21.- La distancia focal de una lente delgada biconvexa sumergida en un líquido A, índice de refracción n_1, es f_1 y sumergida en un líquido B, índice de refracción n_2, es f_2. a) Calcular el índice de refracción de la lente y su distancia focal en el aire en función de los datos anteriores.
b) Aplicar las ecuaciones obtenidas cuando: A = agua, índice de refracción, n_1= 1,33, f_1= 1,10 m ; B = disulfuro de carbono, índice de refracción, n_2=1,63 , f_2=10,10 m.

Designamos con n al índice de refracción de la lente y con f a su distancia focal en el aire.
Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas en los distintos medios, siendo R_1 y R_2 los radios de la lente biconvexa.

Aire $$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (1)$$

Líquido A $$\frac{1}{f_1} = \left(\frac{n-n_1}{n_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (2)$$

Líquido B $$\frac{1}{f_2} = \left(\frac{n-n_2}{n_2}\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (3)$$

De las ecuaciones (2) y (3) se deduce

$$\frac{n_1}{f_1(n-n_1)} = \frac{n_2}{f_2(n-n_2)} \Rightarrow f_2 n_1 n - f_2 n_1 n_2 = f_1 n_2 n - f_1 n_1 n_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(f_2 n_1 - f_1 n_2) = n_1 n_2 (f_2 - f_1) \Rightarrow n = \frac{n_1 n_2 (f_2 - f_1)}{f_2 n_1 - f_1 n_2} \quad (4)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce:

$$\frac{1}{f(n-1)} = \frac{n_1}{f_1(n-n_1)} \Rightarrow f_1 n - f_1 n_1 = f\, n n_1 - f\, n_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f = \frac{f_1 n - f_1 n_1}{n_1(n-1)} \Rightarrow \quad (5)$$

De la ecuación (5) despejamos n:

$$f\, n n_1 - f\, n_1 = f_1 n - f_1 n_1 \Rightarrow n(f\, n_1 - f_1) = f\, n_1 - f_1 n_1 \Rightarrow n = \frac{f\, n_1 - f_1 n_1}{f\, n_1 - f_1} \quad (6)$$

Igualamos las ecuaciones (4) y (6)

$$\frac{n_1 n_2\left(f_2-f_1\right)}{f_2 n_1-f_1 n_2}=\frac{f\, n_1-f_1 n_1}{f\, n_1-f_1} \Rightarrow n_1 n_2\left(f_2-f_1\right)\cdot\left(f\, n_1-f_1\right)=\left(f\, n_1-f_1 n_1\right)\cdot\left(f_2 n_1-f_1 n_2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\, n_1^2 n_2 f_2-n_1 n_2 f_2 f_1-f\, n_1^2 n_2 f_1+n_1 n_2 f_1^2=f\, n_1^2 f_2-f\, n_1 n_2 f_1-n_1^2 f_1 f_2+n_1 n_2 f_1^2 \Rightarrow$$

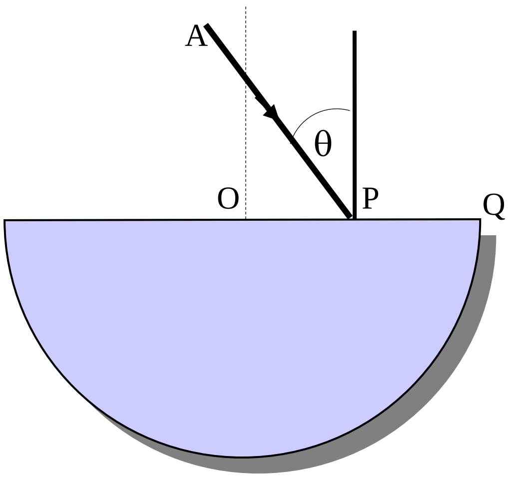
$$\Rightarrow f\left(n_1 n_2 f_2-n_1 n_2 f_1-n_1 f_2+n_2 f_1\right)=f_1 f_2\left(n_2-n_1\right) \Rightarrow \quad f=\frac{f_1 f_2\left(n_2-n_1\right)}{n_1 n_2\left(f_2-f_1\right)+n_2 f_1-n_1 f_2} \quad (7)$$

b)

$$n=\frac{1{,}33\cdot 1{,}63\cdot\left(10{,}1-1{,}1\right)}{10{,}1\cdot 1{,}33-1{,}1\cdot 1{,}63}=1{,}68$$

$$f=\frac{1{,}1\cdot 10{,}1\cdot\left(1{,}63-1{,}33\right)}{1{,}33\cdot 1{,}63\cdot\left(10{,}1-1{,}1\right)+1{,}63\cdot 1{,}1-1{,}33\cdot 10{,}1}=0{,}42\,\mathrm{m}=42\,\mathrm{cm}$$

22.- El índice de refracción de una lente semicilíndrica de radio OQ= R vale n=1,5. Sobre ella incide en P(OP=0,5R) un rayo luminoso AP, procedente del aire, formando un ángulo θ con la vertical. Este ángulo varía entre 0º y 90º.



Se pide a) la gráfica de θ, frente a β, siendo beta, el ángulo que forma el rayo con la normal a la cara curva de la lente, cuando éste pasa de la lente al aire. b) Repetir el proceso anterior cuando OP sea igual a 0,75 R.

En la figura 1 se representa la marcha de los rayos, habiéndose elegido un ángulo θ cualquiera, comprendido entre 0º y 90º

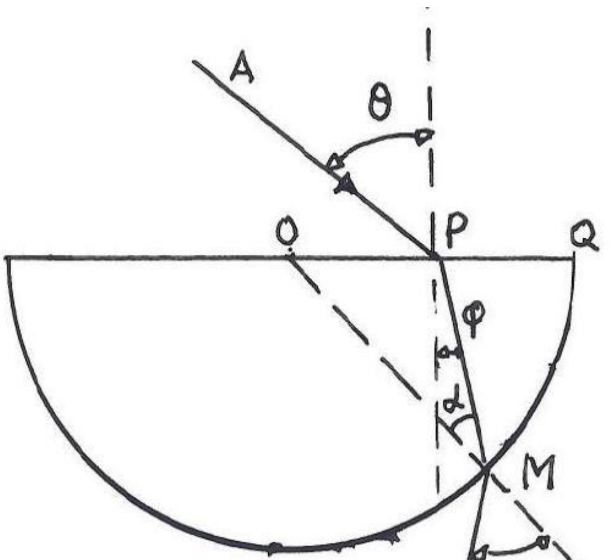


Fig.1

Aplicamos la ley de Snell entre el ángulo θ y φ.

