

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

## 6ª OLIMPIADA DE FÍSICA. BUCAREST. RUMANIA . 1972

*1.-Tenemos tres cilindros de la misma altura, el mismo radio exterior y la misma masa. El primero (I) es un tubo hueco de paredes delgadas, el segundo (II) es un cilindro macizo homogéneo y el tercero (III), tiene una cavidad exactamente igual a la del primero, pero está cerrado por sus bases con dos tapaderas de masa despreciable. La cavidad está llena con un líquido de la misma densidad que las paredes (I) La densidad del material del primer cilindro es  $n$  veces mayor que el del segundo o el tercero.*

*Inicialmente los tres cilindros se encuentran sobre un plano inclinado de ángulo  $\varepsilon$ .*

*a) Calcular y comparar las aceleraciones lineales de los tres cilindros*

*b) Determinar la condición que debe cumplir el ángulo  $\alpha$  para que ninguno de los tres cilindros deslice.*

*c) Determinar la relación entre las aceleraciones angulares cuando los tres cilindros ruedan con deslizamiento.*

*d) La fuerza de interacción entre el líquido y las paredes del cilindro en el caso de que este cilindro deslice. La masa del líquido es  $m_i$*

*El coeficiente de rozamiento entre los cilindros y el plano es  $\mu$  y entre la pared del tercer cilindro y el líquido despreciable.*

*6ª Olimpiada Internacional de Física. 1972.*

M designa la masa de cada uno de los cilindros. R el radio exterior, r el radio interior y L la altura.

Los momentos de inercia de los cilindros son:

$$I_1 = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) \quad I_2 = \frac{1}{2}MR^2 \quad I_3 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$$

m representa la masa de la pared del tercer cilindro, la masa del líquido que contiene no interviene en la rotación ya que al carecer de rozamiento no rota. El cilindro (I) está hecho de un material distinto que el (II), pero tienen la misma masa, y la relación entre las densidades de los materiales es la siguiente:

$$M = \pi(R^2 - r^2)L\rho_1 = \pi R^2 L\rho_2 = \quad ; \frac{\rho_1}{\rho_2} = n = \frac{R^2}{(R^2 - r^2)} \Rightarrow R^2 - r^2 = \frac{R^2}{n}$$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 \left( \frac{n-1}{n} \right)$$

Si comparamos el tercer cilindro con el segundo

$$M = \pi R^2 L\rho_2 = m + m_{\text{líquido}} = m + \pi r^2 L\rho_2 \Rightarrow m = \pi(R^2 - r^2)L\rho_2 = \pi R^2 \left( 1 - \frac{n-1}{n} \right) L\rho_2$$

Si llevamos las relaciones anteriores a los momentos de inercia tenemos:

$$; I_1 = \frac{1}{2} M \left[ R^2 + R^2 \left( \frac{n-1}{n} \right) \right] = \frac{1}{2} M R^2 \left( \frac{2n-1}{n} \right) \quad ; \quad I_2 = \frac{1}{2} M R^2$$

$$I_3 = \frac{1}{2} m \left[ R^2 + R^2 \left( \frac{n-1}{n} \right) \right] = \frac{1}{2} \pi R^2 \left( 1 - \frac{n-1}{n} \right) L\rho_2 \left[ R^2 + R^2 \left( \frac{n-1}{n} \right) \right] = \frac{1}{2} M R^2 \left[ 1 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right]$$

Si comparamos los tres momentos de inercia ,siendo  $n > 1$ , resulta

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} > 1 \Rightarrow I_1 > I_2 \quad ; \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{1}{1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2} > 1 \Rightarrow I_2 > I_3$$

$$\frac{I_1}{I_3} = n \Rightarrow I_1 > I_2 > I_3$$

Cuando un cuerpo cilíndrico rueda por un plano inclinado, actúan las siguientes fuerzas indicadas en la figura 1

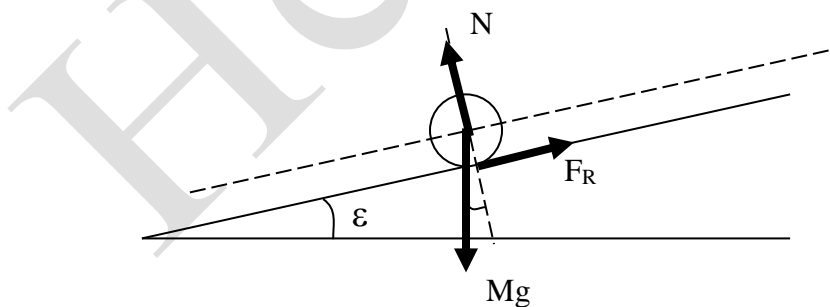


Fig. 1

Las ecuaciones del movimiento para la rodadura pura son:

$$\left. \begin{array}{l} Mg \operatorname{sen} \varepsilon - F_R = M a_{\text{CM}} \\ F_R R = I \alpha \quad ; \quad a_{\text{CM}} = \alpha R \end{array} \right\} \alpha = \frac{Mg \operatorname{sen} \varepsilon}{MR + \frac{I}{R}} \quad (1)$$

