7.- Un cilindro de paredes rígidas posee un émbolo que se considera sin masa. El volumen es V= 20 L, contiene vapor de agua, siendo su presión 10 kPa y su temperatura 120 ºC.

a) Dicho recipiente se enfría hasta una temperatura 30 ºC, determinar la masa de agua que aparece en forma líquida.

b) Si se actúa sobre el vapor disminuyendo su volumen a la mitad y al mismo tiempo se rebaja la temperatura a 90º C ¿cuál será la masa de agua condensada.

c) Si el vapor se enfría hasta una temperatura T sin variar el volumen, la mitad del agua que contenía el vapor en a) aparece en forma líquida. Calcular el valor de esa temperatura. .

Considerar que el vapor de agua se comporta como un gas perfecto.

Dato. La presión del vapor de agua a 90ºC es 70,2 kPa

Temperatura en ºC	***25***	***26***	***27***	***28***	***29***	***30***
Presión en kPa	***3,17***	***3,37***	***3,57***	***3,78***	***4,01***	***4,25***

a) Calculamos la masa de vapor de agua que existe en el cilindro

$$p.V = \frac{x}{M}RT \Rightarrow x = \frac{pVM}{RT} = \frac{10.10^3\,Pa \cdot 20{,}10^{-3}\,m^3 \cdot 18\frac{g}{mol}}{8{,}31\frac{J}{molK}\left(273+120\right)K} = 1{,}10\ g$$

Al enfriar, parte del agua pasa a la forma líquida y está en equilibrio con el vapor saturado. Calculamos los gramos de agua que están en el vapor

$$p.V = \frac{x'}{M}RT \Rightarrow x' = \frac{pVM}{RT} = \frac{4{,}25.10^3\,Pa \cdot 20.10^{-3}\,m^3 \cdot 18\frac{g}{mol}}{8{,}31\frac{J}{molK}\left(273+30\right)K} = 0{,}61\ g$$

Los gramos de agua que hay en la fase líquida son:

1,10-0,61= 0,49 g

b) El vapor de agua está saturado permanece en equilibrio con el agua líquida a una temperatura de 90ºC y ejerciendo una presión igual a la tensión del vapor a 90ºC

$$p.\frac{V}{2} = \frac{x''}{M}RT \Rightarrow x'' = \frac{70{,}2.10^3\ Pa \cdot 10.10^{-3}\,m^3 \cdot 18\frac{g}{mol}}{8{,}31\frac{J}{mol\ K}(273+90)K} = 0{,}42\ g$$

Los gramos de agua que hay en la fase líquida son:

1,10-0,42= 0,68 g

c) La ecuación de los gases perfectos conduce a

$$p.V = \frac{0{,}55}{M} R\,T \Rightarrow \frac{p}{T} = \frac{0{,}55R}{M\,V} = \frac{0{,}55 \cdot 8{,}31}{18 \cdot 20.10^{-3}} = 12{,}7\,\frac{Pa}{K}$$

Con los datos de la tabla del, enunciado hacemos los cocientes p/T.

Temperatura en ºC	25	26	27	28	29	30
Presión en kPa	3,17	3,37	3,57	3,78	4,01	4,25
p/T en Pa/K	10,6	11,3	11,9	12,6	13,3	14,0

La temperatura esta comprendida entre 28 y 29ºC .Hacemos una interpolación lineal entre esas temperaturas

$$\frac{13{,}3-12{,}6}{1^{o}\,C} = \frac{0{,}7}{1^{o}\,C} = \frac{0{,}1}{x} \Rightarrow x = 0{,}14$$

La temperatura es : 28+0,14=28,1 ºC

8.-**(473)**- Un recipiente de volumen 2 L contiene 2 gramos de H_2 y está saturado de vapor de agua y se encuentra a la temperatura T_1 y a la presión de 17.10^5 Pa. Se calienta el contenido del recipiente hasta una temperatura T_2, siendo entonces la presión 26.10^5 Pa. La presión del vapor de agua en función de la temperatura es:

T/K	273	393	406	425	453
P_V/ Pa	1.10^5	2.10^5	3.10^5	1.10^5	10.10^5

Estimar las temperaturas T_1 y T_2 y los gramos de vapor de agua en el recipiente a esas dos temperaturas.
Admitir que tanto el hidrógeno como el vapor de agua se comportan como gases perfectos. Masas atómicas H=1 , O =16

Olimpiadas de Moscú

Aplicamos la ley de los gases perfectos a la mezcla de hidrógeno y vapor de agua a las dos temperaturas

$$17.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \left(\frac{2}{2}+\frac{g}{18}\right)\cdot 8{,}31\cdot T_1 \Rightarrow \quad 3400 = \left(1+\frac{g}{18}\right)\cdot 8{,}31\cdot T_1 \qquad (1)$$

$$26.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \left(\frac{2}{2}+\frac{g'}{18}\right)\cdot 8{,}31\cdot T_2 \Rightarrow \quad 5200 = \left(1+\frac{g'}{18}\right)\cdot 8{,}31\cdot T_2 \qquad (2)$$