$$1 \cdot \operatorname{sen}\theta = n\operatorname{sen}\varphi \quad (1)$$

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo OPM

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{OP} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\frac{R}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}{R} \quad \Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\varphi\cdot\cos\frac{\pi}{2}+\cos\varphi\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\operatorname{sen}\alpha = \cos\varphi = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi} \Rightarrow 4\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{2} \quad (2)$$

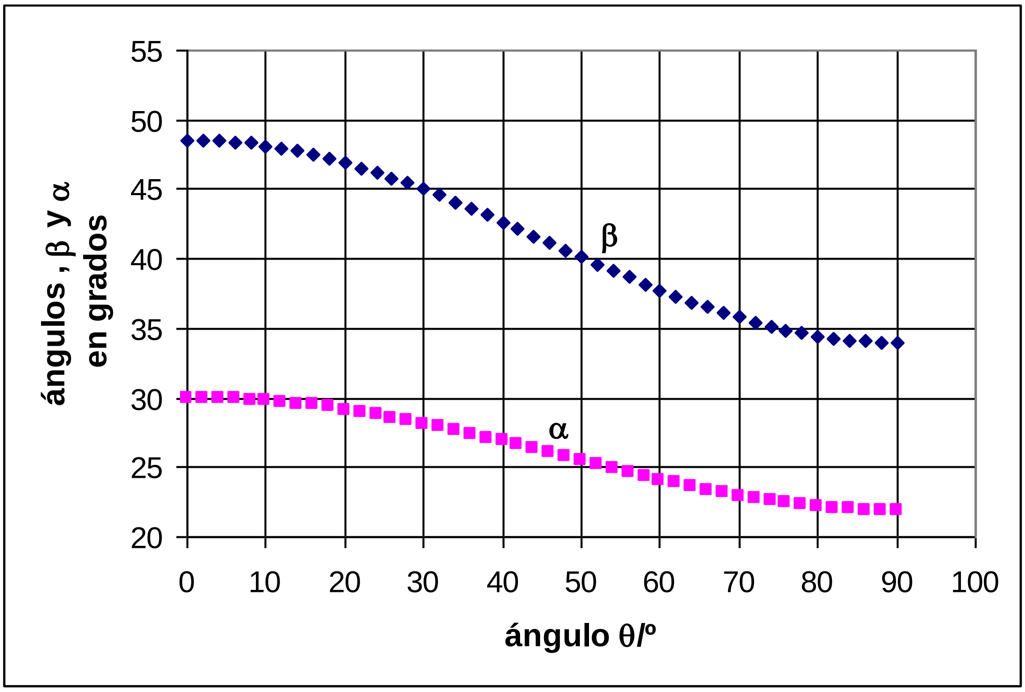
La ley de Snell entre los ángulos α y β conduce a:

$$n\operatorname{sen}\alpha = 1\cdot\operatorname{sen}\beta \quad (3)$$

A partir de las ecuaciones (1), (2) y (3)

$$\operatorname{sen}\beta = n\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi}}{2} = n\frac{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{n^2}}}{2} = \frac{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2\theta}}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \operatorname{arco}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2\theta}}{2}\right) \quad (4)$$

En la hoja de cálculo se dan valores a θ y n=1,5 y se obtiene la siguiente gráfica:



El ángulo límite de la lente al aire es:

$$n\operatorname{sen} l_m = 1.\operatorname{sen} 90 \Rightarrow \quad \operatorname{sen} l_m = \frac{1}{1{,}5} \Rightarrow \quad l_m = 41{,}8^{\circ}$$

Observe que en esta gráfica el ángulo α es siempre inferior al límite para todos los valores de θ, por eso, en todo el intervalo se encuentran valores de β. En otras palabras, para cualquier valor de θ siempre aparece rayo saliendo de la línea curva de la lente.

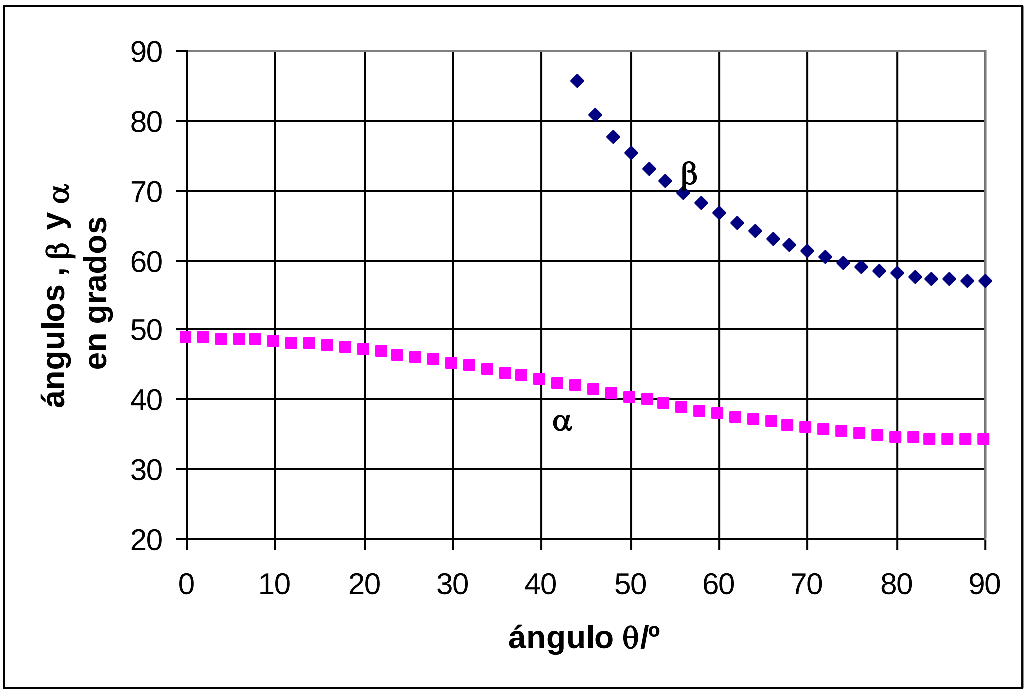
Si ahora OP=0,75 R

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{OP} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\frac{3R}{4}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{R} \Rightarrow \frac{4}{3}\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos\varphi \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\operatorname{sen}\alpha = \cos\varphi = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\varphi} \Rightarrow \frac{16}{9}\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\varphi \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{9\left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)}}{4} \quad (2)$$

