes y emergentes son paralelos.
Por las leyes de la reflexión se cumple que $\hat{1} = \hat{2}$ y $\hat{3} = \hat{4}$
De la observación de la figura 1 se deduce que $\hat{2} + \hat{3} = 90º$ y junto con la relaciones anteriores $\hat{1} + \hat{4} = 90º$. Sumando se llega a $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 180º$.
Los rayos de luz dentro del prisma forman un polígono convexo de cuatro lados, cuyos ángulos interiores suman 4 ángulos rectos

$$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} + \alpha + \beta = 360º \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 180$$

Volviendo a la figura 1 se deduce $\alpha + r = 90º$ y $\beta - r' = 90º$
Combinado con la ecuación anterior $(90 - r) + (90 + r') = 180 \quad \Rightarrow \quad r = r'$

12.-Un rayo de luz incide con un ángulo i sobre una lámina de caras paralelas de espesor e con índice de refracción n_2. El medio que rodea a la lámina tiene un índice de refracción n_1. El rayo emergente se desplaza lateralmente Δ, respecto del incidente, tal como indica la figura inferior.



Demostrar que $\boldsymbol{\Delta = e\ sen\, i\left(1 - \dfrac{n_1\ \cos i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2\ sen^2 i}}\right)}$

De acuerdo con la ley de Snell $n_1\ \text{sen}\, i = n_2\ \text{sen}\, r$ (1)

En el triángulo ABC, $\cos\alpha = \dfrac{\Delta}{AB}$; en el triángulo ADB , $\text{tag}\, r = \dfrac{DB}{e}$

$$AB = \sqrt{e^2 + DB^2} = \sqrt{e^2 + e^2 \text{tag}^2 r}$$

En el triángulo ADB

$$\text{sen}(i - r) = \frac{\Delta}{AB} \quad \Rightarrow \quad \Delta = \text{sen}(i - r) \cdot e\sqrt{1 + \text{tag}^2 r}$$

$$\Delta = (\text{sen}\, i\ \cos r - \cos i\ \text{sen}\, r) \cdot e \cdot \sqrt{1 + \text{tag}^2 r} = \left(\text{sen}\, i\ \sqrt{1 - \text{sen}^2 r} - \cos i\ \text{sen}\, r\right) e \cdot \sqrt{1 + \text{tag}^2 r}$$

De la ecuación (1) $\text{sen}\, r = \dfrac{n_1\, \text{sen}\, i}{n_2}$

$$\sqrt{1 + \text{tag}^2 r} = \sqrt{1 + \frac{\quad}{\cos^2 r}} = \sqrt{\frac{\text{sen}^2 r + \cos^2 r}{\cos^2 r}} = \frac{1}{\cos r}$$

Llevando estas dos ecuaciones a Δ

$$\Delta = \left(\operatorname{sen} i \sqrt{1 - \left(\frac{n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}{n_2^2} \right)} - \cos i \; \frac{n_1 \operatorname{sen} i}{n_2} \right) e \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}{n_2^2}}} = e \operatorname{sen} i - e \cos i \frac{\frac{n_1 \operatorname{sen} i}{n_2}}{\sqrt{1 - \frac{n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}{n_2^2}}} \Rightarrow$$

$$\Delta = e \operatorname{sen} i - e \cos i \frac{\frac{n_1 \operatorname{sen} i}{n_2}}{\frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}}{n_2}} = e \operatorname{sen} i - e \cos i \frac{n_1 \operatorname{sen} i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}} = e \operatorname{sen} i \left(1 - \frac{n_1 \cos i}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \operatorname{sen}^2 i}} \right)$$

13.-Un sistema óptico consta de dos lentes de la misma distancia focal, una convergente y la otra divergente, separadas entre sí una distancia a y con el mismo eje óptico. Si desde un objeto muy lejano llega la luz al sistema incidiendo primero en la lente divergente se forma una imagen, pero si la luz incide primero sobre la lente convergente la imagen aparece desplazada 20 cm. Calcular la distancia focal de las lentes.

Como la luz proviene de un objeto muy lejano la distancia a la lente divergente es infinita y la imagen que forma esta lente del objeto estará en la distancia focal imagen de la lente divergente (recuérdese que esta lente tiene las distancias focales objeto e imagen cambiadas) Esta imagen es objeto para la lente convergente y distará de ella una distancia $\left|-f'\right|+a = f'+a$, siendo f' la distancia focal de la lente divergente.