Aplicamos la ley de los gases perfectos al vapor de agua

$$p_v(T_1)\cdot 2.10^{-3} = \frac{g}{18}\cdot 8{,}31\cdot T_1 \qquad (3)$$

$$p_v(T_2)\cdot 2.10^{-3} = \frac{g'}{18}\cdot 8{,}31\cdot T_2 \qquad (4)$$

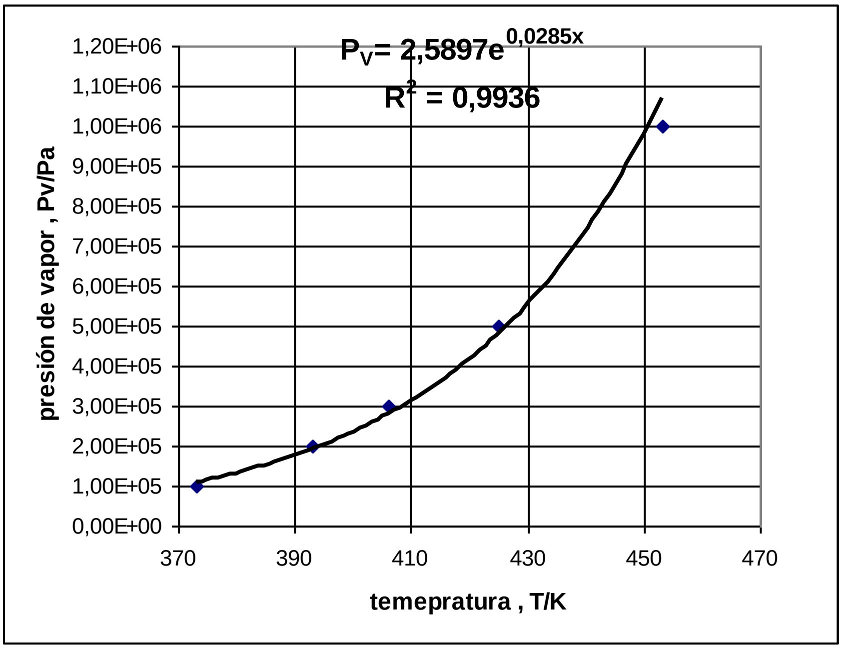
Con las cuatro ecuaciones anteriores no podemos resolverlas porque hay más incógnitas.

La forma de proceder es la siguiente. En la ecuación (3) le damos a T_1 un valor, con ese valor y la tabla de datos proporcionada determinamos la presión de vapor y aplicando la ecuación (3) determinamos g. este valor de g junto con T_1 lo llevamos al segundo miembro de la ecuación (1) y obtenemos un valor que puede o no coincidir con el primer miembro, si coincide hemos acertado con el valor de T_1 y g, si no coincide hay que volver a ensayar., El mismo procedimiento se repite con las ecuaciones (4) y (2).

Para orientarnos sobre el valor que pueda tener T_1, hacemos un cálculo suponiendo que todo es hidrógeno y no hay vapor de agua

$$17.10^5 \cdot 2.10^{-3} = 1 \cdot 8{,}31 \cdot T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = \frac{17.10^5 \cdot 2.10^{-3}}{8{,}31} = 409\,K$$

Para T_1 hemos de ensayar con valores inferiores a 409 K y para T_2 con valores superiores..
Este trabajo se puede hacer con una calculadora, pero lo hacemos de forma más rápida con una hoja de cálculo
Representamos la tabla de valores numéricos en una gráfica y ajustamos la curva con una ecuación



Después de realizar varios ensayos hacemos

T_1=379 K, $P_V = 2{,}5897 \cdot e^{0{,}0285\cdot 379} = 1{,}271.10^5\,Pa$

$$1{,}271.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \frac{g}{18} 8{,}31 \cdot 379 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{1{,}271.10^5 \cdot 2.10^{-3} \cdot 18}{8{,}31 \cdot 379} = 1{,}45\,g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3400 \approx \left(1 + \frac{1{,}45}{18}\right) \cdot 8{,}31 \cdot 379 = 3403$$

Si hacemos T_2= 442 K, $P_V = 2{,}5897 \cdot e^{0{,}0285\cdot 442} = 7{,}657.10^5\,Pa$

$$7{,}657.10^5 \cdot 2.10^{-3} = \frac{g'}{18} 8{,}31 \cdot 442 \quad \Rightarrow \quad g' = \frac{7{,}657.10^5 \cdot 2.10^{-3} \cdot 18}{8{,}31 \cdot 442} = 7{,}50\,g \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5200 \approx \left(1 + \frac{7{,}50}{18}\right) \cdot 8{,}31 \cdot 442 = 5203$$

Las soluciones del problema son: T_1 =379 K ; T_2= 442 K , g = 1,45 g , g´= 7,50 g