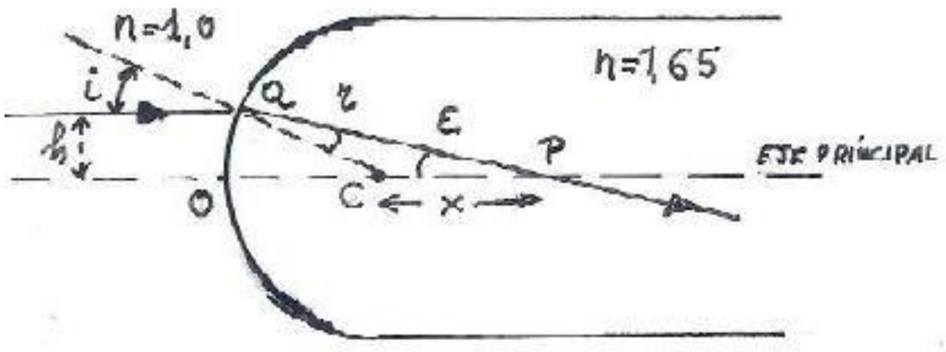
$$\operatorname{sen}\beta = n\frac{\sqrt{9\left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)}}{4} = n\frac{\sqrt{9\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{n^2}\right)}}{4} = \frac{\sqrt{9\left(n^2-\operatorname{sen}^2\theta\right)}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \operatorname{arco\,sen}\frac{\sqrt{9\left(n^2-\operatorname{sen}^2\theta\right)}}{4} \quad (4)$$



En este caso resulta que el ángulo α es, para ciertos valores del ángulo θ, superior al límite, por eso, no siempre existe rayo que salga por la cara curva, como ocurría en el caso anterior. Existe rayo β a partir de que α sea inferior a 41,8º.

23.- Una superficie esférica de radio OC=R=0,1 m separa dos medios transparentes (dioptrio esférico). Uno es aire y el otro una sustancia de índice de refracción n=1,65.
Desde el aire se envían una serie de rayos paralelos al eje principal y por encima de él; esos rayos penetran en el medio de índice n y cortan al eje principal en un punto P que dista x del centro de la superficie esférica C.
a) Calcular la relación que existe entre x y la altura h de los rayos.
b) Representar x (eje Y) frente a h (eje X)



a) La ley de Snell establece para un rayo de altura arbitraria h, que: $1 \cdot \operatorname{sen} i = n \cdot \operatorname{sen} r$

De la figura del enunciado se deduce que el ángulo OCQ = i, y por tanto: $\operatorname{sen} i = \dfrac{h}{R}$.

De ambas ecuaciones:

$$\operatorname{sen} r = \frac{h}{n R}$$

Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo PQC : $\dfrac{\operatorname{sen} \varepsilon}{R} = \dfrac{\operatorname{sen} r}{x} \Rightarrow x = \dfrac{R \operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} \varepsilon}$

De la figura del enunciado deducimos que: $\varepsilon + r = i \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = i - r$

$$\operatorname{sen} \varepsilon = \operatorname{sen}(i - r) = \operatorname{sen} i \cos r - \cos i \operatorname{sen} r = \frac{h}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{h^2}{n^2 R^2}} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \cdot \frac{h}{n R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen} \varepsilon = \frac{h}{R} \sqrt{\frac{n^2 R^2 - h^2}{n^2 R^2}} - \frac{h}{n R} \sqrt{\frac{R^2 - h^2}{R^2}} = \frac{h}{n R^2} \left(\sqrt{n^2 R^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - h^2} \right)$$

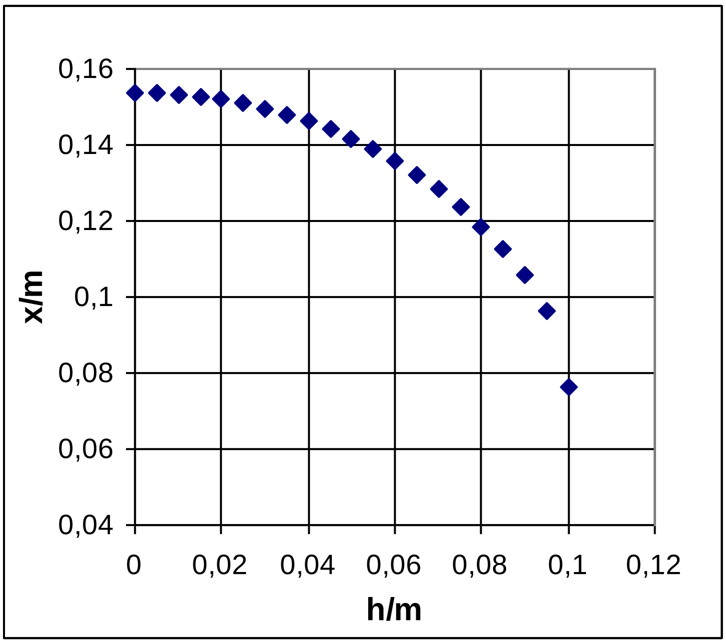
Sustituyendo en la ecuación que contiene x, resulta:

$$x = \frac{R \dfrac{h}{nR}}{\dfrac{h}{n R^2} \left(\sqrt{n^2 R^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - h^2} \right)} = \frac{R^2}{\sqrt{n^2 R^2 - h^2} - \sqrt{R^2 - h^2}} \quad (1)$$

