42.- (566).- El radio de curvatura R de la superficie esférica de una lente plano convexa de vidrio (n=1,52)es de 26 cm; el espesor de la lente e= 3,04 cm. Calcular la distancia focal de la lente y hallar la posición de la imagen de un objeto que se halla a 75 cm de distancia respecto de la posición más próxima de la lente y situado del lado:1) de la superficie convexa ; 2) de la superficie plana.

Recordatorio de formulas

$$\frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{(n-1)^2 e}{n r_1 r_2}; \quad s_1 = -f' - \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{e f'}{r_2} \quad ; \; s_2 = +f' - \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{e f'}{r_1}$$

Problema propuesto en el libro Óptica., D. V. Sivujin . Editorial. Reverté.

1) Analizamos el caso 1)

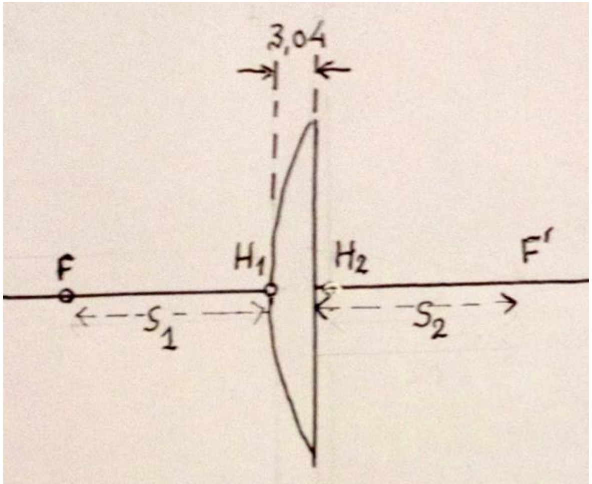


Fig.1

En la figura 1, F y F´ son los focos principales H_1 y H_2 los centros de figura.
Aplicamos las formulas

$$\frac{1}{f'} = (1{,}52-1)\left(\frac{1}{26} - \frac{1}{\infty}\right) + \frac{0{,}52^1}{1{,}52}\frac{3{,}04}{26\cdot\infty} = \frac{0{,}52}{26} \quad \Rightarrow \; f' = 50\,\text{cm} = f$$

La igualdad f ´ = f por ser los medios de entrada y salida iguales, aire (n=1)

$$s_1 = -50 - \frac{0{,}52}{1{,}52}\cdot\frac{3{,}04\cdot 50}{\infty} = -50\,\text{cm}$$

El plano principal objeto es tangente a la cara convexa en H_1.

$$s_2 = +50 - \frac{0{,}52}{1{,}52} \cdot \frac{3{,}04 \cdot 50}{26} = 48\,\text{cm}$$

Al ser s_2 = 48 cm y f´ = 50 cm, el plano principal imagen está dentro de la lente a una distancia de 2 cm de la cara plana..La distancia del objeto es 75 cm de la cara convexa que es la misma distancia que el plano principal objeto.
Aplicamos la ecuación

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a´} = \frac{1}{f´} \quad \Rightarrow \; -\frac{1}{-75} + \frac{1}{a´} = \frac{1}{50} \;\Rightarrow\; \frac{1}{a´} = \frac{1}{50} - \frac{1}{75} \;\Rightarrow\; a´ = \frac{75 \cdot 50}{75 - 50} = 150\,\text{cm}$$

Como la distancia de 150 cm es desde el plano principal imgen a la imagen , la distancia desde la cara plana a la imagen es 150-2 = 148 cm

Caso 2).