Aplicando la ley de las lentes delgadas a la lente convergente

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow -\frac{1}{-\left(f'+a\right)}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}-\frac{1}{\left(f'+a\right)} \quad \Rightarrow \quad s'=\frac{f'\left(f'+a\right)}{a}$$

Si la luz incide desde el infinito sobre la lente convergente, esta lente formará una imagen a su derecha a una distancia f´, esta imagen es objeto para la lente divergente y distará de ella a-f´. Aplicando para la lente divergente la ley de las lentes delgadas

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow -\frac{1}{-\left(a-f'\right)}+\frac{1}{s''}=-\frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \frac{1}{s''}=-\frac{1}{f'}-\frac{1}{\left(a-f'\right)} \quad \Rightarrow \quad s''=\frac{f'\left(f'-a\right)}{a}$$

De acuerdo con el enunciado del problema

$$s'-s''=\frac{f'\left(f'+a\right)-f'\left(f'-a\right)}{a}=2f'=20 \quad \Rightarrow \quad f'=10\,\mathrm{cm}$$

14.- Sobre una película transparente de espesor $5{,}2.10^{-7}$ m incide luz blanca con un ángulo de 31º respecto de la normal. El índice de refracción de la película es 1,35. Determinar la longitud de onda de la luz, en la zona del espectro visible (380-780 nm), que no aparece en la luz reflejada.

En la figura 1 se observa que el rayo AB penetra en la película mientras que el rayo DE se refleja. Ambos rayos interfieren debido a que hay diferencia en el camino óptico recorrido por ellos.

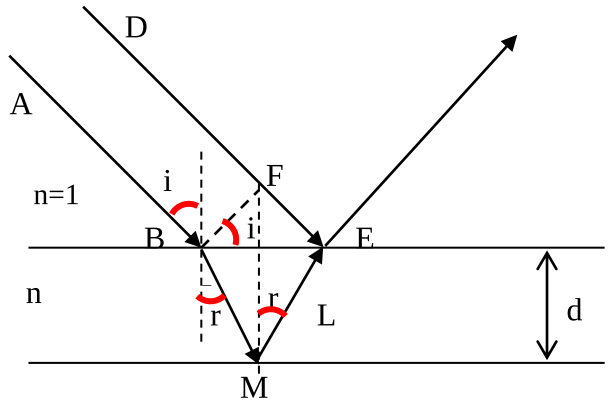


Fig.1

La diferencia de caminos recorrido por los dos rayos es: $2nL - FE + \frac{\lambda}{2}$. En la expresión anterior aparece el termino de media longitud de onda debido a que el rayo DE se refleja en un medio de mayor índice de refracción y eso supone una inversión de fase por lo que es preciso sumar esa media longitud de onda. Se producirá una interferencia destructiva si la diferencia de caminos ópticos es un múltiplo impar de la semilongitud de onda.

$$2nL - FE + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

De la figura 1 se deduce:

$$FE = BE\,\text{sen}\,i \quad ; \quad \text{tag}\,r = \frac{\frac{BE}{2}}{d} \Rightarrow BE = 2d\,\text{tag}\,r \quad \Rightarrow \quad FE = 2d\,\text{tag}\,r \cdot \text{sen}\,i == 2d\frac{\text{sen}\,r}{\cos r}\text{sen}\,i$$

$$\text{sen}\,r = \frac{\frac{BE}{2}}{L} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{BE}{2\,\text{sen}\,r} = \frac{2d\,\text{tag}\,r}{2\text{sen}\,r} = \frac{d}{\cos r} = \frac{d}{\sqrt{1-\text{sen}^2 r}}$$

Según la ley de Snell: $1 \cdot \operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} r = \frac{\operatorname{sen} i}{n}$, llevando esta ecuación a las dos anteriores:

$$FE = 2d \frac{\frac{\operatorname{sen} i}{n}}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2}}} \cdot \operatorname{sen} i = \frac{2d \cdot \operatorname{sen}^2 i}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}}$$

$$L == \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2}}} = \frac{d\, n}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}}$$

$$2nL - FE + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \Rightarrow 2n \frac{d\, n}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}} - \frac{2d \operatorname{sen}^2 i}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}} = \frac{\lambda}{2}(2k + 1 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\, d\left(n^2 - \operatorname{sen}^2 i\right)}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}} = k\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{2\, d\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2 i}}{k} = \frac{2 \cdot 5{,}2.10^{-7}\sqrt{1{,}35^2 - \operatorname{sen}^2 31}}{k} = \frac{1{,}30.10^{-6}}{k}$$