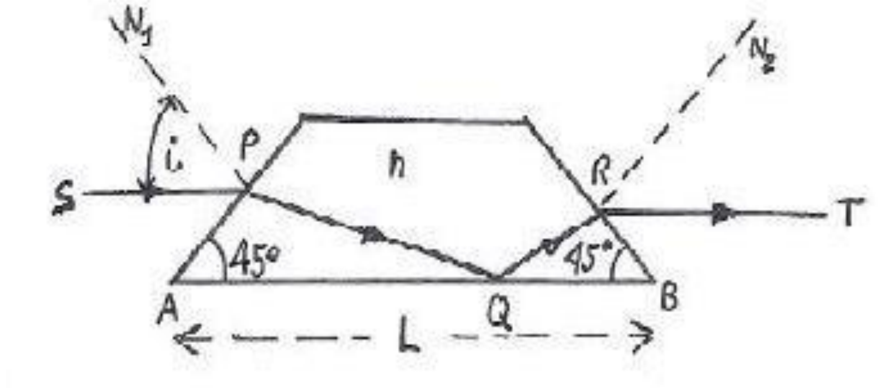
b) Sustituyendo los valores numéricos en la ecuación (1)

$$x = \frac{0{,}1^2}{\sqrt{1{,}65^2 \cdot 0{,}1^2 - h^2} - \sqrt{0{,}1^2 - h^2}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{0{,}0272 - h^2} - \sqrt{0{,}01 - h^2}}$$

Los valores de h están comprendido entre cero y R=0,1 m La gráfica es:



24.- Sobre la cara lateral de un prisma Dove se envía un rayo horizontal SP que sale paralelo por la cara opuesta RT, según se indica en la figura.



Se pide calcular la distancia recorrida por el rayo dentro del prisma, esto es, PQ+QR.
La longitud de la base del prisma es L y su índice de refracción n. El rayo SP se desplaza por el aire.

El ángulo i =45º según se deduce de la figura 1.

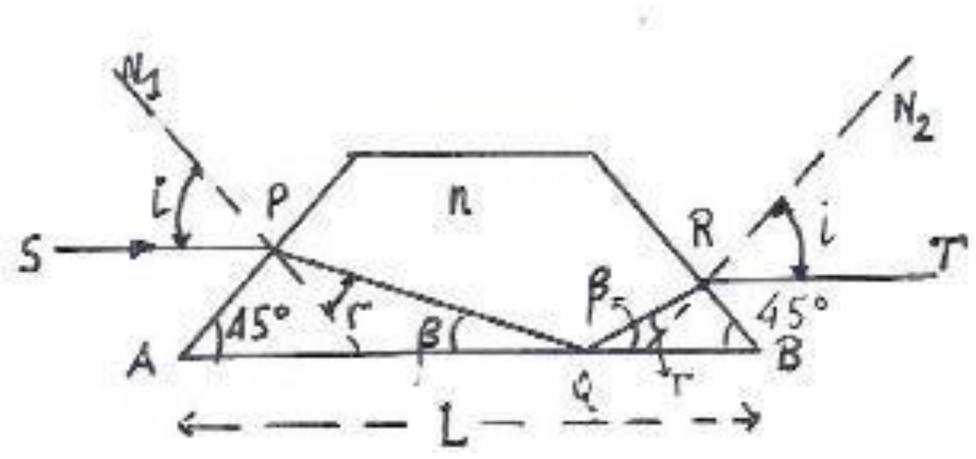


Fig.1

Aplicamos la ley de Snell al rayo incidente:

$$1 \cdot \text{sen}\, i = n\ \text{sen}\, r \Rightarrow \text{sen}\, r = \frac{\text{sen}\, i}{n} \quad \text{siendo} \quad i > r$$

Aplicamos el teorema de los senos al triángulo APQ

$$\frac{\operatorname{sen}(90+r)}{AQ}=\frac{\operatorname{sen}45}{PQ}\quad\Rightarrow\quad PQ=\frac{AQ\cdot\operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}\left(90+r\right)}$$

Aplicamos el teorema de los senos al triángulo Q RB

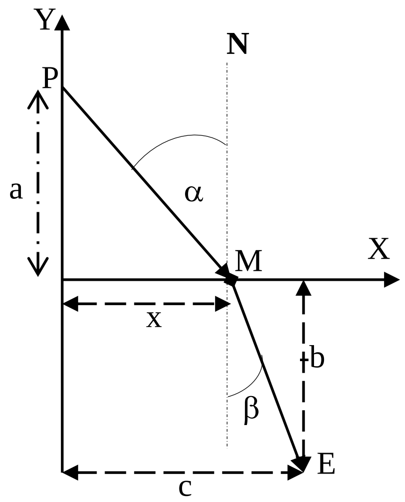
$$\frac{\operatorname{sen}(90+r)}{QB}=\frac{\operatorname{sen}45}{QR}\quad\Rightarrow\quad QR=\frac{QB\cdot\operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}\left(90+r\right)}$$

Sumamos las dos últimas ecuaciones:

$$PQ+QR=\frac{AQ\operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}\left(90+r\right)}+\frac{QB\operatorname{sen}45}{\operatorname{sen}\left(90+r\right)}=\frac{\operatorname{sen}45\left(AQ+QB\right)}{\operatorname{sen}\left(90+r\right)}=\frac{L\operatorname{sen}45}{\cos r}=\frac{L\operatorname{sen}45}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 r}}$$

$$\Rightarrow PQ+QR=\frac{L\ \operatorname{sen}45}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2 i}{n^2}}}=\frac{n\,L\operatorname{sen}45}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 i}}=\frac{n\,L\operatorname{sen}45}{\sqrt{n^2-\operatorname{sen}^2 45}}=\frac{n\,L\,\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{n^2-\frac{1}{2}}}=\frac{n\,L}{\sqrt{2n^2-1}}$$

25.- Desde el punto P de coordenadas (o,a) sale un rayo luminoso que se dirige hacia el eje X, el cual actúa de separación entre dos medios, siendo n_1 el índice de refracción para y>0 , y n_2 el índice de refracción para y<0: $n_1>n_2$ (ver figura inferior). El rayo llega al punto E de coordenadas (c,-b). A partir del principio de Fermat deducir la ley de Snell, esto es, la relación entre los ángulos α y β que sigue la luz.



La luz se propaga en línea recta en los dos medios pero con distinta velocidad. Designamos con v_1 la velocidad en el medio superior y con v_2 en el medio inferior. De entre todas las trayectorias posibles entre P y E se ha representado una de ellas, que pasa por un punto M al que asignamos de coordenadas (x, 0). El principio de Fermat establece que la luz sigue el camino para el que el tiempo de recorrido es el mínimo posible.

