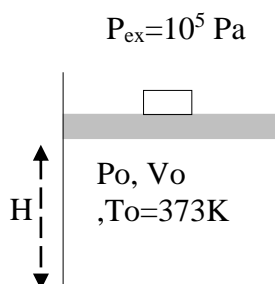


11.- El recipiente de la figura inferior posee un émbolo sobre el que está situada una masa, el conjunto pesa 500 N. La sección del émbolo es $S=0,1 \text{ m}^2$ y la presión exterior $P_{\text{ex}}=10^5 \text{ Pa}$. Un mol de gas perfecto se encuentra a una temperatura $T_o=373\text{K}$. Si el gas se enfría a 273 K , determinar cuánto descende el émbolo hasta alcanzar de nuevo el equilibrio.



En la situación inicial (representada en la figura), actúan las fuerzas siguientes:

En dirección vertical y sentido hacia abajo: El peso 500 N y la fuerza debida a la presión atmosférica $P_{\text{ex}} S$

En dirección vertical y sentido hacia arriba: La fuerza debida a la presión del gas $P_G S$.

$$\text{Al existir equilibrio: } 500 + P_{\text{ex}} S = P_G S \Rightarrow P_G = \frac{500}{S} + P_{\text{ex}}$$

Por tratarse un gas ideal

$$P_G \cdot HS = RT_o \Rightarrow \left(\frac{500}{S} + P_{\text{ex}} \right) HS = RT_o \Rightarrow H = \frac{RT_o}{500 + P_{\text{ex}} S}$$

Cuando el gas se enfría a una temperatura $T_f = 273 \text{ K}$, la altura del émbolo es h y de acuerdo con la deducción anterior:

$$h = \frac{RT_f}{500 + P_{\text{ex}} S}$$

La diferencia de alturas, es lo que descende el émbolo

$$H - h = \Delta h = \frac{R}{500 + P_{\text{ex}} S} (T_f - T_o) = \frac{8,31 \cdot 100}{500 + 10^5 \cdot 0,1} = 0,079 \text{ m} = 7,9 \text{ cm}$$

12.- a) Deducir la ecuación de la variación de presión en una columna de aire en reposo.

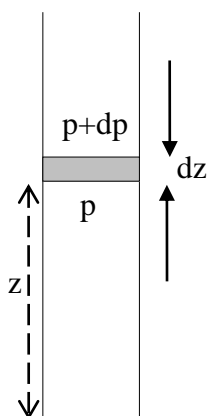


Fig.1

La figura 1 representa una columna de aire en reposo.

Sobre ella hemos considerado una franja de aire de espesor dz y sección S .

Dicha franja se encuentra a una altura z respecto del nivel inferior. Esa franja tiene un peso que es:

$$P = V\rho g = \rho g S dz,$$

y es una fuerza vertical dirigida hacia abajo.

Por debajo de ella existe una presión p que ocasiona una fuerza vertical hacia arriba de valor pS .

Por encima la presión es $p+dp$ y da origen a una fuerza vertical y hacia abajo $(p+dp)S$

Teniendo en cuenta que la franja está en equilibrio la suma de las fuerzas es nula

$$-\rho g S dz - (p + dp)S + pS = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g \quad (1)$$

b) Si la columna de aire es la atmósfera terrestre y la temperatura depende de la altura según la relación $T = T_0 - \lambda z$, en la que T es la temperatura a una altura z respecto del suelo, T_0 la temperatura en el suelo, λ es una constante. Admitiendo que el aire se comporta como un gas perfecto diatómico de masa molar M , comprobar que la temperatura y la presión están relacionadas por la ecuación

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^q$$

Expresando q en función de M , g , λ y R . ¿Cuál es la dimensión física de q ? Calcular su valor numérico si $\lambda = 6,50 \cdot 10^{-3} \text{ K m}^{-1}$.

Dado $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ y $T_0 = 288 \text{ K}$. Expresar numéricamente la presión p en función de la temperatura T .

Aplicamos la ley de los gases perfectos en el aire que está a nivel z .

$$p = \frac{\rho}{M} R T \Rightarrow \rho = \frac{pM}{R T} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{R(T_0 - \lambda z)}$$

Llevamos esta última ecuación a (1)

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pMg}{R(T_0 - \lambda z)} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \int \frac{dz}{T_0 - \lambda z}$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$T_0 - \lambda z = a \Rightarrow -\lambda dz = da \Rightarrow$$

$$-\int \frac{da}{a} = \frac{1}{\lambda} \ln a = \frac{1}{\lambda} \ln (T_0 - \lambda z)$$

Finalmente:

$$\ln p = \frac{Mg}{R\lambda} \ln(T_0 - \lambda z) + Cte$$

Para determinar la Cte tenemos en cuenta que cuando $z=0$, $p=p_0$.

$$\ln p_0 = \frac{Mg}{R\lambda} \ln T_0 + Cte \Rightarrow Cte = \ln p_0 - \frac{Mg}{R\lambda} \ln T_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln p = \frac{Mg}{R\lambda} \ln(T_0 - \lambda z) + \ln p_0 - \frac{Mg}{R\lambda} \ln T_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = \frac{Mg}{R\lambda} \ln \frac{(T_0 - \lambda z)}{T_0} = \frac{Mg}{R\lambda} \ln \frac{T}{T_0} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{Mg}{R\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R\lambda}{Mg}} \quad (2)$$

Dimensión física de q

$$q = \frac{\frac{J}{\text{mol K}} \cdot \frac{K}{m}}{\frac{\text{kg}}{\text{mol}} \cdot \frac{N}{\text{kg}}} = \frac{J}{\text{Nm}} = \frac{\text{Nm}}{\text{Nm}}$$

q es un número adimensional

$$q = \frac{R\lambda}{Mg} = \frac{8,31 \cdot 6,50 \cdot 10^{-3}}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 0,19$$

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{q}} = 1,01 \cdot 10^5 \left(\frac{T}{288} \right)^{5,26}$$

c) En el seno de la atmósfera se pueden formar a una cierta altura una burbuja de aire que tiene una temperatura diferente del aire que la rodea pero la misma presión.

Designamos con p_B , T_B y ρ_B la presión, temperatura y densidad del aire atrapado en la burbuja y por T_A y ρ_A los valores correspondientes al aire

circundante. Mostrar que si T_B es mayor que T_A la burbuja ascenderá en el seno de la atmosfera.

La burbuja ascenderá si el empuje del aire exterior es mayor que el peso del aire atrapado en la burbuja.

$$\begin{aligned} V \rho_A g > V \rho_B g &\Rightarrow \rho_A > \rho_B \Rightarrow \rho_A = \frac{p_A M}{R T_A}; \rho_B = \frac{p_B M}{R T_B} \Rightarrow \frac{p_A M}{R T_A} > \frac{p_B M}{R T_B} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{T_A} > \frac{1}{T_B} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} > 1 \Rightarrow T_B > T_A \end{aligned}$$

d) Si el gas atrapado en la burbuja sufre una transformación adiabática y designamos con T_1 su temperatura cuando la burbuja se ha formado a una altura z_1 y p_1 la presión a esa altitud. Encontrar la relación entre la presión p_B y la temperatura T_B de la burbuja durante la ascensión con respecto a los valores iniciales de su formación. Expresar T_B en función de p_B .

Ecuación de la adiabática en función de la presión y temperatura:

$$\begin{aligned} p_1 V_1^\gamma &= p_B V_B^\gamma \Rightarrow \frac{p_1}{p_B} = \left(\frac{V_B}{V_1} \right)^\gamma ; \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_B V_B}{T_B} \Rightarrow \frac{p_1 T_B}{p_B T_1} = \frac{V_B}{V_1} \Rightarrow \frac{p_1}{p_B} = \left(\frac{p_1 T_B}{p_B T_1} \right)^\gamma \\ &\Rightarrow \frac{p_1 p_B^\gamma}{p_B p_1^\gamma} = \left(\frac{T_B}{T_1} \right)^\gamma \Rightarrow \left(\frac{p_1}{p_B} \right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T_B}{T_1} \right)^\gamma \Rightarrow T_B = T_1 \left(\frac{p_1}{p_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (3) \end{aligned}$$

e) La ascensión de la burbuja en el seno de la atmósfera tiene un límite z_2 , esto es, a partir de ese valor ya no asciende más, entonces su presión es p_2 y su temperatura T_2 . Calcular los valores numéricos de p_2 y T_2 si $T_1=280$ K y $z_1=2000$ m. Calcular también el valor numérico de z_2 .