Se aplica la ecuación (1) a cada cilindro:

(I)

$$\alpha_1 = \frac{Mg \operatorname{sen} \varepsilon}{MR + \frac{1}{2}MR^2 \left( \frac{2n-1}{n} \right)} = \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{2R + R \left( \frac{2n-1}{n} \right)}, \quad a_{CM(1)} = \alpha_1 R = 2g \operatorname{sen} \varepsilon \left( \frac{n}{4n-1} \right)$$

$$F_{R(1)} = \frac{I_1 \alpha_1}{R} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 \left( \frac{2n-1}{n} \right) * \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{R \left( \frac{4n-1}{n} \right)}}{R} = Mg \operatorname{sen} \varepsilon \left( \frac{2n-1}{4n-1} \right)$$

La fuerza de rozamiento, para mantener la rodadura, aumenta a medida que aumenta  $\varepsilon$ , esto es, a medida que aumenta la inclinación del plano. Este aumento tiene un límite determinado por el valor del coeficiente de rozamiento entre el cilindro y el plano, como **máximo** la fuerza de rozamiento es  $\mu Mg \cos \varepsilon$ , en consecuencia

$$F_{R(1)} = \mu Mg \cos \varepsilon = Mg \operatorname{sen} \varepsilon \left( \frac{2n-1}{4n-1} \right) \Rightarrow \mu = \operatorname{tg} \varepsilon \frac{2n-1}{4n-1} \Rightarrow \operatorname{tg} \varepsilon = \mu \frac{4n-1}{2n-1}$$

La ecuación anterior nos da el valor máximo del ángulo de inclinación para el que puede haber rodadura pura para el cilindro (I). Si aumenta el ángulo por encima de ese valor entonces se produce rodadura y deslizamiento.

(II)

$$\alpha_2 = \frac{Mg \operatorname{sen} \varepsilon}{MR + \frac{1}{2}MR^2} = \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{3R}; \quad a_{CM(2)} = \alpha R = \frac{2}{3}g \operatorname{sen} \varepsilon;$$

$$F_{R(2)} = \frac{I_2 \alpha}{R} = \frac{\frac{1}{2}MR^2 * \frac{2}{3R}g \operatorname{sen} \varepsilon}{R} = \frac{Mg \operatorname{sen} \varepsilon}{3}$$

La fuerza de rozamiento, para mantener la rodadura, aumenta a medida que aumenta  $\varepsilon$ , esto es, a medida que aumenta la inclinación del plano. Este aumento tiene un límite determinado por el valor del coeficiente de rozamiento entre el cilindro y el plano, como **máximo** la fuerza de rozamiento es  $\mu Mg \cos \varepsilon$ , en consecuencia cilindro y el plano, como máximo la fuerza de rozamiento es  $\mu Mg \cos \varepsilon$ , en consecuencia

$$\mu Mg \cos \varepsilon = \frac{Mg \operatorname{sen} \varepsilon}{3} \Rightarrow \mu = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} \varepsilon = 3\mu$$

(III)

$$\alpha_3 = \frac{Mg \operatorname{sen} \varepsilon}{MR + \frac{\frac{1}{2}MR^2 \left[ 1 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right]}{R}}, \quad a_{\text{CM}(3)} = \alpha_3 R = \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{2 + 1 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^2} = \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{3 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2}$$

$$F_{R(3)} = \mu Mg \cos \varepsilon = \frac{\frac{1}{2}MR^2 \left[ 1 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right] * \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{\left( 3 - \left( \frac{n-1}{n} \right)^2 \right) R}}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \cos \varepsilon = \frac{\operatorname{sen} \varepsilon \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right]}{3 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2} \Rightarrow \operatorname{tag} \varepsilon = \mu \frac{3 - 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}}{1 - 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}} \Rightarrow \operatorname{tag} \varepsilon = \mu \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1}$$

Para el cilindro (I) el máximo valor del ángulo que permite la rodadura pura es  $\operatorname{tag} \varepsilon_1 = \mu \frac{4n-1}{2n-1}$  y para el cilindro (II)  $\operatorname{tag} \varepsilon_2 = 3\mu$ . Comparamos ambos ángulos, teniendo en cuenta que  $n > 1$ .

$$\frac{\operatorname{tag} \varepsilon_1}{\operatorname{tag} \varepsilon_2} = \frac{4n-1}{6n-3} < 1 \Rightarrow 4n-1 < 6n-3 \Rightarrow 4n+2 < 6n \Rightarrow 2 < 2n$$

Se deduce que  $\operatorname{tag} \varepsilon_1 < \operatorname{tag} \varepsilon_2$ , por tanto si rueda el primer cilindro lo hará también el segundo. Dado que el segundo tiene menos momento de inercia que el primero; el tercero que es el que tiene menor momento de inercia de los tres, también rodará.