El tiempo en ir de P a E es:

$$t = \frac{PM}{v_1} + \frac{ME}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}{v_2}$$

En la ecuación anterior la variable es x y para hallar el valor mínimo de t derivamos la función respecto de x e igualamos a cero.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1}\frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{1}{v_2}\frac{2(c-x)(-1)}{2\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{v_2}\frac{(c-x)}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}}$$

A partir de la figura del enunciado se deduce que:

$$\operatorname{tag}\alpha = \frac{x}{a} \Rightarrow \; x = a\operatorname{tag}\alpha \;\; ; \;\; \operatorname{tag}\beta = \frac{c-x}{b} \Rightarrow \; c - x = b\operatorname{tag}\beta$$

Sustituyendo estos valores

$$\frac{1}{v_1}\frac{a\ \mathrm{tag}\,\alpha}{\sqrt{a^2+a^2\mathrm{tag}^2\alpha}}=\frac{1}{v_2}\frac{b\ \mathrm{tag}\,\beta}{\sqrt{b^2+b^2\mathrm{tag}^2\beta}}\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{\mathrm{tag}\,\alpha\sqrt{1+\mathrm{tag}^2\beta}}{\mathrm{tag}\,\beta\sqrt{1+\mathrm{tag}^2\alpha}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{v_1}{v_2}=\frac{\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tag}^2\beta}}{\mathrm{tag}\,\beta}}{\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tag}^2\alpha}}{\mathrm{tag}\,\alpha}}=\frac{\sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{tag}^2\beta}+1}}{\sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{tag}^2\alpha}+1}}=\frac{\sqrt{\dfrac{\cos^2\beta}{\mathrm{sen}^2\beta}+1}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha}{\mathrm{sen}^2\alpha}+1}}=\frac{\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\beta}}{\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha}}\Rightarrow\quad v_2\mathrm{sen}\,\alpha=v_1\mathrm{sen}\,\beta$$

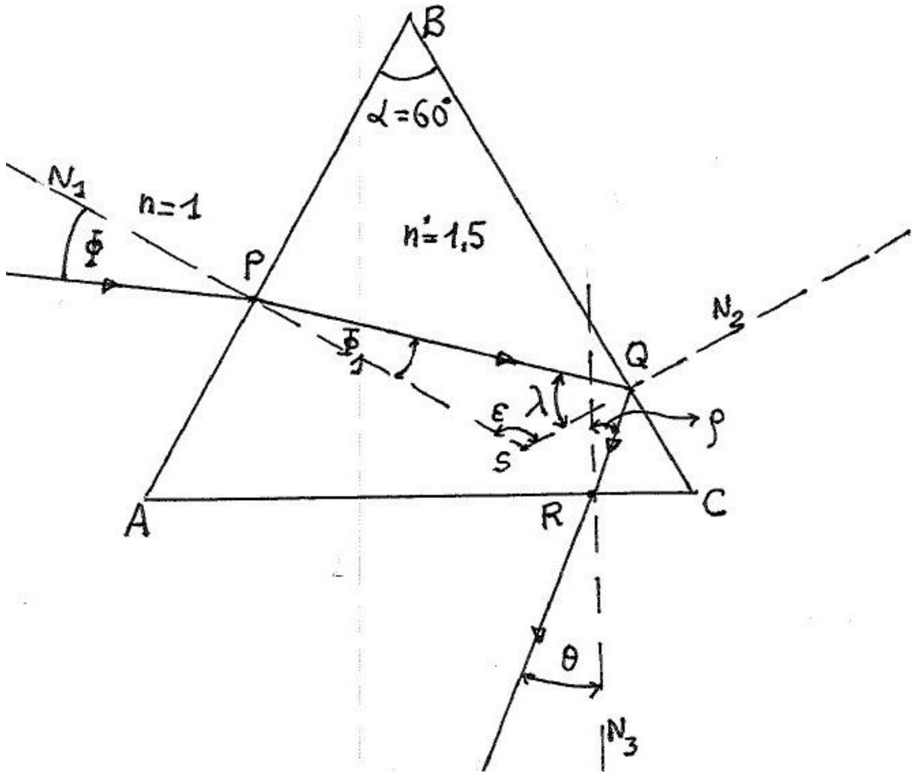
Teniendo en cuenta la definición de índice de refracción de un medio, resulta:

$$n_1=\frac{c}{v_1};\quad n_2=\frac{c}{v_2}\Rightarrow\frac{v_2}{v_1}=\frac{c/n_2}{c/n_1}=\frac{n_1}{n_2}\Rightarrow\frac{n_1}{n_2}=\frac{\mathrm{sen}\,\beta}{\mathrm{sen}\,\alpha}\quad\Rightarrow\quad n_1\mathrm{sen}\,\alpha=n_2\mathrm{sen}\,\beta$$

El ángulo α se denomina de incidencia y se representa por i, el ángulo β es el de refracción y se representa por r

$$n_1\mathrm{sen}\,i=n_2\,\mathrm{sen}\,r$$

26.-La figura inferior representa un prisma de ángulo α =60º e índice de refracción n´=1,5. Un rayo luminoso, desde el aire(n=1,) incide en P, se refleja en Q y sale por la cara AC formando con la normal N_3 un cierto ángulo θ.
1.- Determinar cuál es el valor máximo que puede tener el ángulo θ.
2.- Si la longitud de la arista del prisma es L, calcular cuánto vale la distancia que recorre el rayo luminoso en el interior del prisma cuando θ es máximo.