La distancia focal es la misma f´= 50 cm, ahora s1 es la distancia desde la cara plana al foco F

$$s_1 = -f´ - \left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{e\,f´}{R} = -50 - \frac{0{,}52}{1{,}52} \cdot \frac{3{,}04 \cdot 50}{-26} = -48\,\text{cm}$$

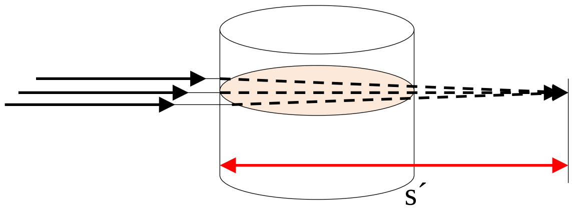
Los planos principales están en los mismos lugares que en el caso anterior, pero ahora el plano objeto es el que antes era plano imagen. De la cara plana al plano principal objeto hay una distancia de 2 cm, la distancia del objeto al plano principal objeto es 75+2=77 cm

$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{a´} = \frac{1}{f´} \quad \Rightarrow \; -\frac{1}{-77} + \frac{1}{a´} = \frac{1}{50} \;\Rightarrow\; \frac{1}{a´} = \frac{1}{50} - \frac{1}{77} \;\Rightarrow\; a´ = \frac{77 \cdot 50}{77 - 50} = 143\,\text{cm}$$

Estos 143 cm es la distancia al plano principal imagen, el cual es tangente a la cara convexa.

43.-** (593)-**Un haz de luz paralela incide sobre una vasija de vidrio de paredes delgadas y radio R= 9 cm. La vasija contiene etanol de índice de refracción 1,36. Calcular la distancia desde el centro de la vasija al lugar donde se forma la imagen.

Recordatorio. Invariante de Abbe: $\dfrac{n'-n}{R}=\dfrac{n'}{s¡}-\dfrac{n}{s}$



Al tener la vasija paredes delgadas estimamos que no influirá en la marcha de los rayos, como si se tratara de una lente cilíndrica, y consideraremos para la resolución del problema únicamente dos secciones curvas como formando parte de dioptrios, empleando las ecuaciones válidas para dioptrios esféricos. (Obsérvese en la figura que estudiamos la marcha de los rayos solo en una sección plana, con una curvatura convexa a la entrada de los rayos y otra cóncava a la salida. Ambas curvas, bien podrían formar parte de dos dioptrios esféricos de curvatura opuesta de radio R, lo que nos permite utilizar las ecuaciones correspondientes a los mismos).

Aplicamos el invariante de Abbe a la primera superficie de radio +9 cm. n=1 para el aire n' = 1,36 para el etanol, $s=-\infty$

$$\frac{1{,}36-1}{9}=\frac{1{,}36}{s'}-\frac{1}{-\infty}\qquad\Rightarrow\ s'=\frac{9\cdot 1{,}36}{0{,}36}=34\,\text{cm}$$

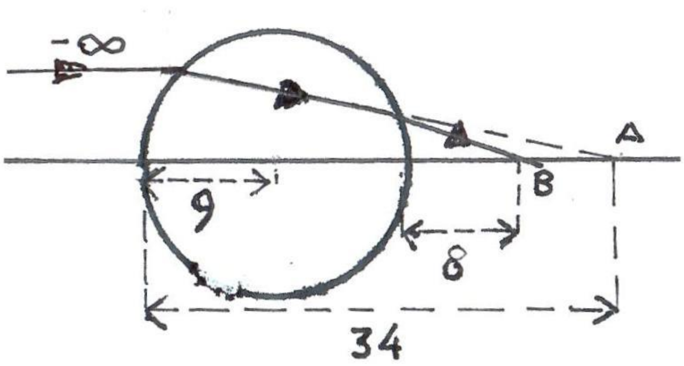
La imagen se formaría si solo hubiese etanol a 34 cm a la derecha de la superficie convexa. Esta imagen es objeto para la segunda superficie que es cóncava, la distancia de este objeto virtual a la superficie cóncava es:

$$34-2\cdot R=16\,\text{cm}$$

Aplicamos de nuevo la fórmula Ahora la luz pasa del etanol al aire por tanto n = 1,36 y n' = 1, el radio es R = - 9 cm, de acuerdo con el criterio de signos.

$$\frac{1-1{,}36}{-9}=\frac{1}{s'}-\frac{1{,}36}{16}\qquad\Rightarrow\qquad\frac{0{,}36}{9}+\frac{1{,}36}{16}=\frac{1}{s'}\qquad s'=\frac{1}{0{,}04+0{,}085}=+8{,}0$$

En la siguiente figura, se indica desde una vista superior y en el plano considerado, la marcha de un rayo luminoso procedente del infinito después de penetrar por la izquierda formaría su imagen en el punto A, pero como encuentra a la derecha la otra parte del dioptrio, se desvía hasta el punto B. Los números que aparecen son distancias en centímetros.