En definitiva si la tangente del ángulo del plano inclinado es igual o menor que  $\mu \frac{4n-1}{2n-1}$  los tres cilindros rodarán sin deslizar.

Si comparamos las aceleraciones lineales tenemos:

$$a_1 = \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{\frac{4n-1}{n}} = \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{4 - \frac{1}{n}} = \frac{2g \operatorname{sen} \varepsilon}{3 + \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}$$

$$a_2 = \frac{2g \operatorname{sene} \varepsilon}{3} \quad ; \quad a_3 = \frac{2g \operatorname{sene} \varepsilon}{3 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

$$a_1 < a_2 < a_3$$

Cuando los tres cilindros ruedan con deslizamiento, la fuerza de rozamiento  $F_R$  ha alcanzado su valor máximo  $F_R = \mu Mg \cos \varepsilon$  y es igual para todos ellos

$$F_R * R = I a \quad \Rightarrow \quad \mu Mg \cos \alpha = I_1 a_1 = I_2 a_2 = I_3 a_3 \quad \Rightarrow \quad a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{I_1} : \frac{1}{I_2} : \frac{1}{I_3} \quad (1)$$

La relación entre los momentos de inercia ya se ha calculado anteriormente

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{2n-1}{n} \Rightarrow I_2 = \frac{I_1}{\left(2 - \frac{1}{n}\right)} \quad ; \quad \frac{I_2}{I_3} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n^2}{2n+1} \quad ; \quad \frac{I_1}{I_3} = n$$

Llevando estas ecuaciones a (1)

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{1}{I_1} : \frac{1}{\frac{I_1}{2 - \frac{1}{n}}} : \frac{1}{\frac{I_1}{n}} = 1 : \left(2 - \frac{1}{n}\right) : n$$

Hemos visto que  $I_1 > I_2 > I_3$  y  $I_1 \alpha_1 = I_2 \alpha_2 = I_3 \alpha_3$ , se deduce que:

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$$

Cuando el tercer cilindro deslice, la aceleración del centro de masas es

$$Mg \operatorname{sene} \varepsilon - \mu Mg \operatorname{cose} \varepsilon = Ma \quad \Rightarrow \quad a = g(\operatorname{sene} \varepsilon - \mu \operatorname{cose} \varepsilon)$$

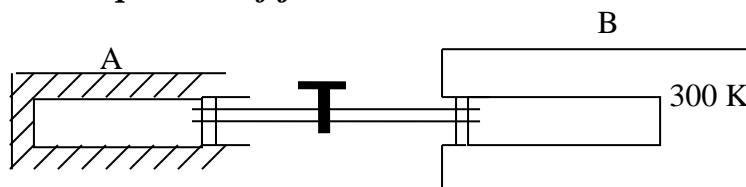
Si ahora consideramos al líquido de la cavidad, éste llevará la anterior aceleración y sobre él actúan una fuerza paralela al plano y otra perpendicular al mismo

$$F_x = mg(\operatorname{sen} \varepsilon - \mu \operatorname{cose} \varepsilon) \quad ; \quad F_y = mg \operatorname{cose} \varepsilon = 0$$

La fuerza resultante

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mg \sqrt{\operatorname{sen}^2 \varepsilon + \mu^2 \operatorname{cose}^2 \varepsilon - 2\mu \operatorname{sene} \varepsilon \operatorname{cose} \varepsilon + \operatorname{cose}^2 \varepsilon} = \\ &= mg \sqrt{\operatorname{cose}^2 \varepsilon (1 + \mu^2) - 2\mu \operatorname{sene} \varepsilon \operatorname{cose} \varepsilon + \operatorname{sen}^2 \varepsilon} \end{aligned}$$

2.-Los dos cilindros A y B de la figura inferior tienen el mismo diámetro y los dos pistones, ambos de masa despreciable, están conectados entre sí mediante una barra rígida cada uno. Los pistones pueden desplazarse libremente. La barra de unión es un tubo con una válvula, la cual inicialmente está cerrada. El cilindro A y su pistón están adiabáticamente aislados; el B está en permanente contacto con un termostato que mantiene una temperatura fija de  $27^{\circ}\text{C}$



Inicialmente el pistón del cilindro A está fijo y dentro del cilindro hay  $m = 32\text{ kg}$  de argón a una presión mayor que la atmosférica. En el interior del cilindro B hay una masa de oxígeno que se encuentra a la presión atmosférica.