Aplicamos la ecuación (2) al aire exterior a la burbuja cuando ésta se ha formado, esto es, cuando $z_1=2000$ metros.

$$\begin{aligned} T_{z_1} &= 288 \left(\frac{p_1}{1,01 \cdot 10^5} \right)^{0,19} = 288 - 6,50 \cdot 10^3 \cdot 2000 = 275 \Rightarrow p_1^{0,19} = \frac{275}{288} \cdot \left(1,01 \cdot 10^5 \right)^{0,19} \Rightarrow \\ p_1^{0,19} &= 8,527 \Rightarrow 0,19 \ln p_1 = 2,1432 \Rightarrow \ln p_1 = 11,28 \Rightarrow p_1 = 7,92 \cdot 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Aplicamos la ecuación (3) al aire atrapado en la burbuja cuando ha alcanzado su altura máxima

$$T_B = T_1 \left(\frac{p_1}{p_B} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = 280 \left(\frac{7,92 \cdot 10^4}{p_2} \right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} = 280 \left(\frac{7,92 \cdot 10^4}{p_2} \right)^{-0,286} \quad (4)$$

Aplicamos la ecuación (2) al aire exterior a la burbuja cuando ésta ha alcanzado su altura máxima. En ese lugar la temperatura del aire interior y del aire exterior es la misma.

$$T_2 = 288 \left(\frac{p_2}{1,01 \cdot 10^5} \right)^{0,19} = 32,25 \cdot p_2^{0,19} \quad (5)$$

Igualando (4) y (5)

$$280 \left(\frac{7,92 \cdot 10^4}{p_2} \right)^{-0,286} = 32,25 \cdot p_2^{0,19} \Rightarrow \frac{11,12}{32,25} = p_2^{0,19} \cdot p_2^{-0,286} \Rightarrow 0,345 = p_2^{-0,096} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln 0,345 = -0,096 \ln p_2 \Rightarrow \ln p_2 = \frac{-1,064}{-0,096} = 11,08 \Rightarrow p_2 = 6,49 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

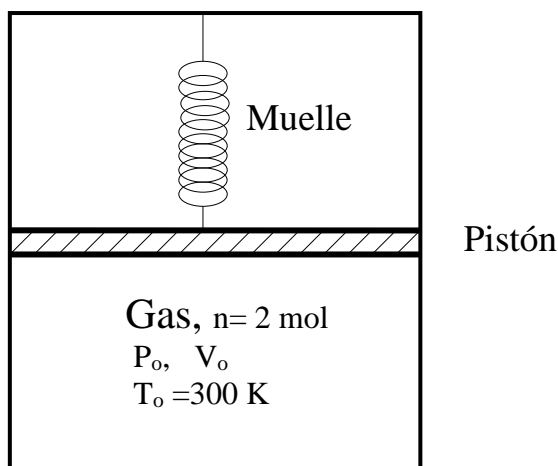
Sustituimos p_2 en (5) para hallar T_2 .

$$T_2 = 32,25 \cdot (6,49 \cdot 10^4)^{0,19} = 265 \text{ K}$$

Para hallar la altura máxima que alcanza la burbuja:

$$265 = 288 - 6,5 \cdot 10^{-3} z_m \Rightarrow z_m = 3,54 \cdot 10^3 \text{ m}$$

13.-El gas de la figura se comporta como ideal; existen $n = 2$ moles del mismo a la presión P_0 , a la temperatura $T_0 = 300$ K y ocupando un volumen V_0 . El pistón tiene una masa $m = 10$ kg y una sección $S = 500$ cm². El muelle está unido por un extremo al pistón y por el otro a la pared superior del contenedor. Inicialmente el sistema se encuentra en equilibrio y el muelle, de masa despreciable, tiene su longitud natural, esto es, no está estirado ni contraído.



Ahora, el gas se comprime hasta que su volumen se reduce a la mitad y en ese instante el pistón y el muelle se encuentran en reposo, a continuación el sistema se deja en libertad. Se pide a) el volumen que ocupa el gas cuando el pistón posee una velocidad $\sqrt{\frac{4gV_0}{5S}}$

b) Calcular la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del pistón cuando se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio.

Constante del muelle $k = \frac{mgA}{V_0}$

Todos los procesos son adiabáticos.

$R = 8,31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$; γ del gas = 5/3

Propuesto en las Olimpiadas Asiáticas de Física

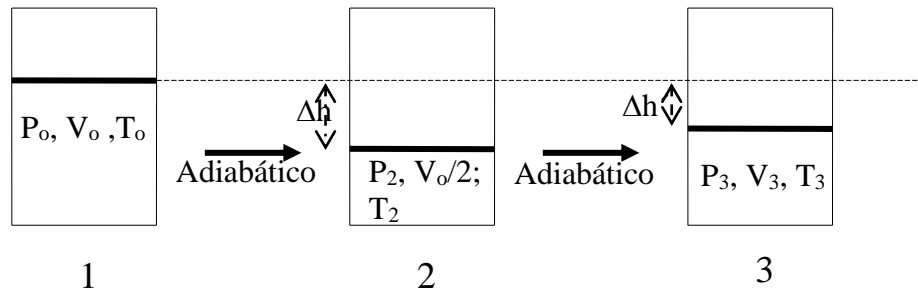
a) Como el sistema inicialmente está en equilibrio, debido a ello, se cumple que el peso del émbolo dirección vertical y sentido hacia abajo es igual a la fuerza que ejerce el gas vertical y sentido hacia arriba

$$mg = P_0 S \Rightarrow P_0 = \frac{mg}{S} = \frac{10 \cdot 9,8}{500 \cdot 10^{-4}} = 1960 \text{ Pa}$$

Al ser el gas noble

$$P_0 V_0 = n R T_0 \Rightarrow V_0 = \frac{n R T_0}{P_0} = \frac{2 \cdot 8,31 \cdot 300}{1960} = 2,54 \text{ m}^3$$

Los procesos que tienen lugar se resumen en la figura 1.



Designamos con U_0 la energía interna del gas en el estado 1, siendo la energía potencial del pistón nula, ya que tomamos como referencia de energías potenciales la del pistón en esa posición, siendo también nula su energía potencial elástica ya que el muelle en esa posición tiene su longitud natural.

Con U_2 representamos la energía interna en el estado 2. Siendo la energía potencial gravitatoria del pistón

$$-mg \Delta h = -mg \frac{V_0}{2A}$$

Y la potencial elástica del muelle:

$$\frac{1}{2} k \Delta h^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mg A}{V_0} \right) \cdot \left(\frac{V_0}{2A} \right)^2 = \frac{1}{8} \frac{mg V_0}{A}$$

En el estado 3, la energía interna es U_3 , la potencial gravitatoria

$$-mg \Delta h' = -mg \frac{V_0 - V_3}{A}$$

La energía potencial elástica vale:

$$\frac{1}{2} k (\Delta h')^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mg A}{V_0} \right) \cdot \left(\frac{V_0 - V_3}{A} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{V_0 A} (V_0 - V_3)^2$$

Teniendo en cuenta que el pistón posee velocidad hay energía cinética

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{4g V_0}{5A} = \frac{2mg V_0}{5A}$$

Entre los estados 2 y 3 podemos escribir

$$U_2 - \frac{mgV_0}{2A} + \frac{1}{8} \frac{mgV_0}{A} = U_3 - mg \frac{V_0 - V_3}{A} + \frac{1}{2} \frac{mg}{A} \frac{(V_0 - V_3)^2}{V_0} + \frac{2}{5} \frac{mgV_0}{A} \Rightarrow$$

$$U_3 - U_2 = \frac{mg}{A} \left[-\frac{V_0}{2} + \frac{V_0}{8} + (V_0 - V_3) - \frac{(V_0 - V_3)^2}{2V_0} - \frac{2V_0}{5} \right] \Rightarrow$$

$$U_3 - U_2 = \frac{mg}{A} \left[\frac{15V_0}{40} - V_3 - \frac{(V_0 - V_3)^2}{2V_0} \right]$$

Por otra parte:

$$U_3 - U_2 = n C_v (T_3 - T_2) = n \frac{3}{2} R (T_3 - T_2) = 3R (T_3 - T_2)$$

$$3R (T_3 - T_2) = \frac{mg}{A} \left[\frac{15V_0}{40} - V_3 - \frac{(V_0 - V_3)^2}{2V_0} \right] \quad (1)$$