1.-La primera condición supone que el ángulo λ tiene que ser superior o igual al ángulo límite para que se pueda reflejar. Cumpliéndose la ecuación, $n'\cdot \text{sen}\,\lambda_1 = n\cdot \text{sen}\,90^o$

$$1{,}5\,\text{sen}\lambda_1 = 1\cdot \text{sen}\,90^o \quad \Rightarrow \quad \lambda_L = 41{,}8^o$$

En el triángulo PBQ de la figura se cumple, teniendo en cuenta que N_1 y N_2 son las normales a las caras AB y BC.

$$90-\Phi_1+\alpha+90-\lambda = 180^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = \Phi_1 + \lambda \qquad (1)$$

En el triángulo RQC

$$90-\rho+90-\lambda+\alpha = 180^o \quad \Rightarrow \quad \alpha = \rho + \lambda \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que: $\rho = \Phi_1$ (3)

Según la ley de Snell para el rayo QR tenemos:

$$1{,}5 \cdot \text{sen}\,\rho = 1 \cdot \text{sen}\,\theta \quad (4)$$

Según el enunciado θ ha de ser máximo, lo cual nos lleva a decir que ρ es máximo y según (3) Φ_1 máximo. De acuerdo con (1), λ debe ser mínimo. Para que haya reflexión en la cara BC el ángulo límite marca ese mínimo, por tanto,

$$\lambda_L = 41{,}8^o \;\Rightarrow\; \rho = 60 - 41{,}8 = 18{,}2^o\,.$$

Aplicando la ley de Snell

$$1{,}5 \cdot \text{sen}\,18{,}2 = 1 \cdot \text{sen}\,\theta_M \Rightarrow \theta_M = 27{,}9^o$$

2.- Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo PBQ: $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{PQ} = \dfrac{\text{sen}\,(90-\Phi_1)}{BQ}$

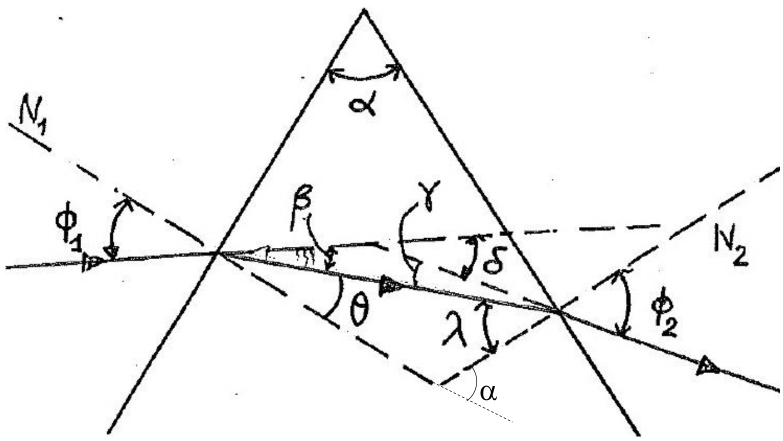
Aplicamos el teorema de los senos en el triángulo RQC: $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{QR} = \dfrac{\text{sen}\,(90-\rho)}{QC}$

De estas dos últimas ecuaciones:

$$PQ + QR = BQ\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\left(90-\Phi_1\right)} + QC\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\left(90-\rho\right)}, \quad \text{como } \rho = \Phi_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad PQ + QR = \left(BQ + QC\right)\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\left(90-\rho\right)} = L\frac{\text{sen}\,60^\circ}{\text{sen}\,71{,}8} = 0{,}91L$$

27.- En la figura se representa un prisma de ángulo α, e índice de refracción n, y la marcha de un rayo luminoso que incide desde el aire n = 1, en la cara de la izquierda con un ángulo Φ_1, siendo δ el ángulo de desviación.



Comprobar que en la marcha del rayo se cumple la ecuación siguiente:

$$\frac{sen\,\dfrac{\delta+\alpha}{2}}{sen\,\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{n\ \ cos\,\dfrac{\theta-\lambda}{2}}{cos\,\dfrac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}$$

De la figura se deducen las siguientes ecuaciones, sin más que observar que el ángulo exterior en un triángulo, es igual a la suma de los interiores no adyacentes:

$$\alpha=\theta+\lambda\ ;\ \delta=\beta+\gamma\ ;\ \beta=\Phi_1-\theta\ ;\ \gamma=\Phi_2-\lambda\quad\Rightarrow\ \delta+\alpha=\theta+\lambda+\beta+\gamma\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \delta+\alpha=\theta+\lambda+\Phi_1-\theta+\Phi_2-\lambda\qquad\Rightarrow\quad \delta+\alpha=\Phi_1+\Phi_2$$

La ley de Snell nos conduce a.

$$1\cdot \mathrm{sen}\,\Phi_1=\mathrm{n\,sen}\,\theta\ ;\quad \mathrm{n\,sen}\,\lambda=1\cdot\mathrm{sen}\,\Phi_2\quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{\delta+\alpha}{2}}{\mathrm{sen}\,\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{\Phi_1+\Phi_2}{2}}{\mathrm{sen}\,\dfrac{\theta+\lambda}{2}}\quad (2)$$

Recurrimos a la ecuación trigonométrica: $\mathrm{sen}C+\mathrm{sen}D=2\mathrm{sen}\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$

$$\operatorname{sen}\Phi_1 + \operatorname{sen}\Phi_2 = 2\operatorname{sen}\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2}\cdot\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\frac{\Phi_1+\Phi_2}{2} = \frac{\operatorname{sen}\Phi_1+\operatorname{sen}\Phi_2}{2\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\lambda = 2\operatorname{sen}\frac{\theta+\lambda}{2}\cdot\cos\frac{\theta-\lambda}{2} \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen}\frac{\theta+\lambda}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\frac{\theta-\lambda}{2}}$$

Llevamos estas dos últimas ecuaciones a la (2) y sustituimos la relación (1)

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{\delta+\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\Phi_1+\operatorname{sen}\Phi_2}{2\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\frac{\theta-\lambda}{2}}} = \frac{\dfrac{n\operatorname{sen}\theta+n\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}}{\dfrac{\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen}\lambda}{2\cos\frac{\theta-\lambda}{2}}} = \frac{n\ \cos\frac{\theta-\lambda}{2}}{\cos\frac{\Phi_1-\Phi_2}{2}}$$

Cuando el ángulo d es el mínimo se cumple que :

$$\theta = \lambda\ ;\ \Phi_1 = \Phi_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{\operatorname{sen}\frac{\delta_{mi}+\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} = n$$

La ecuación anterior se utiliza para determinar el índice de refracción del un prisma, de ángulo α , para ello se mide el ángulo de desviación mínima.

28.- Una lente delgada biconvexa tiene de distancia focal imagen f´. Determinar la mínima distancia que existe entre un objeto real y su imagen real.

La ecuación de una lente delgada es:

$$\frac{1}{f'} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s'} \quad (1)$$

Esta ecuación lleva aparejado el siguiente convenio de signos. La distancia focal imagen f´ es positiva, la distancia de la lente al objeto, s, es negativa y la distancia de la lente a la imagen real, s´ es positiva.