Cuando se libera el pistón del cilindro A, se mueve lentamente (de forma cuasi estática) y en el equilibrio el volumen del gas se hace ocho veces mayor, en el cilindro B la densidad del oxígeno se duplica. Se sabe que el termostato recibe una cantidad de calor  $Q = 747,9 \cdot 10^4\text{ J}$ .

a) Establecer de acuerdo con la teoría cinética de los gases y considerando las colisiones elásticas de las moléculas con el pistón que la ecuación térmica del proceso en el cilindro está dado por  $TV^{\frac{2}{3}} = \text{constante}$

b) Calcular los parámetros  $p, V$  y  $T$  del argón en los estados inicial y final

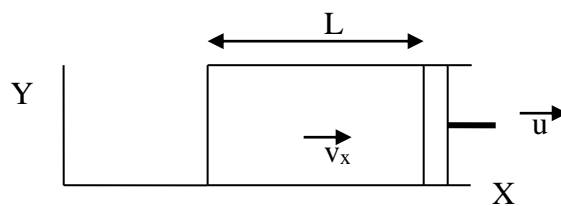
c) Si se abre la válvula que separa los dos cilindros, calcular la presión final de la mezcla de gases

Dato masa molar del argón  $40\text{ kg/kmol}$

6<sup>a</sup> Olimpiada Internacional de Física. Rumanía 1972.

a) Cuando una molécula cuya velocidad es  $v_x$  choca contra una pared fija situada en el plano YZ, la molécula rebota con una velocidad  $-v_x$ . Si la pared en lugar de ser fija es móvil, entonces la componente sobre el eje X de la velocidad relativa tiene el mismo valor antes que después del choque.

En la figura inferior un cilindro tiene un pistón que se puede desplazar de izquierda a derecha. La longitud del cilindro es  $L$  y el área del pistón  $A$ .



Supongamos que la velocidad del émbolo respecto del cilindro (sistema XY) es 5 m/s y que la velocidad de una molécula respecto del mismo sistema es 20 m/s. La velocidad relativa es  $20 - 5 = 15$  m/s. Después del rebote la velocidad relativa es también 15 m/s dirigida de derecha a izquierda, pero como el émbolo se desplaza de derecha a izquierda con 5 m/s la velocidad respecto del sistema XY es 10 m/s. En general si la velocidad es  $v_x$  y la del émbolo  $u$ , la velocidad del rebote es  $v_x - 2u$ . La pérdida de energía cinética para una molécula es:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m(v_x - 2u)^2 - \frac{1}{2} m v_x^2 = 2mu^2 - 2mv_x u = 2mu v_x \left( \frac{u}{v_x} - 1 \right) \approx -2mu v_x$$

Se admite que la velocidad del émbolo  $u \ll v_x$

Esta pérdida de energía cinética se redistribuye entre todas las moléculas  $N$  del cilindro dando por tanto una pérdida de energía cinética en todo el gas de

$$\frac{2mu v_x}{N}$$

Como consecuencia de esa pérdida de energía cinética promedio de las moléculas se tiene que producir una disminución de la temperatura del gas  $\Delta T$ .

Si utilizamos la relación entre energía microscópica por grado de libertad y temperatura macroscópica, podemos escribir

$$\frac{3}{2} k \Delta T = \frac{2mu v_x}{N} \quad (1)$$

Si una molécula que lleva la velocidad  $v_x$  abandona el pistón hacia la izquierda volverá a chocar con él cuando transcurra un tiempo  $2L/v_x$ , ya que la molécula debe ir y volver y por tanto recorrer dos veces la longitud del cilindro. Como en el recipiente existen  $N$  moléculas el tiempo promedio de choque es

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x N} \Rightarrow v_x = \frac{2L}{N \Delta t}$$

En este intervalo de tiempo el pistón se ha desplazado hacia la derecha una longitud  $\Delta L = u \Delta t$ . Sustituyendo valores en (1)



$$\frac{3}{2}k\Delta T = \frac{2m\Delta Lv_x}{N\Delta t} = \frac{2m\Delta Lv_x}{N \frac{2L}{v_x N}} = mv_x^2 \frac{\Delta L}{L}$$

Por otra parte se cumple que

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

Dado que existe un gran número de moléculas, en promedio las tres componentes deben ser iguales:  $v^2 = v_x^2 = v_y^2 = v_z^2 = 3v_x^2 \Rightarrow v_x^2 = \frac{v^2}{3}$

$$\frac{3}{2}k\Delta T = mv_x^2 \frac{\Delta L}{L} = \frac{mv^2}{3} * \frac{\Delta L}{AL} = \frac{2}{3} \frac{mv^2}{2} * \frac{\Delta V}{V} = \frac{2}{3} * \frac{3}{2} kT * \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{2}{3} \frac{\Delta V}{V}$$

Escrita la ecuación anterior en forma diferencial e integrando, además tenemos en cuenta que  $\Delta V$  es positivo mientras que  $\Delta T$  es negativo (cuando  $V$  aumenta,  $T$  disminuye)

$$-\int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = \frac{2}{3} \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln \frac{T_i}{T_f} = \frac{2}{3} \ln \frac{V_f}{V_i} \Rightarrow \frac{T_i}{T_f} = \left( \frac{V_f}{V_i} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow TV^{\frac{2}{3}} = \text{constante}$$

b) Para la expansión adiabática que realiza el gas argón se cumple que  $(\Delta U = W)_A$  y para la compresión isoterma que sufre el gas oxígeno,  $(Q = W)_O$ , luego, el calor que recibe el oxígeno es igual a la energía interna que pierde el argón  $Q_O = \Delta U_A$

$$(\Delta U)_A = Q = nC_V \Delta T_A \Rightarrow \Delta T_A = \frac{Q_O}{n * \frac{3}{2} R} = \frac{747,9 \cdot 10^4}{\frac{32000}{40} * \frac{3}{2} * 8,31} = 750 \text{ K} = T_i - T_f$$