Desde el estado 1 al estado 2 aplicamos la ley de transformación adiabática

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{\frac{V_0}{2}} \right)^{\gamma-1} = 300 \cdot 2^3 = 476 \text{ K}$$

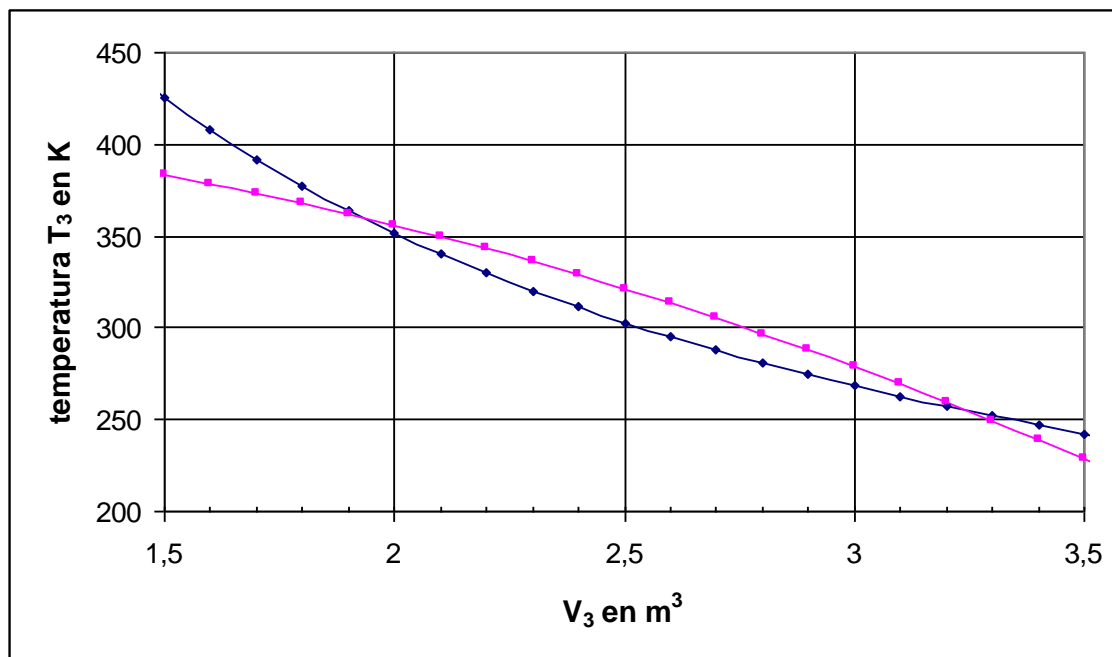
Desde el estado 2 al estado 3 aplicamos la ley de transformación adiabática

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow 476 \cdot 1,27^3 = T_3 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow 558 = T_3 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow T_3 = \frac{558}{V_3^{\frac{2}{3}}} \quad (2)$$

Damos valores numéricos a la ecuación (1).

$$\begin{aligned} 3 \cdot 8,31 (T_3 - 476) &= \frac{10 \cdot 9,8}{500 \cdot 10^{-4}} \left[\frac{9 \cdot 2,54}{40} - V_3 - \frac{(2,54 - V_3)^2}{2 \cdot 2,54_0} \right] \Rightarrow \\ T_3 &= 476 + 78,62 \left[0,5315 - V_3 - \frac{(2,54 - V_3)^2}{5,08} \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow T_3 &= 476 + [44,93 - 78,62 V_3 - 15,476 (2,54 - V_3)^2] \quad (3) \end{aligned}$$

Para resolver el sistema formado por las ecuaciones (2) y (3), damos valores a V_3 y representamos en el mismo gráfico las dos ecuaciones.



Las soluciones del sistema son aproximadamente:

$$1,90 \text{ m}^3 \quad \text{y} \quad 3,25 \text{ m}^3.$$

b) Representamos con x al pequeño desplazamiento hacia abajo del pistón respecto de la posición inicial. Ahora la presión del gas es $P' > P_0$. Las fuerzas que actúan sobre el pistón son:

$P'A$ vertical y hacia arriba; kx vertical y hacia arriba, mg vertical y hacia abajo. La fuerza resultante que actúa sobre el pistón y tiende a llevarlo a su posición inicial vale

$$F = P'S + kx - mg$$

Relacionamos las presiones P_0 y P' teniendo en cuenta que el proceso es adiabático

$$P_0 V_0^\gamma = P'(V')^\gamma = P'(V_0 - Ax)^\gamma \Rightarrow P' = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 - Sx} \right)^\gamma = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 - Sx} \cdot \frac{V_0 + Sx}{V_0 + Sx} \right)^\gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P' = P_0 \left[\frac{V_0(V_0 + Sx)}{(V_0^2 - S^2 x^2)} \right]^\gamma$$

Si tenemos en cuenta que $V_0^2 \gg S^2 x^2$

$$P' = P_0 \left[\frac{V_0(V_0 + Sx)}{(V_0^2 - S^2 x^2)} \right]^\gamma \approx P_0 \left(1 + \frac{Sx}{V_0} \right)^\gamma \approx P_0 \left(1 + \gamma \frac{Sx}{V_0} \right)$$

Sustituyendo en F

$$F = P_o S \left(1 + \gamma \frac{Sx}{V_o} \right) + kx - mg = P_o S + P_o S \gamma \frac{Sx}{V_o} + kx - mg = x \left(k + P_o S \gamma \frac{S}{V_o} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = x \left(\frac{mgS}{V_o} + P_o \gamma \frac{S^2}{V_o} \right)$$

Los términos que aparecen en el paréntesis son todos constantes, esto implica que la fuerza es directamente proporcional a la elongación, por tanto, se trata de un movimiento armónico, cuyo periodo es :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{S}{V_o} (mg + P_o \gamma S)}} = 2\pi \sqrt{\frac{10}{\frac{500 \cdot 10^{-4}}{2.54} \left(10 \cdot 9,8 + 1960 \cdot \frac{5}{3} \cdot 400 \cdot 10^{-4} \right)}} = 9,37s$$

$$f = \frac{1}{9,37} = 0,107 \text{ Hz}$$

14.-Un recinto de paredes rígidas de $V = 100\text{ L}$ contiene gas nitrógeno saturado de vapor de agua. La masa de los gases es 114 g . La presión total 1 atm ósfera. 1) Determinar la temperatura a la que se encuentran los gases. 2) Si el recipiente se calienta a volumen constante hasta $50\text{ }^\circ\text{C}$, ¿cuál es la humedad relativa? 3) Si el recipiente se enfría a volumen constante hasta $10\text{ }^\circ\text{C}$, ¿qué masa de agua condensa?

Datos. Presión de vapor del agua en kPa

$10^\circ\text{C}-1,23\text{ kPa}$; $15^\circ\text{C}-1,71\text{ kPa}$; $20^\circ\text{C}-2,34\text{ kPa}$;

$25^\circ\text{C}-2,17\text{ kPa}$; $30^\circ\text{C}-4,25\text{ kPa}$; $35^\circ\text{C}-5,63\text{ kPa}$;

$40^\circ\text{C}-7,38\text{ kPa}$; $50^\circ\text{C}-12,35\text{ kPa}$; $60^\circ\text{C}-19,93\text{ kPa}$

Masa molar del agua 18 g/mol , masa molar del nitrógeno 28 g/mol

$1\text{ atm} = 101,325\text{ kPa}$

El vapor de agua se comporta como gas ideal.

1) En el problema se trata de una mezcla de gases, por lo que a cada uno de ellos podemos aplicar la ecuación de los gases perfectos. Designamos con T a la temperatura de los gases, con p_v a la presión de vapor del agua a la temperatura T .

$$p_v \cdot 100 = \frac{g_{\text{H}_2\text{O}}}{18} \cdot 0,082 \cdot T \quad ; \quad g_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{p_v \cdot 100 \cdot 18}{0,082 T} \quad (1)$$

$$(1 - p_v) \cdot 100 = \frac{g_{\text{N}_2}}{28} \cdot 0,082 \cdot T \quad ; \quad g_{\text{N}_2} = \frac{(1 - p_v) \cdot 100 \cdot 28}{0,082 T} \quad (2)$$

$$g_{\text{H}_2\text{O}} + g_{\text{N}_2} = 114$$

Con estas tres ecuaciones no podemos resolver el problema ya que son cuatro incógnitas. Tenemos que recurrir a los datos de la presión de vapor en función de la temperatura. Para una temperatura T , la tabla nos da la presión de vapor, la ecuación (1) nos permite calcular los gramos de vapor de agua y la ecuación (2) los gramos de nitrógeno. La solución es aquella temperatura para la cual la suma de los gramos de vapor de agua y de nitrógeno sea 114 .