Designamos con d la distancia entre el objeto y su imagen real, y como una distancia es un valor positivo y s, es negativo, para que siempre se cumpla tal condición deberá ser:

$$d = -s + s' \quad \Rightarrow \quad s' = d + s \quad (2)$$

Sustituimos (2) en (1).

$$\frac{1}{f'} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{d+s} = \frac{-(d+s)+s}{s(d+s)} = \frac{-d}{s(d+s)} \Rightarrow \quad -d\,f' = s(d+s) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d(f'+s) = -s^2 \Rightarrow \quad d = -\frac{s^2}{f'+s}$$

Como nos piden la mínima distancia derivamos d respecto de s e igualamos a cero $d' = -\left[\frac{(f'+s)\cdot 2s - s^2}{(f'+s)^2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(f'+s) - s = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -2f'$

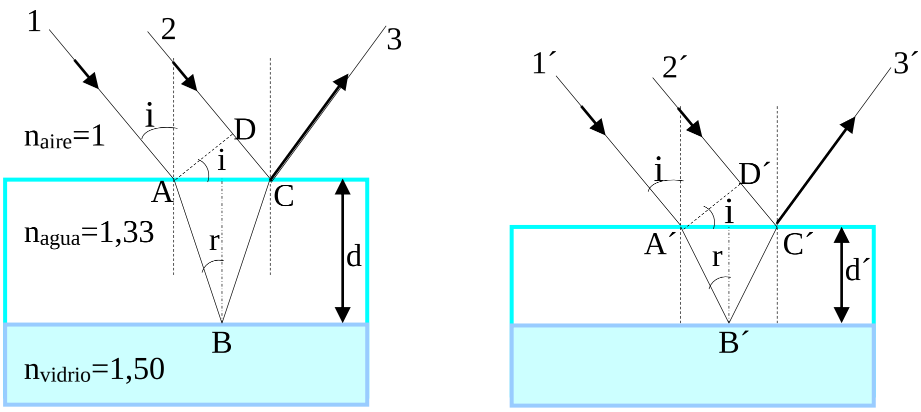
Sustituimos el valor encontrado para s en la ecuación (1).

$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{-2f'} + \frac{1}{s'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f'} - \frac{1}{2f'} = \frac{1}{s'} \quad \Rightarrow \quad s' = 2f'$$

La distancia mínima entre el objeto real y la imagen real es d = 4f´.

29-. Sobre la superficie de un vidrio de índice de refracción 1,50 se encuentra una capa uniforme de agua (n=1,33). Un haz luminoso de λ=680 nm, incide con un ángulo de 30º sobre el agua. Se observa un máximo en la interferencia por reflexión Debido a la evaporación del agua y después de transcurridos 15 minutos se vuelve a detectar un máximo. Calcular la velocidad con que disminuye el grosor de la película.

Designamos con d el espesor de la capa de agua cuando se observa el primer máximo y con d´ cuando se observa el segundo máximo. En la figura 1 se representa la marcha de los rayos. El rayo 2 se refleja en una superficie de mayor índice de refracción por lo que hay un cambio de fase, el rayo refractado 1 también se refleja con un cambio de fase, por tanto, el efecto del cambio de fase se anula. La interferencia se produce entre el reflejado 3 y el refractado procedente de 1 que se ha reflejado en B.



(a) Fig 1 (b)

La diferencia de caminos ópticos recorridos por los rayos (ver fig.1a) es:

Por producirse un máximo: $n_{H2O}(AB+BC)-n_{aire}DC=k\lambda$ (1)

De la figura se deduce:

$$AB=BC=\frac{d}{\cos r}\Rightarrow \quad AC=2d\,\mathrm{tag}\,r \quad\Rightarrow\quad \mathrm{sen}\,i=\frac{DC}{AC}\Rightarrow \quad DC=2d\,\mathrm{tag}\,r\cdot\mathrm{sen}\,i$$

La ecuación (1) recordando que n_{aire}=1; queda ahora:

$$n_{H2O}\frac{2d}{\cos r}-2d\,\mathrm{tag}\,r\cdot\mathrm{sen}\,i=k\lambda \quad (2)$$

Aplicamos la ley de Snell:

$$1\cdot \mathrm{sen}\, i = n_{H2O}\mathrm{sen}\, r = n_{H2O}\sqrt{1-\cos^2 r} \Rightarrow \mathrm{sen}^2 i = n_{H2O}^2\left(1-\cos^2 r\right) \Rightarrow \cos r = \sqrt{1-\frac{\mathrm{sen}^2 i}{n_{H2O}^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tag}\, r = \frac{\mathrm{sen}\, r}{\cos r} = \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\, i}{n_{H2O}}}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{sen}^2 i}{n_{H2O}^2}}} = \frac{\mathrm{sen}\, i}{\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}}$$

Llevado lo anterior a (2), resulta.

$$n_{H2O}\frac{2d}{\sqrt{1-\dfrac{\mathrm{sen}^2 i}{n_{H2O}^2}}} - 2d\frac{\mathrm{sen}^2\, i}{\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}} = k\lambda \Rightarrow \frac{2d\, n_{H2O}^2}{\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}} - 2d\frac{\mathrm{sen}^2\, i}{\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}} = k\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2d}{\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}}\left(n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i\right) = k\lambda \Rightarrow \quad 2d\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i} = k\lambda \Rightarrow \quad d = \frac{k\lambda}{2\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}}$$

Aplicando el mismo razonamiento a la figura 1b:

$$d' = \frac{k'\lambda}{2\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}}$$

La velocidad de evaporación es:

$$\frac{d-d'}{\Delta t} = \frac{\lambda(k-k')}{2\Delta t\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}} = \frac{\lambda}{2\Delta t\sqrt{n_{H2O}^2-\mathrm{sen}^2 i}} = \frac{680}{2\cdot 15\cdot 60\sqrt{1{,}33^2-\mathrm{sen}^2 30}} = 0{,}307\,\frac{nm}{s}$$

30.- Una lente semiesférica tiene un radio R = 7,5 cm y un índice de refracción n=1,5. A una distancia de 5 cm de la cara plana se sitúa un objeto de 2 cm de altura. Calcular la distancia a la que se forma su imagen, su tamaño y su naturaleza.