Si en la ecuación anterior damos hacemos k=2, resulta: $\lambda = 6{,}50.10^{-7}$ m = 650 nm
y si hacemos k =3 , resulta : $\lambda = 4{,}33.10^{-7}$ m = 433 nm

15.-La punta de un cono con un ángulo 2α se examina con una lente convergente de distancia focal imagen f´, situado a la distancia a. El eje principal de la lente coincide con el eje de simetría del cono. Calcular el ángulo bajo el cual se ve el del cono a través de la lente.

En la figura 1se hace una imagen esquemática del problema

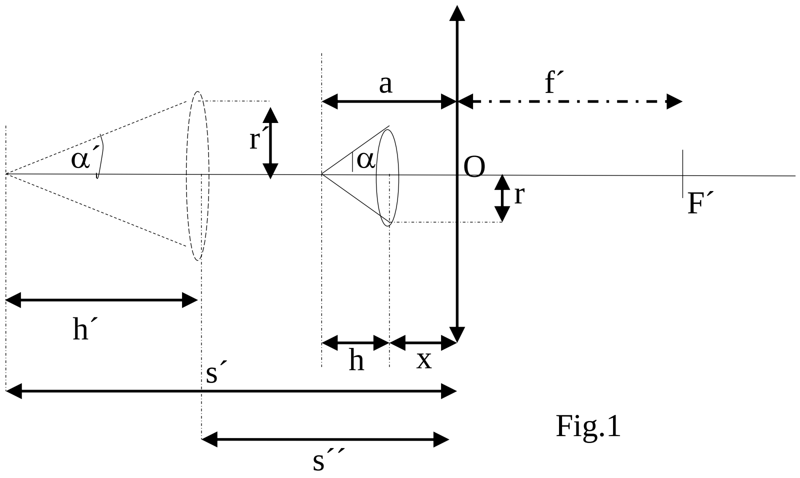


Fig.1

La altura del cono se designa por h y el radio del círculo por r. El centro de la base del cono dista, en valor absoluto, x de la lente, siendo x= a-h La imagen de la punta del cono dista, en valor absoluto de la lente, s´ y el centro de la base s´´. Por r´ se designa al radio de la imagen del cono y por h´ su altura.
Utilizamos como criterio de signos que el punto O es el origen de las medidas y las distancias de O a la izquierda son negativas y a la derecha positivas, según este criterio la ecuación de las lentes delgadas se escribe:

$$-\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}$$

Imagen de la punta del cono

$$-\frac{1}{a}+\frac{1}{s'}=\frac{1}{f'}\Rightarrow \quad \frac{1}{f'}+\frac{1}{a}=\frac{1}{s'}\Rightarrow \quad s'=\frac{f'a}{a+f'}$$

Imagen del centro de la base del cono

$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{s''}=\frac{1}{f'}\Rightarrow \quad \frac{1}{f'}+\frac{1}{x}=\frac{1}{s''}\Rightarrow \quad s''=\frac{f'x}{x+f'}$$

$$h' = s' - s'' = \frac{f'a}{a+f'} - \frac{f'x}{x+f'} = \frac{f'ax + f'^2 a - f'ax - f'^2 x}{(a+f')(x+f')} = \frac{f'^2(a-x)}{(a+f')(x+f)}$$

$$\frac{r'}{s''} = \frac{r}{x} \Rightarrow r' = \frac{r s''}{x} = \frac{r f'}{x+f'}$$

La tangente del ángulo α´ vale:

$$\mathrm{tag}\,\alpha' = \frac{r'}{h'} = \frac{\dfrac{r f'}{x+f'}}{\dfrac{f'^2(a-x)}{(a+f')(x+f')}} = \frac{r f'(a+f')(x+f')}{f'^2(a-x)(x+f')} = \frac{r f'(a+f')}{f'^2(a-x)} = \frac{r(a+f')}{f'\ (a-x)}$$