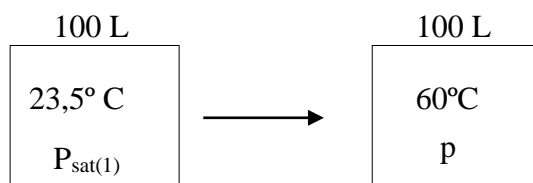
Los cálculos los presentamos en forma de tabla

$t/^\circ\text{C}$	T/K	p_v/kPa	P_v/atm	$1-p_v= p_{\text{N}_2}$	$g_{\text{H}_2\text{O}}$ según ecuación(1)	g_{N_2} según ecuación (2)	$g_{\text{H}_2\text{O}}+g_{\text{N}_2}$
10	283	1,23	0,0121	0,989	0,94	119,3	120,3
15	288	1,71	0,0169	0,983	1,29	116,5	117,8
20	293	2,34	0,0231	0,977	1,73	113,9	115,6
25	298	3,17	0,0313	0,969	2,31	111,0	113,3
30	303	4,25	0,0419	0,958	3,04	108,0	111,0
35	308	5,63	0,0556	0,943	3,96	194,5	108,5
40	313	7,38	0,0728	0,927	5,11	101,1	106,2
50	323	12,35	0,1219	0,878	8,28	92,8	101,1
60	333	19,93	0,1967	0,803	13,0	82,3	95,3

La solución está comprendida entre 293 y 298 grados. Para precisar el valor de la temperatura suponemos una variación lineal de los gramos totales con la temperatura:

$$\frac{298 - 293}{113,3 - 115,6} = \frac{298 - x}{113,3 - 114} \Rightarrow 298 - x = 1,5^\circ \Rightarrow x = 296,5 \text{ K} = 23,5^\circ \text{ C}$$

2) El proceso de cambio es el siguiente:



La humedad relativa es:

$$h = 100 \frac{P}{P_{\text{max}} (60^\circ \text{ C})} = 100 \frac{P}{0,19667}$$

Para calcular p, hacemos uso de la ley de los gases:

$$\frac{P_{\text{sat}(1)}}{273 + 23,5} = \frac{p}{273 + 60} \Rightarrow p = \frac{333}{296,5} P_{\text{sat}(1)}$$

El valor de $p_{\text{sat}(1)}$ lo obtenemos interpolando en la tabla de las presiones de vapor

$$\frac{0,0313 - 0,0231}{25 - 20} = \frac{0,0313 - p_{\text{sat}(1)}}{25 - 23,5} \Rightarrow 0,0313 - p_{\text{sat}(1)} = \frac{0,0082 \cdot 1,5}{5} = 0,0025 \Rightarrow$$

$$p_{\text{sat}(1)} = 0,0313 - 0,0025 = 0,0288 \text{ atm} \Rightarrow p = \frac{333}{296,5} \cdot 0,0288 = 0,032 \text{ atm}$$

La humedad relativa es:

$$h = 100 \cdot \frac{0,032}{0,1967} = 16,3 \%$$

3) Determinamos la cantidad de vapor de agua que existen en los 100 litros que se encuentran a la temperatura de 23,5°C y con la presión de vapor $p_{\text{sat}(1)} = 0,0288 \text{ atm}$, para ello aplicamos la ecuación (1)-

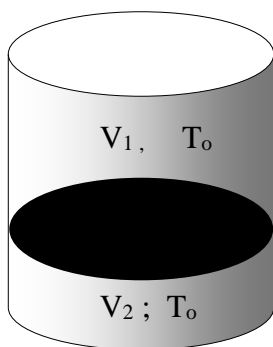
$$g_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{0,0288 \cdot 100 \cdot 18}{0,082 \cdot (273 + 23,5)} = 2,13 \text{ g}$$

Cuando se disminuye la temperatura a 10 °C el vapor de agua que queda en los 100 L es 0,94 g (calculado en la tabla), por tanto, condensan

$$2,13 - 0,94 = 1,19 \text{ g}$$

15.- Un cilindro vertical está cerrado por ambos extremos; lleva un émbolo en su interior que se puede desplazar sin rozamiento. En la parte superior existe un mol de gas perfecto a la temperatura T_0 y ocupa un volumen V_1 . En la parte inferior existe un mol del mismo gas a la misma temperatura y ocupa un volumen V_2 . El volumen $V_1 = 4 V_2$.

Se pide la temperatura para la cual el volumen superior es tres veces el inferior.



La razón de que el volumen superior sea mayor que el inferior es porque el émbolo presiona al gas inferior, y eso determina que la presión del gas inferior sea mayor que la del superior.

Designamos con V_T al volumen total del cilindro, con V_1 el volumen superior y V_2 el volumen inferior cuando la temperatura es T_0 .

$$V_T = V_1 + V_2 = 4V_2 + V_2 = 5V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{V_T}{5}$$

$$\Rightarrow V_T = V_1 + V_2 = V_1 + \frac{V_T}{5} \Rightarrow V_1 = \frac{4V_T}{5}$$

M representa la masa del émbolo y S su superficie. Aplicamos la ecuación de los gases perfectos a los dos compartimentos.

$$P_0 \frac{4V_T}{5} = RT_0 ; \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) \cdot \frac{V_T}{5} = RT_0 \Rightarrow P_0 \frac{4V_T}{5} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) \cdot \frac{V_T}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}P_0 = \frac{P_0}{5} + \frac{Mg}{5S} \Rightarrow 3P_0 = \frac{Mg}{S}$$

Operamos siguiendo el procedimiento anterior cuando la temperatura del gas es T . El volumen total es el mismo, ahora los volúmenes superior e inferior son respectivamente V'_1 y V'_2

$$V_T = V'_1 + V'_2 = 3V'_2 + V'_2 = 4V'_2 \Rightarrow V'_2 = \frac{V_T}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_T = V'_1 + V'_2 = V'_1 + \frac{V_T}{4} \Rightarrow V'_1 = \frac{3V_T}{4}$$

$$P' \frac{3V_T}{4} = RT_0 ; \left(P' + \frac{Mg}{S} \right) \cdot \frac{V_T}{4} = RT_0 \Rightarrow P' \frac{3V_T}{4} = \left(P' + \frac{Mg}{S} \right) \cdot \frac{V_T}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}P' = \frac{P'}{4} + \frac{Mg}{4S} \Rightarrow 2P' = \frac{Mg}{S} \Rightarrow 3P_0 = 2P' \Rightarrow P' = \frac{3P_0}{2}$$

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos entre los volúmenes superiores a la

temperaturas T_0 y a T' .

$$\frac{P_0 \cdot \frac{4V_T}{5}}{T_0} = \frac{P' \cdot \frac{3V_T}{4}}{T'} \Rightarrow \frac{4P_0}{5T_0} = \frac{3P'}{4T'} = \frac{3 \cdot \frac{3P_0}{2}}{4T'} \Rightarrow T' = \frac{45}{32}T_0$$

16.-(344). La ecuación de Clausius-Clapeyron se aplica a una sustancia que se encuentra en equilibrio entre dos fases, y su expresión matemática es la siguiente:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta H}{T \Delta V}$$

Si nos referimos a un equilibrio líquido vapor, p es la presión de vapor de la sustancia y ΔH su calor de vaporización por mol, ΔV es la diferencia de volúmenes por mol entre la fase vapor y la fase líquida.

a) Utilizando la ecuación anterior y los datos experimentales que aparecen en los datos del problema determinar a qué presión hervirá el agua pura cuando su temperatura es de 20° C.

b) Estimar a qué temperatura hervirá el agua pura en una montaña de 2000 m de altura, sabiendo que a nivel del mar la temperatura es 20°C=293 K y que ésta disminuye según la ley $T = 293 - \lambda z$, $\lambda = 6,5 \cdot 10^{-3}$ K/m

Suponer que el vapor de agua se comporta como un gas perfecto.