Al ser una lente semiesférica debe considerarse como una lente gruesa. Debemos calcular en la posición de los focos y de los planos principales. Tratándose de una lente semiesférica, y dado que trabajamos en la zona paraxial el plano imagen H´ es tangente a la esfera por su parte convexa, más adelante comprobaremos esta afirmación.
La ecuación que da la distancia focal imagen en una lente gruesa es:

$$\mathbf{\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)\ e}{n r_1 r_2}}$$

r_1 y r_2 son los radios de las caras de la lente, e el espesor y n el índice de refracción.

Aplicando la fórmula anterior a la lente del problema

$$\mathbf{\frac{1}{f'} = (1{,}5-1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-7{,}5}\right) + \frac{(1{,}5-1)\ \cdot 7{,}5}{1{,}5 \cdot \infty \cdot (-7{,}5)} = \frac{0{,}5}{7{,}5} \Rightarrow f' = +15\,cm}$$

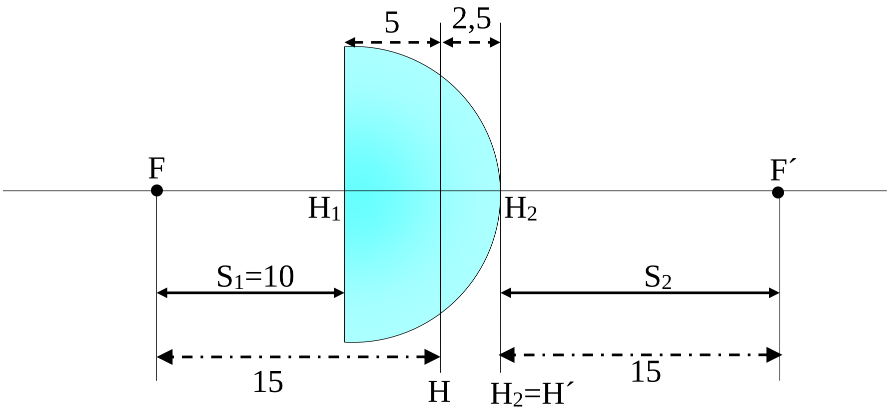
La distancia focal objeto es –f=15 cm, ya que los medios de entrada y salida de la lente es el mismo, esto es, el aire con n=1.

Calculamos la distancia que existe desde el foco objeto a la cara plana de la lente:

e

$$H_1F = s_1 = -f' - \frac{(n-1)}{n}\frac{e\ \cdot f'}{r_2} = -15 - \frac{0{,}5}{1{,}5}\cdot\frac{7{,}5 \cdot 15}{-7{,}5} = -10\,\mathrm{cm}$$

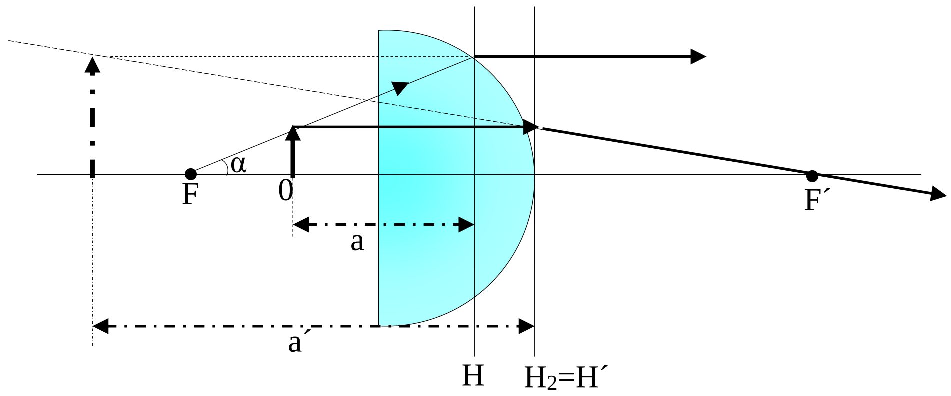
El plano principal H_1 está a una distancia de 5 cm de la cara plana y por ello la distancia entre los planos principales es 2,5 cm. En la figura se han indicado los valores absolutos de las distancias. Los puntos H_1 y H_2 son los centros de figura.



s_2 designa la distancia entre H_2 y F´.

$$= H_2F´ = s_2 = +f´ - \frac{n-1}{n}\frac{e\,f´}{r_1} = +15 - \frac{0,5}{1,5}\cdot\frac{7,5\cdot 15}{\infty} = 15\text{cm}$$

Este valor coincide con la distancia focal imagen H´F, luego para las lentes semiesféricas el plano principal imagen es tangente a la lente por la parte convexa, tal como afirmamos antes.



En la figura anterior, se ha colocado el objeto (una flecha derecha) a una distancia de 5 cm de la cara plana de la lente, por tanto, está a una distancia en valor absoluto de 10 cm del plano principal imagen.

Para construir gráficamente la imagen del objeto se trazan dos rayos procedentes del objeto, uno paralelo al eje FF´ llega a los planos principales y pasa por el foco imagen F´, otro como si procediera del foco objeto llega a los planos principales y sale paralelo a FF´. En la figura se ve que el haz es divergente, por lo que la imagen será virtual y se formará en las prolongaciones de los rayos hacia atrás, tal como indica la figura.
Si designamos con a, la distancia del plano principal objeto al objeto y con a´ la distancia del plano principal imagen a la imagen, tenemos:

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a´} = \frac{1}{f´} \Rightarrow -\frac{1}{-10} + \frac{1}{a´} = \frac{1}{15´} \Rightarrow \frac{1}{a´} = \frac{1}{15} - \frac{1}{10} = \frac{-5}{150} \Rightarrow a´ = -30\,\text{cm}$$

Para determinar el tamaño de la imagen, se deduce de la figura anterior:

$$\text{tag}\,\alpha = \frac{\text{tamaño objeto}}{\text{FO}} = \frac{\text{tamaño imagen}}{\text{FH}} \Rightarrow \frac{+2\,\text{cm}}{-5\,\text{cm}} = \frac{y´}{-15} \Rightarrow y´ = +6\,\text{cm}$$

La imagen es virtual, derecha y tres veces mayor que el objeto.