Sustituimos x por a-h

$$\mathrm{tag}\,\alpha' = \frac{r'}{h'} = \frac{r(a+f')}{f'\ (a-x)} = \frac{r(a+f')}{f(a-a+h)} = \frac{r(a+f')}{f'h} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tag}\,\alpha' = \left(\frac{a}{f'}+1\right)\mathrm{tag}\,\alpha'$$

16.-Calcular la distancia entre los máximos de las franjas de interferencia producidas por una fuente de luz de longitud de onda 550 nm, colocada a b=20 cm de un biprisma de Fresnel, de índice de refracción n=1,46 y ángulo α = 2º. La distancia del prisma a la pantalla es de D = 2m.

En la figura 1 se ha hecho un esquema (no a escala) en el que se destaca la marcha de los rayos desde los focos virtuales S_1 y S_2. La distancia S_1S_2 = a. En la pantalla se ha elegido un punto arbitrario A. Si la diferencia de marcha d_2-d_1 es un múltiplo entero de la longitud de onda, en A se producirá un máximo.

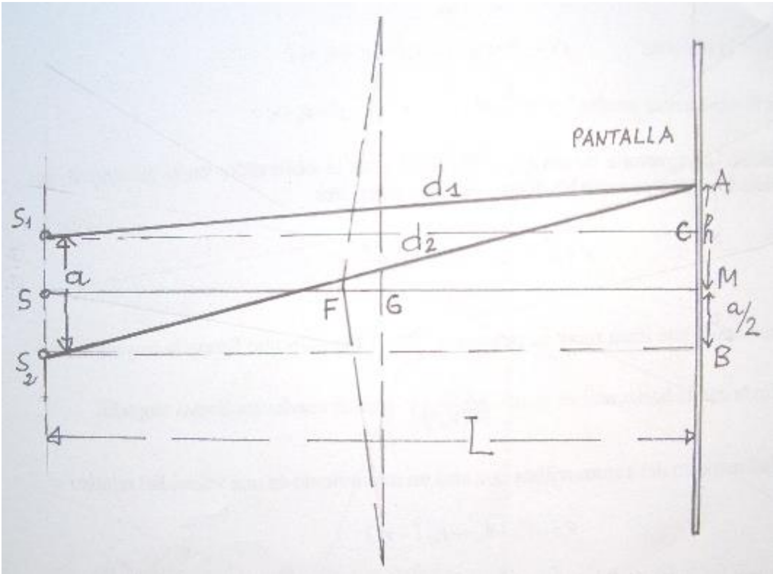


Fig.1

De la figura 1 se deduce:

$$d_2^2 = L^2 + \left(h + \frac{a}{2}\right)^2 \ ; \ d_1^2 = L^2 + \left(h - \frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow d_2^2 - d_1^2 = a\,h \Rightarrow (d_2 + d_1)(d_2 - d_1) = 2\,a\,h \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ d_2 - d_1 = \frac{2\,a\,h}{(d_2 + d_1)} = m\lambda \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{m\lambda(d_2 + d_1)}{2\,a}$$

En la ecuación anterior se puede sustituir d_2+d_1 por 2 L=2 (D+b)

$$h = \frac{m\lambda(D + b))}{a} \quad (1)$$

Para obtener h es preciso conoce a, esto es, la distancia entre los focos virtuales S_1 y S_2.

En la figura 2 se ha hecho un esquema en la que se contempla la mitad superior de un biprisma de Fresnel. Para poder hacer el dibujo, el ángulo del prisma se ha hecho de 20º en lugar de los 2º que dice el problema.