Como ya hemos encontrado la relación  $TV^{\frac{2}{3}} = \text{Cte}$ , la aplicamos y obtenemos las temperaturas inicial y final del argón

$$\frac{T_i}{T_f} = \left( \frac{V_f}{V_i} \right)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = 4 \Rightarrow T_i = 4T_f \Rightarrow T_i = 4(T_i - 750) \Rightarrow T_i = 1000 \text{ K} \Rightarrow T_f = 250 \text{ K}$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos para el oxígeno al principio y al final de la transformación isotérmica

$$P_i = \frac{\rho_i}{M} RT, P_f = \frac{\rho_f}{M} RT \Rightarrow \frac{P_i}{P_f} = \frac{\rho_i}{\rho_f} \Rightarrow P_f = 2P_i = 2,00 \text{ atm} = 2,02 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

En el estado final la presión del argón es igual a la presión del oxígeno

$$2,02 \cdot 10^5 V_f(A) = \frac{32000}{40} * 8,31 * 250 \Rightarrow V_f(A) = 8,2 \text{ m}^3 ; V_i(A) = \frac{8,20}{8} = 1,02 \text{ m}^3$$

Aplicando la ecuación de los gases perfectos al argón, obtenemos su presión inicial

$$\frac{P_f(A) * V_f}{T_f} = \frac{P_i(A) * V_i}{T_i} \Rightarrow \frac{2 \text{atm} * 8,2 \text{m}^3}{250 \text{K}} = \frac{P_i(A) * 1,02 \text{m}^3}{1000 \text{K}} \Rightarrow P_i(A) = 64,3 \text{ atm}$$

c) Al abrir la llave de paso los dos gases se mezclan hasta alcanzar la misma presión, siendo la temperatura final 300 K.

$V_i(A) = 1,02 \text{ m}^3$  es el volumen inicial de argón y  $V_i(O)$  es el volumen inicial de oxígeno

Cuando el argón se expande su volumen es  $V_2(A) = 8,2 \text{ m}^3$  y el del oxígeno es  $V_i(O)/2$  ya que su presión se ha hecho el doble sin variar su temperatura

Se cumple que la suma de los volúmenes antes y después es el mismo

$$1,02 + V_i(O) = 8,2 + \frac{V_i(O)}{2} \Rightarrow V_i(O) = 14,4 \text{ m}^3$$

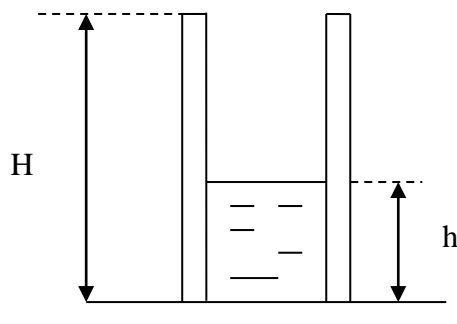
Cuando se abre la llave de paso y se mezclan los gases, las presiones parciales que cada gas ejerce en la mezcla son:

$$p_A * \left(8,2 + \frac{14,4}{2}\right) 10^3 = 800 * 0,082 * 300 \Rightarrow p_A = 1,28 \text{ atm}$$

$$p_O * \left(8,2 + \frac{14,4}{2}\right) 10^3 = n_O RT = 1 * 14,4 \Rightarrow p_O = \frac{14,4}{8,2 + \frac{14,4}{2}} = 0,94 \text{ atm}$$

La presión total de la mezcla  $P = 1,28 + 0,94 = 2,2 \text{ atm}$

3.-Un condensador plano con armaduras rectangulares está fijo en una posición vertical, estando su parte inferior en contacto con un líquido dieléctrico



Calcular la altura  $h$  del líquido entre las armaduras. Se supone que la distancia entre las armaduras es mucho menor que su superficie.

Se conoce. La intensidad del campo eléctrico cuando el condensador está cargado,  $E$ , la densidad  $\rho$  y la permitividad,  $\epsilon$ , del dieléctrico y la altura,  $H$ , de las armaduras.