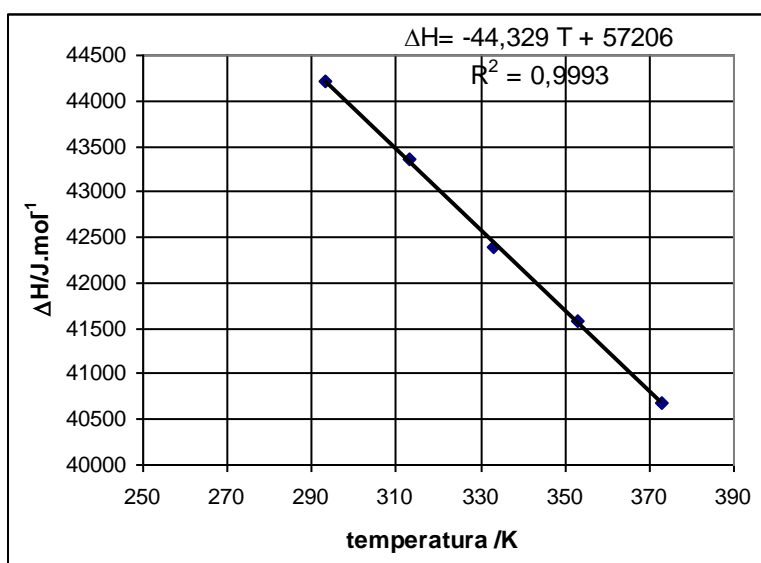
Datos:

Temperatura /K	293	313	333	353	373
ΔH en J/mol	$44,2 \cdot 10^3$	$43,4 \cdot 10^3$	$42,4 \cdot 10^3$	$41,6 \cdot 10^3$	$40,7 \cdot 10^3$

Masa molar promedio del aire $M = 29$ g/mol.

a) Una sustancia pura en estado líquido hierve cuando su presión de vapor es igual a la presión externa que actúa sobre ella.

Si queremos integrar la ecuación de Clausius –Clapeyron debemos encontrar una relación entre la entalpía de vaporización y la temperatura. Para ello representamos en una gráfica los datos experimentales:



Los datos se ajustan bien mediante una relación lineal.

$$\frac{dp}{dT} = \frac{-44,329T + 57206}{T(V_{\text{vapor}} - V_{\text{líquido}})}$$

Dado que el volumen de un mol de agua en forma de vapor es mucho mayor que el volumen de ese mol en estado líquido, hacemos la aproximación de que la diferencia de volúmenes es el volumen de la fase vapor.

Aplicamos la ecuación de los gases perfectos a la fase vapor

$$pV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{p}$$

Sustituyendo en la ecuación y separando variables resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dT} &= \frac{-44,329T + 57206}{RT^2} \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \frac{1}{R} \left[\int -\frac{44,329}{T} dT + \int \frac{57206}{T^2} dT \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln p = -\frac{44,329}{8,31} \ln T - \frac{57206}{8,31 \cdot T} + Cte = -5,32 \ln T - \frac{6884}{T} + Cte \quad (1) \end{aligned}$$

Para hallar el valor de la constante de integración utilizamos el hecho experimental de que el agua pura hierve a $100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$ cuando la presión de vapor es $101\,325\text{ Pa} = 1\text{ atm}$.

$$\ln 101325 = -5,32 \ln 373 - \frac{6884}{373} + Cte \Rightarrow Cte = 11,53 + 31,5 + 18,46 = 61,49$$

Sustituyendo este valor de la constante en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} \ln p &= -5,32 \ln(273 + 20) - \frac{6884}{(273 + 20)} + 61,49 \Rightarrow \ln p = 7,78 \Rightarrow p = 2384\text{ Pa} \\ p &= \frac{2384}{101325} \cdot 760 = 17,9\text{ mm Hg} \end{aligned}$$

b) Calculamos el valor de la presión que existe en lo alto de la montaña. La variación de la presión con la altura es:

$$dP = -\rho g dz \quad (2)$$

El signo menos indica que la presión disminuye con la altura. En la ecuación anterior puede admitirse, sin apenas error, que g es la misma que en la superficie terrestre y que la densidad del aire la expresamos en función de la presión y la temperatura, aplicando la ley de los gases perfectos.

$$PV = nRT = \frac{m}{M} RT \Rightarrow P = \frac{\rho RT}{M} = \frac{\rho R(293 - \lambda z)}{M} \Rightarrow \rho = \frac{PM}{R(293 - \lambda z)}$$

Sustituyendo en la ecuación (2)

$$dP = -\frac{PMg}{R(293-\lambda z)} dz \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \int \frac{dz}{293-\lambda z}$$

Para resolver la segunda integral hacemos el cambio de variable

$$293 - \lambda z = a \Rightarrow da = -\lambda dz \Rightarrow dz = -\frac{da}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dP}{P} &= -\frac{Mg}{R} \int \frac{dz}{293-\lambda z} \Rightarrow \ln P = -\frac{Mg}{R} \int -\frac{da}{\lambda a} \Rightarrow \ln P = \frac{Mg}{R\lambda} \ln a + Cte \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln P = \frac{Mg}{R\lambda} \ln(293 - \lambda z) + Cte \end{aligned}$$

Para hallar la constante de integración, sabemos que cuando $z=0$ (nivel del mar) la presión es una atmósfera, $P_o = 101325$ Pa

$$\begin{aligned} \ln P_o &= \frac{Mg}{R\lambda} \ln 293 + Cte \Rightarrow Cte = \ln P_o - \frac{Mg}{R\lambda} \ln 293 \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln P &= \frac{Mg}{R\lambda} \ln(293 - \lambda z) + \ln P_o - \frac{Mg}{R\lambda} \ln 293 \Rightarrow \ln \frac{P}{P_o} = \frac{Mg}{R\lambda} \left(\ln \frac{293 - \lambda z}{293} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo valores numéricos en la última ecuación

$$\begin{aligned} \ln \frac{P}{101325} &= \frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8}{8,31 \cdot 6,5 \cdot 10^{-3}} \ln \frac{293 - 6,5 \cdot 10^{-3} \cdot 2000}{293} = -0,239 \Rightarrow \frac{P}{101325} e^{-0,239} \Rightarrow \\ &\Rightarrow P = 7,98 \cdot 10^4 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Vayamos a la ecuación de Clausius-Clapeyron

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dT} &= \frac{\Delta H}{TV_{\text{liquido}}} = \frac{-44,329T + 57206}{T \cdot \frac{RT}{p}} \Rightarrow \frac{dp}{P} = \left(-\frac{44,329}{RT} + \frac{57206}{RT^2} \right) dT = \left(\frac{5,33}{T} + \frac{6884}{T^2} \right) dT \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{101325}^{7,98 \cdot 10^4} \frac{dp}{P} &= -5,33 \int_{373}^{T_E} \frac{dT}{T} + 6884 \int_{373}^{T_E} \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln \frac{7,98 \cdot 10^4}{101325} = -5,33 \ln \frac{T_E}{373} - 6884 \left(\frac{1}{T_E} - \frac{1}{373} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -0,239 &= -5,33 \ln \frac{T_E}{373} - \frac{6884}{T_E} + 18,46 \Rightarrow 18,70 = 5,33 \ln \frac{T_E}{373} + \frac{6884}{T_E} \quad (3) \end{aligned}$$

La ecuación (3) la resolvemos por tanteo

$$\begin{aligned} T_E = 363 \text{ K} \quad 18,70 < -0,14 + 18,96 &; \quad T_E = 365 \text{ K} \quad 18,70 < -0,12 + 18,86 \\ T_E = 367 \text{ K} \quad 18,70 > -0,086 + 18,76 &; \quad T_E = 366,8 \text{ K} \quad 18,70 > -0,089 + 18,76 \\ T_E = 366,6 \text{ K} \quad 18,70 \approx -0,092 + 18,78 & \end{aligned}$$

Damos este último valor como solución $T_E = 366,6 \text{ K} = 93,6 \text{ °C}$

17. (391).-Determinar las constantes críticas del dióxido de carbono sabiendo que las constantes a y b de la ecuación de van der Waals son:

$$a = 3,60 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}^2}{\text{mol}^2} ; b = 4,28 \cdot 10^{-2} \frac{\text{L}}{\text{mol}}$$

Un mol de dióxido de carbono ocupa un volumen de 0,40 L a una temperatura de 50°C.