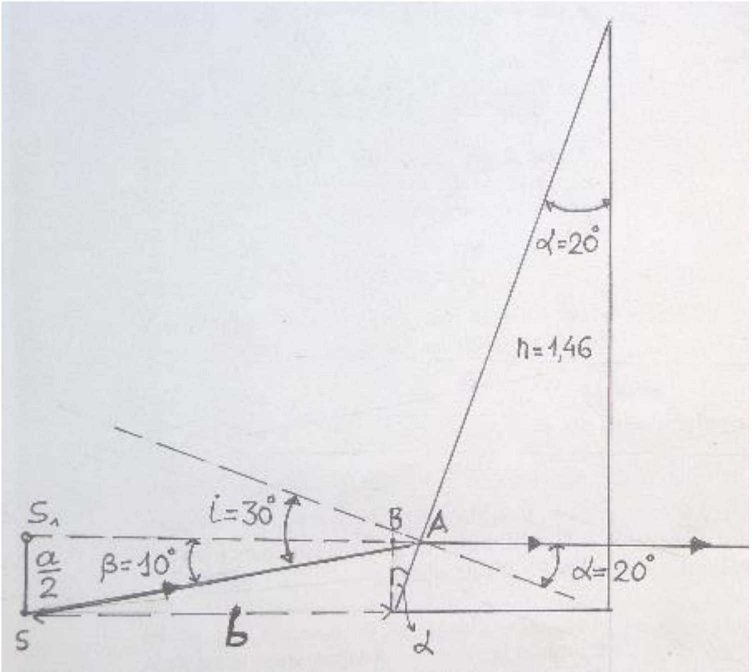


Fig.2

Queremos que el ángulo de refracción r en la primera cara del prisma sea 20º igual al ángulo del prisma.

$$1 \cdot \operatorname{sen} i = 1{,}46 \cdot \operatorname{sen} 20^{o} \quad \Rightarrow \quad i = 30^{o}$$

Teniendo en cuenta que en un prisma $\alpha = r + r'$ $\Rightarrow$ $r' = 0^{o}$.Por tanto el rayo penetra en la dirección normal de la segunda cara y su prolongación en S_1..De la figura 2 se deduce:

$$\beta = i - \alpha = 30 - 20 = 10^{o} \ ; \quad \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(i - \alpha) = \operatorname{sen}10^{o} = \frac{\frac{a}{2}}{SA} \approx \frac{\frac{a}{2}}{b}$$

Dado que el biprisma de Fresnel se caracteriza porque el ángulo alfa es muy pequeño, en el problema 2º, podemos escribir:

$$1 \cdot i = n\,\alpha \ \Rightarrow \ \beta = i - \alpha = n\,\alpha - \alpha = \alpha(n-1) \Rightarrow \ \beta = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \alpha(n-1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a = 2(n-1)\alpha\, b$$

Llevando el valor de a a la ecuación (1)

$$h = \frac{m\lambda(D+b))}{2(n-1)\alpha\, b} = \frac{1 \cdot 550.10^{-9} \cdot (2+0{,}2)}{2 \cdot (1{,}46-1) \cdot \frac{2 \cdot 3{,}14}{180} \cdot 0{,}2} = 1{,}88.10^{-4}\,\text{m}$$

17.- Un haz paralelo de electrones que ha sido acelerado mediante un diferencia de potencial U =25 V, incide normalmente sobre un diafragma con dos rendijas estrechas distantes entre sí, d= 50 μm. Detrás del diafragma y a una distancia D = 1 m se coloca una pantalla. Se pide calcular la distancia entre dos máximos adyacentes del cuadro de difracción.
Datos : Constante de Planck = 6,6.10^{-34} Js; masa del electrón 9,1.10^{-31} kg, carga del electrón 1,6.10^{-19} C

Según la teoría de De Broglie las partículas pueden exhibir comportamiento ondulatorio siendo la longitud de onda asociada:

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

h es la constante de Planck , m la masa de la partícula y v su velocidad.

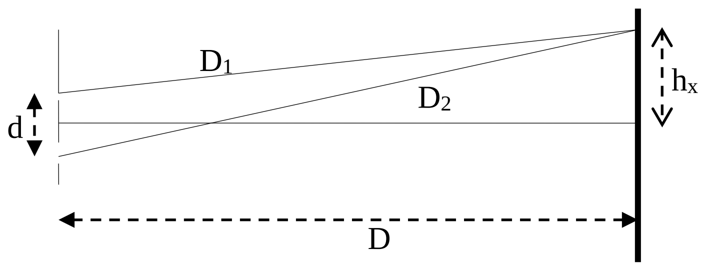
La energía que adquieren los electrones cuando son acelerados es

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$$

La longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2qU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2mqU}}$$

En la figura siguiente se representa la marcha de los electrones después de atravesar las dos rendijas.