-∞
A
B
9
8
34

44.-** (594).**-El radio de una esfera de vidrio (n=1,5) es R= 4 cm. 1) Hallar la distancia desde el centro de la esfera hasta la imagen de un objeto el cual está situado a la izquierda de la esfera y a una distancia de 6 cm
2) Hallar el aumento de la imagen

Recordatorio para la ecuación de las lentes gruesas:

$$-\frac{1}{f}=\frac{1}{f'}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{e\,(n-1)}{n\;{}_1R_1R_2} \quad ; \quad h_1=-\frac{f(n-1)e}{R_2\,n} \quad ; \quad h_2=-\frac{f(n-1)e}{R_1\,n}.$$

Donde h_1 y h_2 son respectivamente las distancias de los planos principales a los vértices respectivos. R_1 =R_2 en valor absoluto, al tratarse de una superficie esférica.

Propuesto en el libro Problemas de Física General. Óptica . S.V. Sivujin

Calculamos las distancias focales

$$-f=f'=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n\,R_1R_2}{n(R_2-R_1)+e(n-1)}=\frac{1}{0{,}5}\,\frac{1{,}5\cdot 4\cdot(-4)}{1{,}5(-4-4)+8\cdot 05}=2\cdot\frac{-24}{-12+4}=\frac{48}{8}=+6\text{ cm}$$

Calculamos

$$h_1=V_1H_1=-\frac{f\,(n-1)e}{R_2n}=-\frac{6\cdot 0{,}5\cdot 8}{-4\cdot 1{,}5}=+4\,\text{cm}$$

El plano principal objeto H_1 pasa por el centro de la esfera por ser h_1 = R

$$h_2=V_2H_2=-\frac{f\,(n-1)e}{R_1n}=-\frac{6\cdot 0{,}5\cdot 8}{4\cdot 1{,}5}=-4\,\text{cm}$$

El plano principal imagen H_2 pasa por el centro de la esfera, por ser $|h_2|$ = R. Esto supone que ambos planos son coincidentes.

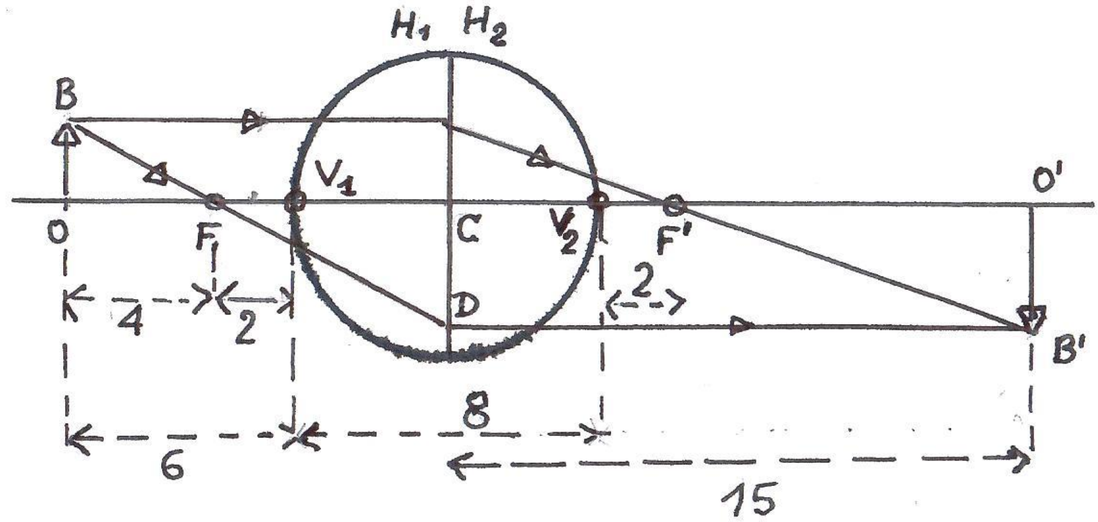
El foco objeto F se encuentra a 6 cm de H_1 , luego la distancia $|V_1F|=2\,\text{cm}$