Determinar la presión utilizando la ecuación de los gases perfectos y la de van der Waals

Dibuje las isotermas de un mol de gas ideal y de van der Waals

La ecuación de van der Waals para un mol de sustancia es: $\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$

En el punto crítico la curva debida a la ecuación anterior tiene un punto de inflexión, por tanto, las condiciones de tal estado es que las siguientes derivadas son nulas.

$$\frac{dP}{dV}(T \text{ cte}) = 0 \quad \frac{d^2P}{dV^2}(T \text{ cte}) = 0$$

Despajamos la presión de la ecuación de van der Waals

$$P = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \Rightarrow \frac{dP}{dV} = \frac{-RT}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3} = \frac{-RT}{(V - b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$$

$$\frac{d^2P}{dV^2} = \frac{2RT}{(V - b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$$

Despejamos RT de cada una de las ecuaciones anteriores e igualamos los segundos miembros.

$$RT = \frac{2a(V - b)^2}{V^3} ; RT = \frac{3a(V - b)^3}{V^4} \Rightarrow \frac{2a(V - b)^2}{V^3} = \frac{3a(V - b)^3}{V^4} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{V - b}{V} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2V = 3V - 3b \Rightarrow V_c = 3b$$

$$\Rightarrow RT = \frac{2a(3b - b)^2}{27b^3} \Rightarrow T_c = \frac{8a}{27Rb} \Rightarrow P_c = \frac{\frac{8a}{27b}}{3b - b} - \frac{a}{9b^2} = \frac{4a}{27b^2} - \frac{a}{9b^2} = \frac{a}{27b^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos

$$V_c = 3 \cdot 4,28 \cdot 10^{-2} = 0,13 \frac{\text{L}}{\text{mol}} ; T_c = \frac{8 \cdot 3,60 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}^2}{\text{mol}^2}}{27 \cdot 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol K}} \cdot 4,28 \cdot 10^{-2} \frac{\text{L}}{\text{mol}}} = 303,9\text{K}$$

$$P_c = \frac{3,60 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}^2}{\text{mol}^2}}{27 (4,28 \cdot 10^{-2})^2 \frac{\text{L}^2}{\text{mol}^2}} = 72,8 \text{ atm}$$

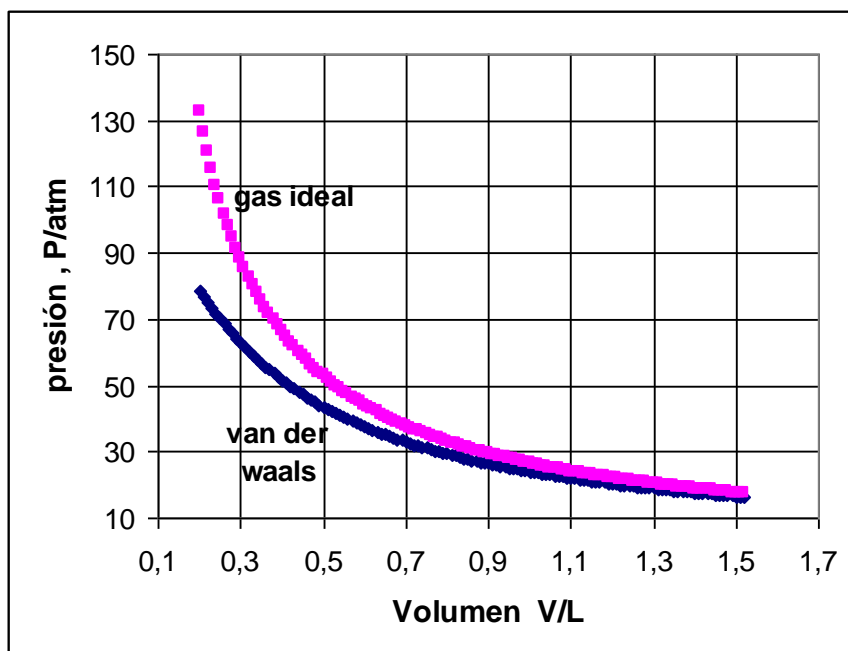
Ecuación de los gases perfectos

$$P = \frac{R T}{V} = \frac{0,082 \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}} \cdot (273 + 50)\text{K}}{0,40\text{L}} = 66,2 \text{ atm}$$

Ecuación de van der Waals

$$P = \frac{R T}{V - b} - \frac{a}{V^2} = \frac{0082 \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}} \cdot (273 + 50)\text{K}}{(0,40 - 4,28 \cdot 10^{-2}) \frac{\text{L}}{\text{mol}}} - \frac{3,60 \frac{\text{atm L}^2}{\text{mol}^2}}{\left(0,40 \frac{\text{L}}{\text{mol}}\right)^2} = 74,1 \text{ atm} - 22,5 \text{ atm}$$

$$P = 51,6 \text{ atm}$$



Observe que a presiones relativamente bajas la ecuación de los gases ideales coincide con la de van der Waals y discrepan cuando las presiones son elevadas.

18. (404.)- *Un cilindro dotado de un pistón movable, contiene 28,40 g de aire y 6,00 gramos de agua.*

a) *Determinar la indicación de un manómetro conectado al cilindro cuando esté a la temperatura de -24°C y un volumen de 1) 20 L, 2) 10 L y 3) 5 L.*

b) *Determinar la indicación del manómetro para los tres volúmenes anteriores pero a la temperatura de 100°C*

El problema debe resolverse empleando únicamente los datos siguientes: Densidad del aire en condiciones normales, 1,26 g/L; densidad del vapor de agua saturado a 100°C , 0,60 g/L ; densidad del hielo $0,99 \text{ g/cm}^3$.

a) A la temperatura de -24°C el agua del cilindro se encontrará en estado sólido y ocupará un volumen de $V = \frac{6,00 \text{ g}}{0,99 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}} \approx 6,1 \text{ cm}^3$. La fase gaseosa en contacto con el

hielo es aire y una pequeñísima cantidad de vapor de agua en equilibrio con el hielo, por lo que prácticamente puede considerarse que el aire ocupa todo el volumen del cilindro. La presión que indicará el manómetro será la que ejerza el aire ya que la presión de la del vapor del agua es en este caso insignificante.

$$P(20,0 - 6,1 \cdot 10^{-3}) = \frac{28,4 \text{ g}}{M_{\text{aire}}} \cdot 0,082 \cdot (273 - 24) \quad (1)$$

Para hallar la masa molecular promedio del aire utilizamos el dato de su densidad en condiciones normales

$$P_o = \frac{1,29}{M_{\text{aire}}} \cdot R \cdot 273 \Rightarrow M_{\text{aire}} = \frac{1,29 R \cdot 273}{1}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) y para el volumen del cilindro 20 L.

$$P(20,0 - 6,1 \cdot 10^{-3}) = \frac{28,4 \text{ g}}{1,29 R \cdot 273} \cdot R \cdot (273 - 24) \Rightarrow P = \frac{28,4 \cdot 249}{1,29 \cdot 273 \cdot (20,0 - 6,1 \cdot 10^{-3})} \approx 1,00 \text{ atm}$$

2) Para el volumen del cilindro 10 L

$$P = \frac{28,4 \cdot 249}{1,29 \cdot 273 \cdot (10,0 - 6,1 \cdot 10^{-3})} = 2,01 \text{ atm}$$

3) Para el volumen del cilindro 5 L

$$P = \frac{28,4 \cdot 249}{1,29 \cdot 273 \cdot (5 - 6,1 \cdot 10^{-3})} = 4,02 \text{ atm}$$

b) Al ser la temperatura 100°C habrá en el aire vapor de agua. El aire puede estar o no saturado de vapor de agua, lo que depende del volumen del cilindro y la masa de agua.

1) Utilizamos el valor de la densidad del vapor de agua saturado para conocer la cantidad que tiene que haber de agua en estado de vapor para que se cumpla el estado de saturación

$$0,60 = \frac{m(\text{Vapor de agua})}{20} \Rightarrow m(\text{Vapor de agua}) = 12 \text{ g}$$

El resultado anterior nos indica que no se alcanza la saturación cuando el volumen del cilindro es 20 L. Si el aire estuviese saturado ejercería una presión de una atmosfera, como solamente existe la mitad de agua, la presión ejercida por el vapor es 0,5 atm. La presión indicada por el manómetro es:

$$P = P_{\text{aire}} + P_{\text{vapor de agua}} = \frac{28,4 \cdot R : 373}{1,29 \cdot R \cdot 273 \cdot 20} + 0,5 = 1,5 + 0,5 = 2,0 \text{ atm}$$

2) Volumen del cilindro 10 L

$$0,60 = \frac{m(\text{Vapor de agua})}{10} \Rightarrow m(\text{Vapor de agua}) = 6 \text{ g}$$

En este caso el aire está saturado de vapor de agua y ejercerá una presión de 1 atmosfera.