Designamos con  $L$  el ancho de cada armadura y  $d$  la distancia entre ellas. La capacidad de un condensador plano sin dieléctrico es:

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d} = \epsilon_0 \frac{HL}{d}$$

La capacidad del condensador de la figura superior es la suma de dos condensadores en paralelo uno de altura  $H-h$  que no tiene dieléctrico y otro de altura  $h$  que contiene dieléctrico

$$C_s = \epsilon_0 \frac{(H-h)L}{d} + \epsilon_0 \epsilon \frac{hL}{d} = \frac{\epsilon_0 L}{d} [H + h(\epsilon - 1)]$$

La energía de los condensadores

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\frac{\epsilon_0 HL}{d}} \quad ; \quad U_s = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\frac{\epsilon_0 L}{d} [H + h(\epsilon - 1)]} \Rightarrow U_s < U$$

La relación entre la diferencia de potencial entre las armaduras y el campo en el interior del condensador

$$V = Ed = \frac{Q}{C} \Rightarrow Q = EdC \Rightarrow U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} E^2 d^2 C$$

$$U_s = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_s} = \frac{1}{2} \frac{E^2 d^2 C^2}{C_s}$$

Hemos visto que  $U > U_s$ , la diferencia de energía se debe a la energía potencial que ha ganado el dieléctrico

$$\begin{aligned}
 U - U_s &= \frac{1}{2} E^2 d^2 C \left( 1 - \frac{C}{C_s} \right) = \frac{1}{2} E^2 d^2 \frac{\epsilon_0 HL}{d} \left[ 1 - \frac{\epsilon_0 \frac{HL}{d}}{\frac{\epsilon_0 L}{d} [H + h(\epsilon - 1)]} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} E^2 d^2 \frac{\epsilon_0 HL}{d} \left[ 1 - \frac{H}{H + h(\epsilon - 1)} \right] = \frac{1}{2} E^2 d^2 \frac{\epsilon_0 HL}{d} \left[ \frac{h(\epsilon - 1)}{H + h(\epsilon - 1)} \right]
 \end{aligned}$$

Como la masa del líquido es:  $m = \rho V = \rho Lhd$  y el centro de masas del líquido está a la altura  $h/2$

$$\begin{aligned}
 \rho Lhdg \cdot \frac{h}{2} &= \frac{1}{2} E^2 d^2 \frac{\epsilon_0 HL}{d} \left[ \frac{h(\epsilon - 1)}{H + h(\epsilon - 1)} \right] \Rightarrow \rho gh = E^2 \frac{\epsilon_0 H(\epsilon - 1)}{H + h(\epsilon - 1)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow h &= \frac{E^2 \epsilon_0 (\epsilon - 1)}{\rho g} \frac{H}{H + h(\epsilon - 1)}
 \end{aligned}$$

Hacemos la aproximación de que  $H \gg h(\epsilon - 1)$

$$E^2 \epsilon_0 h(\epsilon - 1) = h^2 \rho g \Rightarrow h = \frac{E^2 \epsilon_0 (\epsilon - 1)}{\rho g}$$

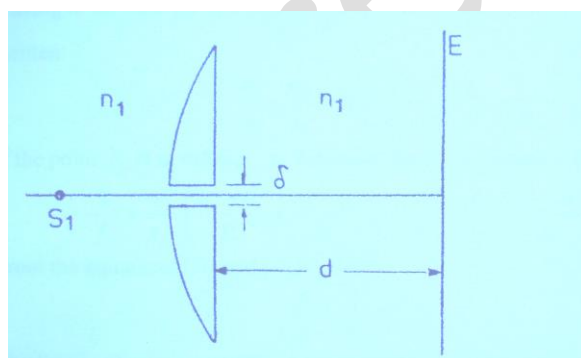
4.- Una lente delgada plano-convexa con diámetro  $2r$ , el radio de curvatura  $R$  e índice de refracción  $n_o$ , está colocada de manera que a su izquierda el medio es aire ( $n_1=1$ ) y al lado derecho un medio transparente de índice  $n_2 \neq 1$ . La cara convexa de la lente está en contacto con el aire y la plana con el otro medio. En el aire y a una distancia  $s_1$  de la lente y sobre el eje óptico existe una fuente puntual de luz monocromática

a) Demostrar utilizando la aproximación de Gauss que entre la posición de la imagen, dada por la distancia  $s_2$  desde la lente, y la posición de la fuente de luz  $s_1$  existe la relación

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1$$

en la que  $f_1$  y  $f_2$  son respectivamente las distancias focales de la lente en el aire y en el medio de índice de refracción  $n_2$ .

b) Ahora la lente se corta en dos mitades iguales y ambas partes se separan entre sí una distancia  $\delta$  (ver figura inferior, lente de Billet).



En la figura  $S_1$  es una fuente puntual de luz que se encuentra a una distancia  $s_1$ , ( $s_1 > f_1$ ). A la derecha de la lente y a una distancia  $H$  se encuentra una pantalla  $E$  paralela a la cara plana de la lente. A ambos lados, izquierdo y derecho de la lente, el índice de refracción del medio es el mismo  $n_1$ . Sobre la pantalla aparecen  $N$  franjas de interferencia. Calcular  $N$  en función de la longitud de onda.