El foco imagen F' se encuentra a 6 cm de H_2, luego la distancia V_2F' = 2 cm
La distancia del objeto al plano principal H_1 es s_o = -(6+4)= -10 cm

$$-\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f'} \quad\Rightarrow -\frac{1}{-10}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{6} \quad\Rightarrow \frac{1}{s_i}=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{4}{60} \quad\Rightarrow s_i=+15\,\text{cm}$$

Es la distancia del plano principal imagen a la imagen y es la misma que al centro de la esfera.

En la figura 1 se han representado la marcha de los rayos y la formación de la imagen. Los números que figuran son las distancias reales del problema expresadas en centímetros



Fig,1

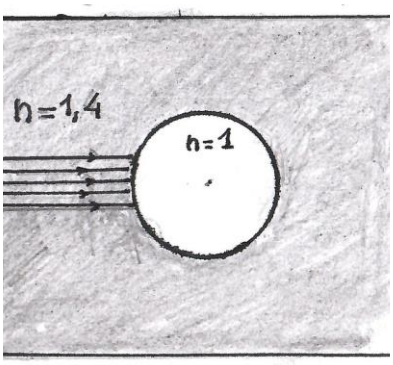
Para determinar el tamaño de la imagen O´B´ observamos los triángulos de la figura.

En l figura 1 son semejantes los triángulos OBF_1 y F_1CD

$$\frac{OB}{OF_1}=\frac{CD}{F_1C} \quad CD = O'B' = OB\frac{F_1C}{OF_1} = OB\frac{6}{4} = 1{,}5 \cdot OB$$

La imagen final es mayor e invertida

45.-** (619).- **Un estrecho haz circular (radio pequeño) se desplaza por un medio homogéneo de índice refracción n= 1,4. El haz incide perpendicularmente sobre un agujero vacío que tiene forma de esfera.



El radio de esta esfera es mucho mayor que el radio del haz. Determinar cuántas veces mayor será el haz a la salida de la esfera respecto de la entrada.

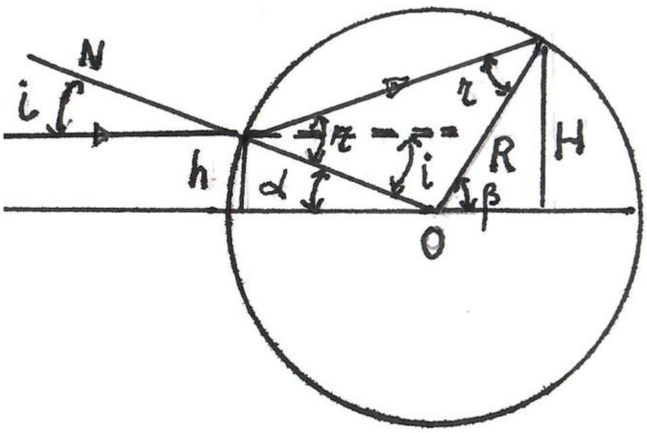


Figura 1

En la figura 1 se representa la marcha de un rayo del haz

El ángulo de incidencia se representa por i y por r el de refracción. h es el radio del haz incidente, R el radio de la esfera, siendo R>> h y H es el radio del haz emegente siendo H>h

Aplicamos la ley de Snell

$$n\,\text{sen}\,i = 1\cdot\text{sen}\,r\ (1)$$

De la figura 1 se deduce:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{R}\ ;\ \ \text{sen}\,\beta = \frac{H}{R}\ \ \Rightarrow \frac{H}{\text{sen}\,\beta} = \frac{h}{\text{sen}\,\alpha}\ \ \Rightarrow\ \ \frac{H}{h} = \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha}\ \ (2)$$

$$2r + \text{ángulo en O} = 180^{\circ}\ ;\ \ \alpha + \beta + \text{ángulo en O} = 180^{\circ}\ \ \Rightarrow\ \alpha + \beta = 2r\ \ \Rightarrow\ \ \beta = 2r - \alpha$$