La presión indicada por el manómetro es:

$$P = P_{\text{aire}} + P_{\text{vapor de agua}} = \frac{28,4 \cdot R : 373}{1,29 \cdot R \cdot 273 \cdot 10} + 1,0 = 3,0 + 1,0 = 4,0 \text{ atm}$$

3) Volumen del cilindro 5 L

$$0,60 = \frac{m(\text{Vapor de agua})}{5} \Rightarrow m(\text{Vapor de agua}) = 3 \text{ g}$$

En este caso el aire se encuentra saturado de vapor de agua y habrá tres gramos de agua en estado líquido

La presión indicada por el manómetro es:

$$P = P_{\text{aire}} + P_{\text{vapor de agua}} = \frac{28,4 \cdot R : 373}{1,29 \cdot R \cdot 273 \cdot \left(5 - \frac{6,1}{2} \cdot 10^{-3}\right)} + 1,0 = 6,0 + 1,0 = 7,0 \text{ atm}$$

19. (420).- Se dispone de dos balones esféricos de distintos volúmenes. Uno se llena con aire caliente a la temperatura de 373 K y el otro con vapor de agua a esa misma temperatura. Se comprueba que ambos balones pueden izar una masa total de 300 kg en la superficie terrestre. En esta masa está incluida la masa de la envoltura, de las cuerdas y de todos los elementos empleados en el experimento. La temperatura ambiente es $T_o = 293$ K y la presión $p_o = 10^5$ Pa.

a) Calcular los volúmenes de los balones.

b) Determinar la cantidad de calor aportada al aire atmosférico para llenar el balón de aire y realizar el mismo cálculo para el balón que contiene el vapor de agua.

c) Se encuentra que justamente acabado de llenar el balón de aire se produce una pérdida de fuerza ascendente a razón de $k_1 = 0,30$ N/s. Se pide la pérdida k_2 para el balón de vapor de agua, para los dos casos siguientes. 1) El agua condensada procedente del vapor se retiene en el propio balón 2) El agua condensada se expulsa al exterior del balón.

Las envolturas de los balones son del mismo material, por tanto, conducen por igual el calor, además no permiten pérdidas ni de aire ni de vapor de agua. Se admite que tanto el aire como el vapor de agua se comportan como gases ideales.

Datos. Masa molar el aire $M_A = 0,029$ kg/mol, Masa molar el agua $M_W = 0,018$ kg/mol, capacidad calorífica a volumen constante $C_v = (5/2) R$, calor específico del agua líquida $C_w = 4200$ Jkg⁻¹K⁻¹, temperatura de ebullición del agua a p_o , 373 K, calor de vaporización del agua $\lambda = 2,3 \cdot 10^6$ J/Kg

a) La fuerza ascensional es igual al empuje del aire sobre el balón menos el peso del contenido del balón.

$$V_1 \rho_{293} g - V_1 \rho_{373} g = 300 \cdot g \Rightarrow V_1 = \frac{300}{\rho_{293} - \rho_{373}}$$

Para determinar las densidades hacemos uso de la ecuación de los gases perfectos, admitiendo que la presión del aire dentro del globo es la misma que la presión exterior p_o .

$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{n}{V} RT = \frac{g}{VM} RT \Rightarrow p = \frac{\rho}{M} RT$$

Aplicamos la ecuación anterior

$$p_o = \frac{\rho_{293}}{M_A} R 293 \Rightarrow ; \Rightarrow \rho_{293} = \frac{p_o M_A}{R 293} \quad ; \quad p_o = \frac{\rho_{373}}{M_A} R 373 \Rightarrow \rho_{373} = \frac{p_o M_A}{R 373}$$

$$V_1 = \frac{300}{\frac{p_o M_A}{R 293} - \frac{p_o M_A}{R 373}} = \frac{300}{\frac{p_o M_A}{R} \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{373} \right)} = \frac{300}{8,31 \cdot \left(\frac{1}{293} - \frac{1}{373} \right)} = 1174 \text{ m}^3$$

Para el balón de agua partimos de la misma ecuación inicial, el empuje es el mismo que en el caso anterior pero el peso del contenido cambia ya que la densidad del vapor de agua es diferente de la del aire.

$$V_2 = \frac{300}{\rho_{293} - \rho_{373(w)}}$$

$$p_0 = \frac{\rho_{373(w)}}{M_w} R 373 \Rightarrow \rho_{373(w)} = \frac{p_0 M_w}{R 373} \Rightarrow$$

$$V_2 = \frac{300}{\frac{p_0 M_A}{R 293} - \frac{p_0 M_w}{R 373}} = \frac{300}{\frac{p_0}{R} \left(\frac{M_A}{293} - \frac{M_w}{373} \right)} = \frac{300}{8,31 \left(\frac{0,029}{293} - \frac{0,018}{373} \right)} = 492 \text{ m}^3$$

b)

$$Q_1 = n C_p \Delta t = \frac{p_0 V_1}{R T_1} \cdot \frac{7}{2} R \cdot (T_1 - T_0) = \frac{10^5 \cdot 1174}{373} \cdot \frac{7}{2} (373 - 293) = 8,81 \cdot 10^7 \text{ J}$$

En el caso del balón de vapor de agua primero es preciso calentar el agua líquida desde 293°C a 373 °C y a continuación pasarla al estado de vapor.

$$Q_2 = m_w C_w (T_1 - T_0) + m_w \lambda \quad p_0 V_2 = \frac{m_w}{M_w} R T_1 \Rightarrow m_w = \frac{p_0 V_2 M_w}{R T_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_2 = \frac{p_0 V_2 M_w}{R T_1} [C_w (T_1 - T_0) + \lambda] = \frac{10^5 \cdot 492 \cdot 0,018}{8,31 \cdot 373} [4200 \cdot 80 + 2,3 \cdot 10^6] = 75,3 \cdot 10^7 \text{ J}$$

c) La pérdida de fuerza ascensional se debe a que en el caso del balón de aire hay una pérdida de energía calorífica al ambiente y esto determina una disminución de la temperatura del aire y, si la presión es la misma, a una disminución del volumen. Observamos que el peso del contenido del balón no cambia ya que el número de moles de aire es el mismo, puesto que la envoltura del balón permite el paso del calor pero no del aire.

Designamos con q_1 a la pérdida del calor por unidad de tiempo, en un tiempo posterior dt a que el balón se ha llenado. La pérdida de calor es $q_1 dt$; y la variación de la temperatura dT y del volumen del balón dV_1 .

$$q_1 dt = n C_p dT \quad ; \quad p_0 dV_1 = n R dT \Rightarrow n dT = \frac{p_0 dV_1}{R} \Rightarrow q_1 dt = C_p \frac{p_0 dV_1}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dV_1 = \frac{q_1 R dt}{p_0 C_p}$$

La variación de la fuerza ascensional es:

$$F_{asc} = V_1 \rho_o g \Rightarrow dF_{asc} = \rho_o g dV_1 = \rho_o g \frac{q_1 R dt}{p_o C_P} \text{ como } \rho_o = \frac{p_o M_A}{R T_o} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dF_{asc} = \frac{p_o M_A}{R T_o} g \frac{q_1 R dt}{p_o C_P} \Rightarrow dF_{asc} = \frac{M_A}{T_o C_P} g q_1 dt \Rightarrow \frac{dF_{asc}}{dt} = k_1 = \frac{M_A}{T_o C_P} g q_1 \quad (1)$$

Designamos con q_2 al calor emitido por unidad de tiempo. Un tiempo posterior dt a que el balón se ha llenado, el calor perdido es $q_2 dt$ y ese calor perdido lo ha proporcionado el paso de una cantidad dm en kg de vapor de agua que se convierte en agua líquida.

$$q_2 dt = dm \lambda = dn M_w \lambda$$

En esta ecuación dn es el número de moles. La disminución del volumen debido a esos moles es dV_2 .

$$p_o dV_2 = dn R T_1 = \frac{q_2 dt}{M_w \lambda} R T_1 \Rightarrow dV_2 = \frac{q_2 dt}{p_o M_w \lambda} R T_1$$