6ª Olimpiada Internacional de Física. Rumanía 1972.

Sean  $n_1$  el índice de refracción del medio a la izquierda,  $n_o$  el de la lente y  $n_2$  el índice de la derecha.  $R_1$  el radio de la cara de la lente izquierda y  $R_2$  el de la derecha.

Para la primera cara de la lente se cumple

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_o}{d} = \frac{n_o - n_1}{R_1}$$

$d$  es la distancia imagen a la superficie de la primera cara. Esta imagen en  $d$  es objeto para la segunda cara y teniendo en cuenta que el espesor de la lente es nulo

$$-\frac{n_o}{d} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2 - n_o}{R_2}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_o - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_o}{R_2} \quad (1)$$

Si  $s_1$  está en el infinito

$$\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_o - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_o}{R_2} \quad (2)$$

Si  $s_2$  se forma en el infinito

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_o - n_1}{R_1} + \frac{n_2 - n_o}{R_2} \quad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se deduce

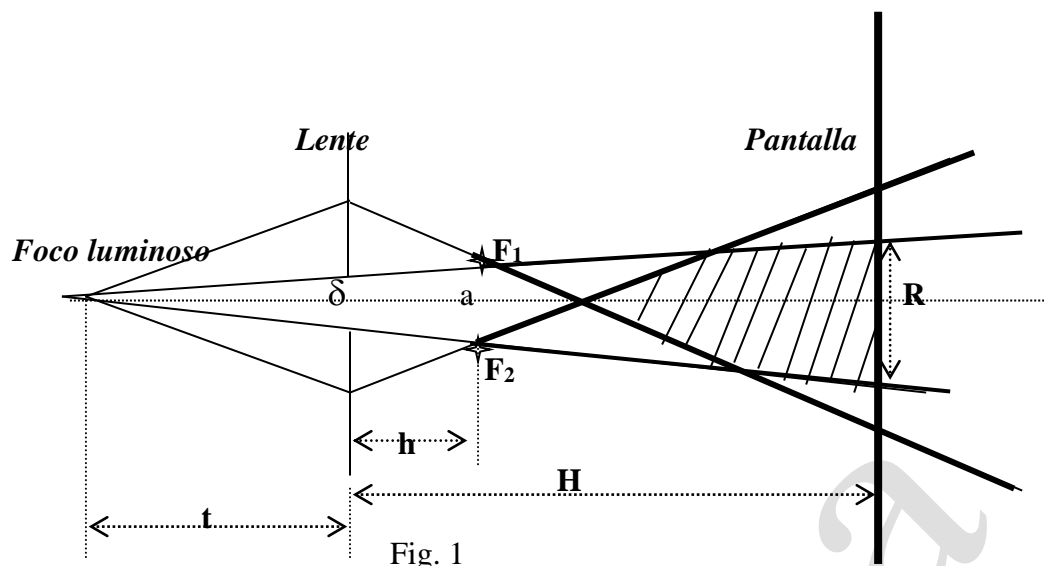
$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_2}{f_2} \quad \text{y} \quad \frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_1}{f_1}$$

y de estas dos últimas ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{n_1}{n_2} &= s_1 \left( \frac{1}{f_2} - \frac{1}{s_2} \right) = \frac{1}{s_2 \left( \frac{1}{f_1} - \frac{1}{s_1} \right)} \Rightarrow \frac{s_1 s_2}{f_1 f_2} - \frac{s_1 s_2}{f_2 s_1} - \frac{s_1 s_2}{f_1 s_2} + \frac{s_1 s_2}{s_1 s_2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_2 s_1} + \frac{1}{f_1 s_2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1 \end{aligned}$$

Cuando se quieren producir interferencias se necesitan dos focos de luz coherente. Para lograrlo se han ideado diferentes dispositivos como son el biprisma de Fresnel o los espejos de Fresnel. En este problema se refieren a un dispositivo menos conocido que se conoce con el nombre de *bilente de Billet*.

Al colocar un objeto ante una lente convergente a una distancia mayor que la focal se obtiene una imagen real de dicho objeto. Si las dos lentes se separan una cierta distancia la imagen de un objeto puntual ahora es doble, por tanto se obtienen dos imágenes reales que son de luz coherente y que donde interfieran los haces luminosos procedentes de dichos focos coherentes se formarán franjas de interferencia. La fig 1 indica esta situación:



$\delta$  representa el tamaño de la abertura entre las dos lentes

$a$  representa la distancia entre  $F_1$  y  $F_2$ , los dos focos coherentes que forma la lente

$t$  es la distancia del foco luminoso monocromático a la lente

$h$  la distancia de los focos  $F_1$  y  $F_2$  a la lente

$H$  la distancia de la lente a la pantalla

$R$  es el tamaño que tiene la zona de interferencia en la pantalla

Calculamos en primer lugar el valor de  $h$ , para ello aplicamos la fórmula de las lentes convergentes. No empleamos las normas DIN ya que complican los cálculos posteriores, por ello todas las distancias son positivas