Ángulo i = ángulo alfa   i = a   Sustituyendo en (1) $n \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} r$ (3)

Sustituyendo en (2) $\frac{H}{h} = \frac{\operatorname{sen}(2r-\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(2r-\alpha)}{\frac{\operatorname{sen} r}{n}} = n\frac{\operatorname{sen}(2r-\alpha)}{\operatorname{sen} r}$

Al ser h mucho menor que R los ángulos r y α son pequeños se puede sustituir el seno por el valor del ángulo en radianes

$$\frac{H}{h} = n\frac{2r-\alpha}{r}$$ y en la ecuación (3) $n\,\alpha = r$

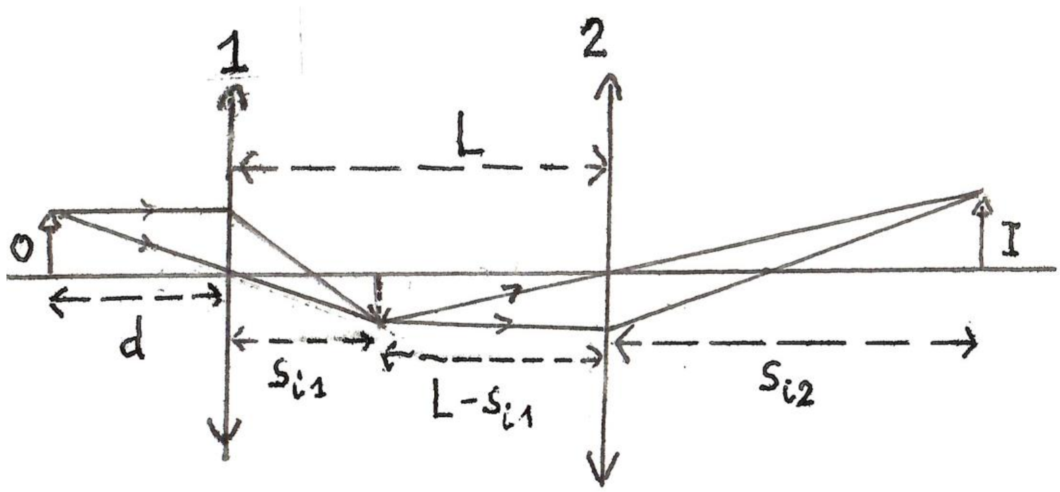
$$\frac{H}{h} = n\frac{2r-\frac{r}{n}}{r} = n\frac{2rn-r}{nr} = n\frac{2n-1}{n} = 2n-1 = 1{,}8$$

46.-** (628.)-**Dos lentes delgadas tienen de potencia D_1 y D_2 respectivamente. Están colocadas de manera que sus ejes ópticos coinciden. La separación entre ellas es L = 25 cm. Este sistema produce una imagen real derecha de un objeto colocado en el eje óptico a la izquierda de la lente 1, con un aumento lateral A =1. Si se intercambian las posiciones de las lentes de manera que el objeto ahora está a la izquierda de la lente 2 se obtiene una imagen real con un aumento lateral 4.

Calcular la diferencia D_1 –D_2 de las potencias de las lentes

Propuesto en las Olimpiadas de Asia

Las dos lentes son convergentes para que formen imágenes reales. En la figura siguiente se indica la formación de la imagen en un sistema de dos lentes convergentes



En la figura 1 la lente 1 forma una imagen real e invertida del objeto O, a una distancia s_{i1} de la lente. Esta imagen es el objeto para la lente 2 que forma una imagen real y derecha del objeto, cuando se intercambian las posiciones de las lentes d y L son las mimas.
Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas a la lente 1. Designamos con f_1 la distancia focal imagen de la lente 1

$$-\frac{1}{-d}+\frac{1}{s_{i1}}=\frac{1}{f_1} \Rightarrow \frac{1}{s_{i1}}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{d} \Rightarrow s_{i1}=\frac{f_1 d}{d-f_1}$$