La variación de la fuerza ascensional es:

$$dF_{asc}(W) = \rho_o g dV_2 = \frac{p_o M_A}{R T_o} g \frac{q_2 dt}{p_o M_w \lambda} R T_1 = \frac{M_A}{T_o} g \frac{q_2 dt}{M_w \lambda} T_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dF_{asc}(W)}{dt} = k_2 = \frac{M_A}{T_o} g \frac{q_2}{M_w \lambda} T_1 \quad (2)$$

Los calores perdidos a través de las envolturas de los balones son proporcionales a la superficie

$$q_1 = k \cdot 4\pi R_1^2 \quad ; \quad q_2 = k \cdot 4\pi R_2^2 \Rightarrow q_2 = \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 q_1$$

Poniendo los radios en función de los volúmenes

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \quad ; \quad V_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_2 = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{2}{3}} q_1$$

Dividiendo la ecuación (2) por la (1)

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{\frac{M_A}{T_o} g \frac{q_2}{M_w \lambda} T_1}{\frac{M_A}{T_o C_P} g q_1} = \frac{\frac{q_2}{M_w \lambda} T_1}{\frac{1}{C_P} q_1} = \frac{T_1 C_P}{M_w \lambda} \frac{q_2}{q_1} = \frac{T_1 C_P}{M_w \lambda} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{373 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8,31}{0,018 \cdot 2,3 \cdot 10^6} \left(\frac{492}{1174} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,15 \Rightarrow k_2 = 0,15 \cdot 0,30 = 0,045 \frac{N}{s}$$

Para el caso de echar el agua fuera del balón, al término analizado anteriormente hemos de restar el peso de agua formados

$$dF_{asc}(W2) = \frac{M_A}{T_o} g \frac{q_2 dt}{M_w \lambda} T_1 - \frac{q_2 dt}{\lambda} g \Rightarrow \frac{dF_{asc}(W2)}{dt} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\frac{M_A}{T_o} \frac{g}{M_w \lambda} T_1 - \frac{g}{\lambda} \right] q_1 = k_3$$

$$\Rightarrow \frac{k_3}{k_1} = \frac{\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{g}{\lambda} \left[\frac{M_A}{T_o M_w} T_1 - 1 \right]}{\frac{M_A}{T_o C_P} g} = \frac{\left(\frac{492}{1174} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2,3 \cdot 10^6} \left[\frac{0,029 \cdot 393}{293 \cdot 0,018} - 1 \right]}{\frac{0,029}{293 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8,31}} = 0,084 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_3 = 0,084 \cdot 0,30 = 0,025 \frac{N}{s}$$

20. (473.)- *Un recipiente de volumen 2 L contiene 2 gramos de H₂ y está saturado de vapor de agua y se encuentra a la temperatura T₁ y a la presión de 17.10⁵ Pa. Se calienta el contenido del recipiente hasta una temperatura T₂, siendo entonces la presión 26.10⁵ Pa. La presión del vapor de agua en función de la temperatura es:*

<i>T/K</i>	<i>273</i>	<i>393</i>	<i>406</i>	<i>425</i>	<i>453</i>
<i>P_v/ Pa</i>	<i>1.10⁵</i>	<i>2.10⁵</i>	<i>3.10⁵</i>	<i>1.10⁵</i>	<i>10.10⁵</i>

Estimar las temperaturas T₁ y T₂ y los gramos de vapor de agua en el recipiente a esas dos temperaturas.

Admitir que tanto el hidrógeno como el vapor de agua se comportan como gases perfectos. Masas atómicas H=1 , O =16

Olimpiadas de Moscú

Aplicamos la ley de los gases perfectos a la mezcla de hidrógeno y vapor de agua a las dos temperaturas

$$17.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \left(\frac{2}{2} + \frac{g}{18} \right) \cdot 8,31 \cdot T_1 \Rightarrow 3400 = \left(1 + \frac{g}{18} \right) \cdot 8,31 \cdot T_1 \quad (1)$$

$$26.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \left(\frac{2}{2} + \frac{g'}{18} \right) \cdot 8,31 \cdot T_2 \Rightarrow 5200 = \left(1 + \frac{g'}{18} \right) \cdot 8,31 \cdot T_2 \quad (2)$$

Aplicamos la ley de los gases perfectos al vapor de agua

$$p_v(T_1) \cdot 2.10^{-3} = \frac{g}{18} \cdot 8,31 \cdot T_1 \quad (3)$$

$$p_v(T_2) \cdot 2.10^{-3} = \frac{g'}{18} \cdot 8,31 \cdot T_2 \quad (4)$$

Con las cuatro ecuaciones anteriores no podemos resolverlas porque hay más incógnitas.

La forma de proceder es la siguiente. En la ecuación (3) le damos a T₁ un valor, con ese valor y la tabla de datos proporcionada determinamos la presión de vapor y aplicando la ecuación (3) determinamos g. este valor de g junto con T₁ lo llevamos al segundo miembro de la ecuación (1) y obtenemos un valor que puede o no coincidir con el primer miembro, si coincide hemos acertado con el valor de T₁ y g, si no coincide hay que volver a ensayar., El mismo procedimiento se repite con las ecuaciones (4) y (2).

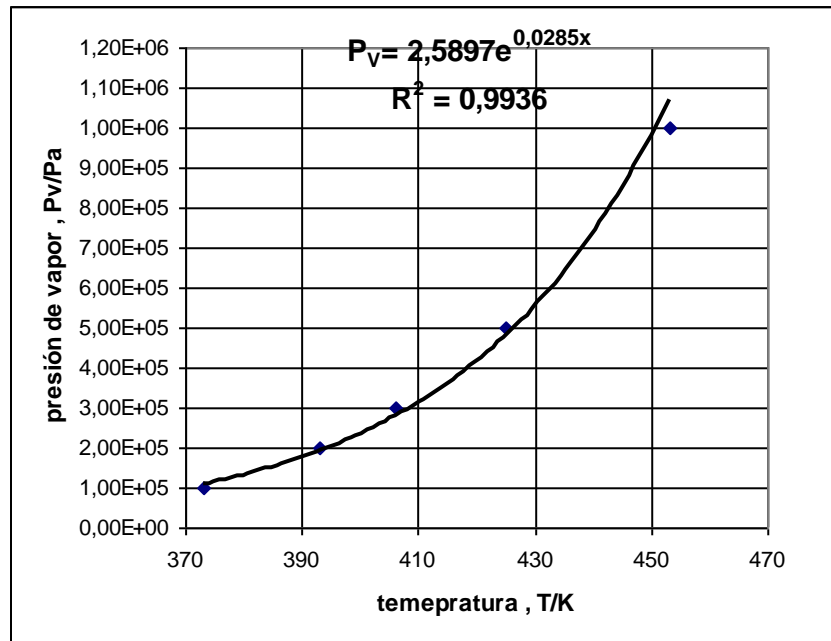
Para orientarnos sobre el valor que pueda tener T₁, hacemos un cálculo suponiendo que todo es hidrógeno y no hay vapor de agua

$$17 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 1 \cdot 8,31 \cdot T_1 \Rightarrow T_1 = \frac{17 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8,31} = 409 \text{ K}$$

Para T_1 hemos de ensayar con valores inferiores a 409 K y para T_2 con valores superiores..

Este trabajo se puede hacer con una calculadora, pero lo hacemos de forma más rápida con una hoja de cálculo

Representamos la tabla de valores numéricos en una gráfica y ajustamos la curva con una ecuación



Después de realizar varios ensayos hacemos

$$T_1 = 379 \text{ K}, \quad P_v = 2,5897 \cdot e^{0,0285 \cdot 379} = 1,271 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$1,271 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \frac{g}{18} \cdot 8,31 \cdot 379 \Rightarrow g = \frac{1,271 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 18}{8,31 \cdot 379} = 1,45 \text{ g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3400 \approx \left(1 + \frac{1,45}{18}\right) \cdot 8,31 \cdot 379 = 3403$$

$$\text{Si hacemos } T_2 = 442 \text{ K}, \quad P_v = 2,5897 \cdot e^{0,0285 \cdot 442} = 7,657 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$7,657 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = \frac{g'}{18} \cdot 8,31 \cdot 442 \Rightarrow g' = \frac{7,657 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 18}{8,31 \cdot 442} = 7,50 \text{ g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5200 \approx \left(1 + \frac{7,50}{18}\right) \cdot 8,31 \cdot 442 = 5203$$

Las soluciones del problema son: $T_1 = 379 \text{ K}$; $T_2 = 442 \text{ K}$, $g = 1,45 \text{ g}$, $g' = 7,50 \text{ g}$