D_1 y D_2 son las distancias recorridas por los electrones según que atraviesen una u otra rendija, h_x es la distancia desde el centro de la pantalla hasta la posición de un máximo. Se cumple:

$$D_2 - D_1 = x\lambda$$

x es un número entero.

$$D_1^2 = D^2 + \left(h_x - \frac{d}{2}\right)^2 \quad ; \quad D_2^2 = D^2 + \left(h_x + \frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \quad D_2^2 - D_1^2 = 2d\,h_x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D_2 + D_1)(D_2 - D_1) = 2d\,h_x \quad \Rightarrow \quad D_2 - D_1 = \frac{2d\,h_x}{D_2 + D_1} = x\lambda$$

La suma de las distancias D_2+D_1 es aproximadamente igual a 2D.

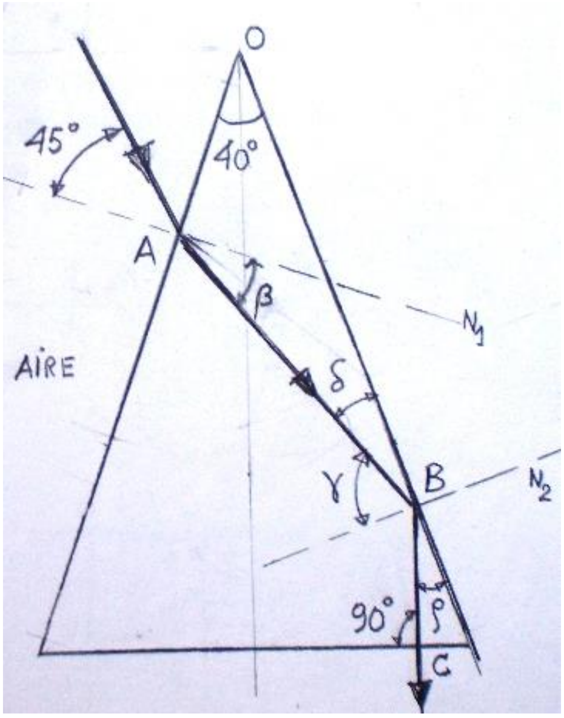
$$h_x = \frac{x\lambda D}{d}$$

El máximo siguiente se producirá a una distancia $h_x = \frac{x\lambda D}{d}$. La distancia entre esos dos máximos es:

$$h_{x+1} - h_x = \Delta x = \frac{\lambda D}{d}\left(x + 1 - x\right) = \frac{\lambda D}{d} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2mqU}}}{d} = \frac{6{,}6.10^{-34}}{50.10^{-6}\sqrt{2\cdot 9{,}1.10^{-31}}\cdot 1{,}6.10^{-19}\cdot 25}$$

$$\Delta x = 4{,}9.10^{-6}\,\mathrm{m} = 4{,}9\,\mu\mathrm{m}$$

18. En la figura inferior se indica la marcha de un rayo monocromático de luz que incide sobre un prisma isósceles.



Determinar el índice de refracción del mencionado prisma.

Aplicamos la ley de Snell

$$1 \cdot \operatorname{sen} 45 = n \operatorname{sen}\beta \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\beta = \frac{\sqrt{2}}{2n}$$

La bisectriz del ángulo del prisma es paralela al rayo BC, por lo que $\rho = 20^{\circ}$

$$\gamma + \delta = 90^{o} \quad \text{y} \quad \gamma + \rho = 90^{o} \;\Rightarrow \delta = \rho = 20^{o}$$

Del triángulo OAB se deduce

$$40 + (90 + \beta) + \delta = 180^{o} \Rightarrow \beta = 50 - \delta = 30^{o}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} 30^{o} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2n} \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{2}$$

19. La distancia entre el objeto y la imagen en una lente convergente es 12,5 cm. El objeto tiene un tamaño de 5 mm siendo el aumento lateral β=-1,5. Determinar las distancias s y s´ de la lente al objeto y a la imagen y la distancia focal de la lente.

De la interpretación del aumento lateral se deduce que la imagen es real, invertida y de mayor tamaño que el objeto, por consiguiente el objeto está situado a una distancia de la lente mayor que la focal.