El aumento de la lente 1: $a_1=\frac{s_{i1}}{-d}$

Aplicamos la ecuación de las lentes delgadas a la lente 2. La distancia focal imagen de la lente 2 se designa por f_2.

$$-\frac{1}{-(L-s_{i1})}+\frac{1}{s_{i2}}=\frac{1}{f_2} \Rightarrow \frac{1}{s_{i2}}=\frac{1}{f_2}-\frac{1}{(L-s_{i1})} \Rightarrow s_{i2}=\frac{f_2(L-s_{i1})}{(L-s_{i1})-f_2}$$

El aumento de la lente 2 es : $a_2 = \dfrac{s_{i2}}{-(L - s_{i1})}$

El aumento del conjunto de las dos lentes

$$A_1 = a_1 \cdot a_2 = \frac{s_{i1}}{d} \cdot \frac{s_{i2}}{L - s_{i1}} = \frac{f_1 d}{d(d - f_1)} \cdot \frac{f_2 (L - s_{i1})}{(L - s_{i1})(L - s_{i1} - f_2)} = \frac{f_1 f_2}{(d - f_1)(L - s_{i1} - f_2)} \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{f_1 f_2}{(d - f_1)\left(L - f_2 - \dfrac{f_1 d}{d - f_1}\right)} = \frac{f_1 f_2}{L(d - f_1) - f_2(d - f_1) - f_1 d} = \frac{f_1 f_2}{Ld - Lf_1 - f_2 d + f_1 f_2 - f_1 d} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{A_1} = \frac{d\left[L - (f_1 + f_2)\right] + f_1 f_2 - Lf_1}{f_1 f_2} \Rightarrow \frac{1}{A_1} = \frac{d\left[L - (f_1 + f_2)\right]}{f_1 f_2} - \frac{L}{f_2} + 1 \quad (1)$$

Al intercambiar las posiciones de las lentes nos basta cambiar f_1 por f_2 n la formula (1). El primer término del segundo miembro de (1) no varía

$$\frac{1}{A_2} = \frac{d\left[L - (f_1 + f_2)\right]}{f_1 f_2} - \frac{L}{f_1} + 1 \quad (2)$$

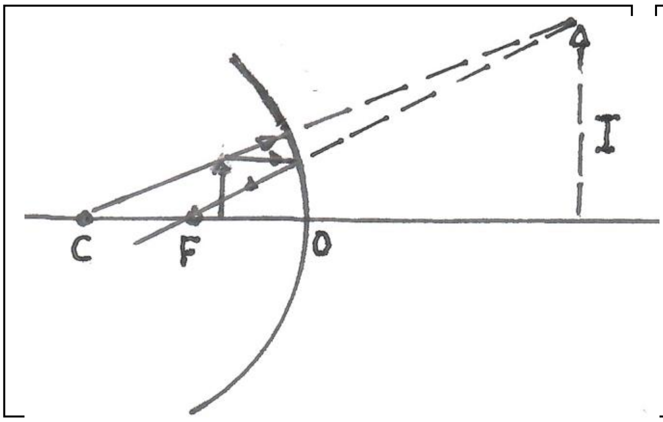
Restando ambas ecuaciones

$$\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} = -\frac{L}{f_2} + \frac{L}{f_1} \quad 1 - \frac{1}{4} = (D_1 - D_2)\,0{,}25 \quad \Rightarrow D_1 - D_2 = 3 \text{ dioptrías}$$

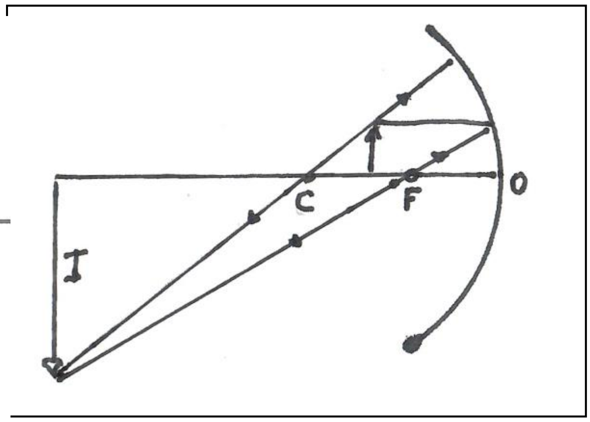
47.-** (664.)- **Un espejo esférico cóncavo tiene un radio de curvatura de 50 cm. Determinar las posiciones de un objeto para el que la imagen es cuatro veces mayor que el objeto a ¿Cuál es la posición de la imagen en cada caso?¿Es real o virtual?