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{h} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{f t}{t - f} \quad (1)$$

Vamos a calcular el valor de  $a$  en función de  $\delta$ . En la figura se han formado dos triángulos semejantes, estableciendo la proporción entre las bases y las alturas resulta:

$$\frac{\delta}{a} = \frac{t}{h + t} = \frac{t}{\frac{f t}{t - f} + t} \quad \Rightarrow \quad a = \delta \frac{t}{t - f} \quad (2)$$

veamos cuál es la condición para que se formen franjas de interferencia En la figura 2 se ha representado los focos  $F_1$  y  $F_2$  de la figura 1

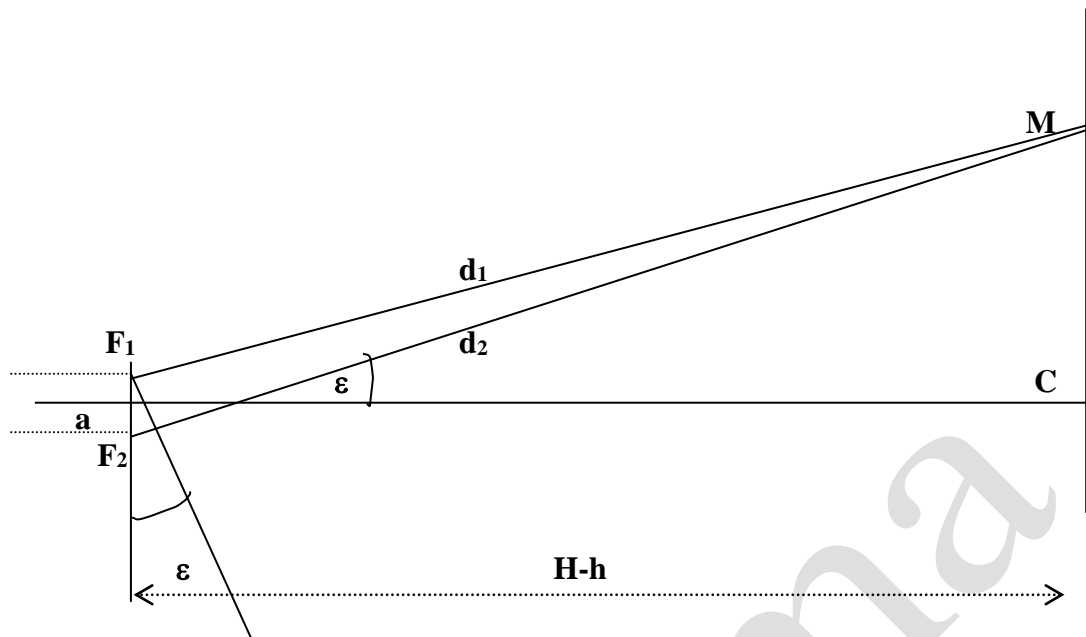


Fig.2

$d_1$  representa la distancia del foco  $F_1$  a un punto de la pantalla y  $d_2$  la distancia del foco 2 a ese mismo punto. La diferencia de distancias que tiene que recorrer la luz para llegar a un punto cualquiera de la pantalla es  $d_2 - d_1$ . Se formará una interferencia constructiva si esa diferencia es un múltiplo entero de la longitud de onda

$$d_2 - d_1 = n\lambda \quad (3)$$

Si consideramos el punto C de la pantalla se cumple que  $d_1 = d_2$  y la ecuación (3) se cumple para  $n = 0$ . En el centro de la pantalla C se produce un máximo de luz

Si el punto M es el siguiente máximo de luz, el valor de  $n$  es uno y por tanto  $d_2 - d_1 = \lambda$ . De la figura 2 se deduce que

$$d_2 - d_1 = a \sin \epsilon, \quad \sin \epsilon = \frac{CM}{H-h} \Rightarrow d_2 - d_1 = a \frac{CM}{H-h}$$

CM es la distancia entre dos máximos consecutivos

$CM = \frac{\lambda(H-h)}{a}$  sustituyendo las expresiones (1) y (2) resulta :

$$CM = \frac{\lambda \left( H - \frac{f}{t} \right)}{\delta \left( \frac{t}{t-f} \right)} \Rightarrow CM = \frac{\lambda [H(t-f) - f t]}{\delta t}$$



Si volvemos a la figura 1 se observa que comparando triángulos una de cuyas bases es R podemos escribir.

$$\frac{R}{\delta} = \frac{H+t}{t} \quad \Rightarrow \quad R = \delta \frac{H+t}{t}$$

El número de franjas de interferencia se obtiene dividiendo D entre la separación entre franjas CM

$$N = \frac{R}{CM} = \frac{\delta \frac{H+t}{t}}{\frac{\lambda [H(t-f) - ft]}{\delta t}} = \frac{\delta^2}{\lambda} \frac{(H+t)}{H(t-f) - ft}$$