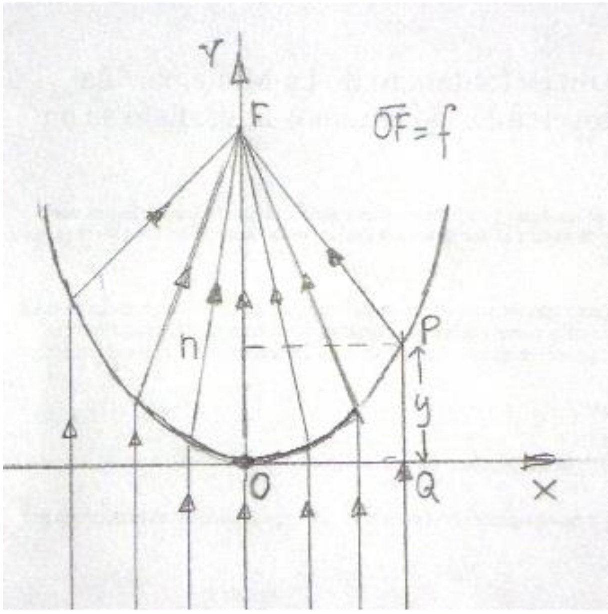
$$\beta = -1{,}5 = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -1{,}5 \cdot s \qquad -s + s' = 12{,}5 \Rightarrow -s - 1{,}5s = 12{,}5 \quad \Rightarrow \quad s = -5\,\text{cm}$$

$$\Rightarrow \; s' = 12{,}5 + s = 12{,}5 - 5 = 7{,}5\,\text{cm}$$

Según la ley de la lentes

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f'} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{-5} + \frac{1}{7{,}5} = \frac{1}{f'} = \frac{7{,}5 + 5}{37{,}5} \;\Rightarrow\; f' = 3\,\text{cm}$$

20.-Un haz luminoso paralelo incide desde el vacío sobre una superficie que separa el vacío de una zona con índice de refracción n. El haz penetra en la zona de índice n y se concentra en un punto F, el cual dista f del punto O. a) Calcular la ecuación de la superficie. b) Dibujar la curva para n=1,5.



a) Designamos con c la velocidad de la luz en el vacío y con v la en el medio siendo n=c/v.

El rayo OF tarda en llegar al punto f un tiempo $t_1 = \frac{f}{v} = \frac{nf}{c}$

El rayo QPF, cuya distancia OQ designamos con x, emplea un tiempo

$$t_2 = \frac{QP}{c} + \frac{PF}{v} = \frac{y}{c} + \frac{\sqrt{(f-y)^2 + x^2}}{v} = \frac{y}{c} + \frac{n\sqrt{(f-y)^2 + x^2}}{c}$$

Igualando ambos tiempos:

$$nf = y + n\sqrt{(f-y)^2 + x^2}$$

Operamos con la siguiente ecuación

$$n^2f^2 + y^2 - 2fny = n^2f^2 + n^2y^2 - 2n^2fy + x^2n^2 \Rightarrow y^2(1-n^2) - 2fny(1-n) = x^2n^2$$

$$\Rightarrow y^2(1+n\ ) - 2fny = \frac{x^2n^2}{1-n} \Rightarrow y^2 - \frac{2fny}{1+n} = \frac{x^2n^2}{(1-n)(1+n)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y - \frac{fn}{1+n}\right)^2 - \frac{f^2n^2y^2}{(1+n)^2} = \frac{x^2n^2}{(1-n)(1+n)}$$

Designamos: $\frac{f\,n}{1+n} = b$

$$(y-b)^2 - b^2 = \frac{x^2 n^2}{(1-n)(1+n)} \Rightarrow \frac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = \frac{x^2 n^2}{(1-n)(1+n)b^2} = \frac{x^2 n^2}{(1-n)(1+n)\frac{f^2 n^2}{(1+n)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(y-b)^2}{b^2} - 1 = \frac{x^2}{(1-n)\frac{f^2}{(1+n)}} \Rightarrow \frac{x^2}{f^2\,\frac{n-1}{n+1}} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

Designamos $a = f\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ y la ecuación de la superficie en el plano XY es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$$

que corresponde a una elipse.

b) Cuando n=1,5 resulta:

$$a = f\sqrt{\frac{0{,}5}{2{,}5}} = \frac{f}{\sqrt{5}} \;\; ; \;\; b = \frac{1{,}5\,f}{2{,}5} = 0{,}6\,f$$

Y la ecuación $\frac{5\,x^2}{f^2} + \frac{(y-0{,}6\,f)^2}{0{,}36} = 1$.Si hacemos f = 1 la curva es la de la figura 1