Propuesto en el libro Optica . Francis W. Sears. Editorial Aguilar.

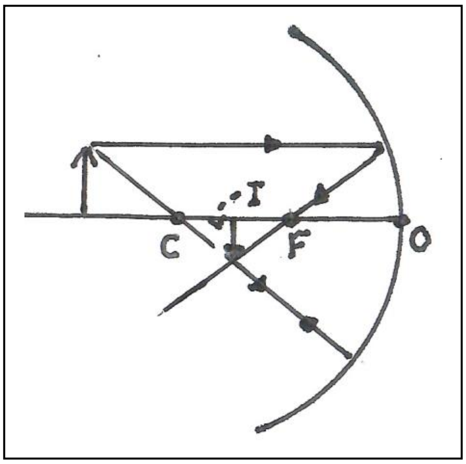
En la figura 1 se representan las posiciones de un objeto y sus imágenes en un esspejo cóncavo



a)



b)



c)

Fig 1

La distancia OC es el radio de curvatura del espejo. La distancia OF = OC/2 es la distancia focal. Según el enunciado la imagen es cuatro veces mayor que el objeto, por consiguiente, las soluciones del problema son: las figuras a) y b)

a) con una imagen mayor virtual y derecha y b) una imagen real, mayor. e invertida

La fórmula matemática del espejo es

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}$$

Las distancias se miden desde el centro O al punto considerado del espejo y son positivas cuando la distancia coincida con la marcha de la luz y negativas en caso contrario. Las distancias en vertical se miden a partir del eje principal y se consideran positivas cuando están por encima del eje y negativas cuando están por debajo..
En los dos casos primeros el tamaño de la imagen es mayor que la del objeto.

Analizamos la figura a)

El aumento lateral para este caso es

$$\beta = -\frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -4s$$

Si se sustituyen valores numéricos f es negativo, s' positivo y s negativo

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{-4s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{4s} = \frac{3}{4s} \qquad s = \frac{3f}{4} = \frac{3\cdot(-25)}{4} = -18{,}75\,\text{cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-\frac{s'}{4}} + \frac{1}{s'} = -\frac{4}{s'} + \frac{1}{\acute{}s'} = -\frac{3}{s'} \qquad s' = -3f = -3\cdot(-25) = +75\,\text{cm}$$

Analizamos la figura b)

$$\beta = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = 4s$$

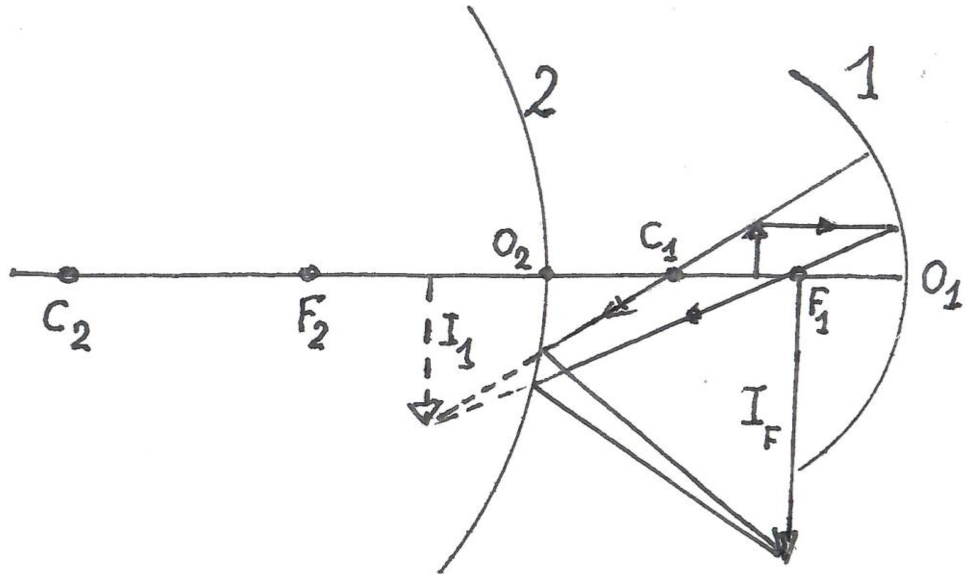
Si se sustituyen valores numéricos f es negativo, s' negativo y s negativo

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{4s} = \frac{5}{4s} \qquad s = \frac{5\,f}{4} = \frac{5\cdot(-25)}{4} = -31{,}25\,\text{cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{s'}{4}} + \frac{1}{s'} = \frac{4}{s'} + \frac{1}{\acute{}s'} = \frac{5}{s'} \qquad s' = 5\,f = 5\cdot(-25) = -125\ \text{cm}$$

48.-** (665.)-**Delante de un espejo esférico cóncavo, sobre su eje óptico principal y perpendicular a él, se encuentra una bujía encendida. La distancia desde la bujía hasta el espejo es 4/3 F. La imagen que esta bujía produce en el espejo cóncavo se refleja sobre un espejo convexo cuya distancia focal es 2F. La distancia entre los espejos es 3F y sus ejes coinciden. La imagen de la bujía en el primer espejo desempeña el papel de objeto virtual del segundo espejo y produce una imagen real que se encuentra entre ambos. Construir esta imagen y calcular el aumento lateral del sistema.

Propuesto en el libro Problemas de Física General. V.Volkenshtéin.Editorial Mir



1 Espejo cóncavo, 2 espejo convexo, F_1 foco del espejo 1, O_1F_1 =F distancia focal imagen del espejo1, C_1 centro de curvatura del espejo 1, $O_1C_!$ = 2 F

O_2 centro de curvatura del espejo 2, O_1O_2 distancia entre los espejos, O_1O_2= 3F, F_2 foco del espejo 2, O_2F_2= 2F, C_2 centro de curvatura del espejo 2, O_2C_2= 4F

La bujía aquí representada por una flecha es el objeto y su distancia desde O_1 es 4/3F

I_1 es la imagen que se formaría si no estuviese el espejo 2, por eso se representa con trazo discontinuo. I_1 es el objeto virtual para el espejo 2. Los rayos procedentes del espejo1 son reflejados por el espejo 2, esos rayos dan lugar a la imagen I_F, que está entre los dos espejos y es real e invertida respecto del objeto.

Aplicamos la ley de los espejos $\frac{1}{f}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}$ al espejo cóncavo

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{\frac{4}{3}F}+\frac{1}{s'} \Rightarrow \frac{1}{s'}=\frac{1}{F}-\frac{3}{4F}=\frac{1}{4F} \quad s'=4F$$

El aumento lateral debido al espejo 1 es $\beta_1 = \dfrac{s'}{\frac{4}{3}F} = \dfrac{4F}{\frac{4}{3}F} = 3$

4F sería la distancia O_1I_1 en caso de no estar el espejo 2, La distancia desde O_2 a I_1 vale 4F menos la distancia entre los espejos 3F ; s_2= $F-3F = F, s'' es la distancia del objeto virtual al espejo 2.

Aplicamos la ley de los espejos al espejo 2

$$\frac{1}{2F} = \frac{1}{F} + \frac{1}{s''} \Rightarrow \frac{1}{s''} = \frac{1}{2F} - \frac{1}{F} = \frac{1-2}{2F} = -\frac{1}{2F} \Rightarrow s'' = -2F$$

El aumento lateral es

$$\beta_2 = \frac{s''}{F} = \frac{-2F}{F}$$

El aumento lateral del sistema es

$$\beta_T = \beta_1\beta_2 = -6$$