9.- *(523).-**En una vasija hermética que contiene agua flota un bloque de hielo de masa M = 100 g que lleva incrustado un perdigón de plomo de masa m= 5,0 g. Se pide la cantidad de calor que hay que suministrar al bloque para que el perdigón comience a hundirse***
Datos. Densidad del hielo 0,90 g/cm^3, densidad del plomo 11,3 g/cm^3, calor de fusión del hielo λ= 3,30.10^5 J/kg. La temperatura del agua en la vasija es de cero grados.
Olimpiadas de Moscú

Inicialmente el bloque flota porque la densidad del conjunto hielo y perdigón es menor que la densidad del agua a cero grados, pero si suministramos calor al conjunto el hielo comienza a fundirse y el conjunto de hielo perdigón aumenta su densidad .El hundimiento del perdigón comenzará cuando ese conjunto aumente su densidad y sea igual a la del agua.
Designamos con M_1 a la masa de hielo que junto a la del perdigón de su interior tiene una densidad igual a la del agua a cero grados.

$$\text{Volumen del hielo } V_H = \frac{M_1}{d_H} \quad ; \quad \text{volumen del perdigón } V_p = \frac{m}{d_{Pb}}$$

Densidad el conjunto que es igual a la del agua a cero grados

$$d_A = \frac{M_1 + m}{\frac{M_1}{d_H} + \frac{m}{d_{Pb}}} \Rightarrow \quad \frac{M_1}{d_H} d_A + \frac{m}{d_{Pb}} d_A = M_1 + m \quad \Rightarrow \quad M_1\left(\frac{d_A}{d_H} - 1\right) = m\left(1 - \frac{d_A}{d_{Pb}}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad M_1 = \frac{m\left(1 - \frac{d_A}{d_{Pb}}\right)}{\left(\frac{d_A}{d_H} - 1\right)} = \frac{5\left(1 - \frac{1,0}{11,3}\right)}{\left(\frac{1,0}{0,90} - 1\right)} = 41\text{g}$$

Masa de hielo fundido $\Delta M = M - M_1 = 100 - 41 = 59\,\text{g}$

Calor necesario para fundir la masa M_1 de hielo

$$Q = \lambda \cdot \Delta M = 3,30.10^5 \,\frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 59.10^{-3}\,\text{kg} = 1,95.10^4 \text{ J}$$

10.-(534).- Tres líquidos diferentes L_1, L_2 y L_3 se encuentra a las temperaturas de 30ºC , 20ºC y 10 ºC .respectivamente. Se mezclan masas iguales de los líquidos L_1 y L_2 resultando que la mezcla adquiere la temperatura de 26ºC. Si se mezclan masas iguales de los líquidos L_1 y L_3 la temperatura de equilibrio es 15ºC. Determinar la temperatura de equilibrio si se mezclan masas iguales de los líquidos L_2 y L_3.
Olimpiadas de India.

a) Añadido. ***Las densidades de los líquidos son respectivamente d_1=1,0 g/cm^3, d_2=1,2 g/cm^3 y d_3=1,5 g/cm^3. Determinar la temperatura de equilibrio si se mezclan volúmenes iguales de los tres líquidos.***

Designamos con c_1 , c_2 y c_3 los calores específicos de cada líquido. El calor cedido por uno será igual al calor ganado por el otro, al considerar cada mezcla como un sistema aislado. Recuérdese $Q = m \cdot c_e \cdot \Delta T$

Mezcla de L_1 y L_2

$$m c_1(30-26) = m c_2(26-20) \Rightarrow c_1 = \frac{6}{4}c_2 = \frac{3}{2}c_2$$

Mezcla de L_1 y L_3

$$m c_1(30-15) = m c_3(15-10) \Rightarrow c_1 = \frac{5}{15}c_3 = \frac{1}{3}c_3$$

Mezcla de L_2 y L_3

$$m c_2(20-t_E) = m c_3(t_E-10) \Rightarrow 20\, c_2 - c_2 t_E = c_3 t_E - 10 c_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20\frac{c_2}{c_3} - \frac{c_2}{c_3}t_E = t_E - 10 \Rightarrow 20\frac{\frac{2}{3}c_1}{3c_1} - \frac{\frac{2}{3}c_1}{3c_1}t_E = t_E - 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{40}{9} - \frac{2}{9}t_E = t_E - 10 \Rightarrow 40 - 2t_E = 9t_E - 90 \Rightarrow t_E = \frac{130}{11} = 11{,}8^\circ C$$

a) Al mezclar volúmenes iguales se cumple la relación :

$$\frac{m_1}{1{,}0} = \frac{m_2}{1{,}2} = \frac{m_3}{1{,}5} = V$$

Vamos a supone que la temperatura de equilibrio se alcanza por debajo de los 20ºC, entonces cederán calor los líquidos L_1 y L_2 por estar a mayor temperatura y la absorberá el líquido L_3 a temperatura inferior.

$$m_1 c_1 (30 - t_E) + m_2 c_2 (20 - t_E) = m_3 c_3 \ (t_E - 10) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}0V \cdot c_1 (30 - t_E) + 1{,}2V \cdot c_2 (20 - t_E) = 1{,}5V \cdot c_3 \ (t_E - 10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} c_3 (30 - t_E) + 1{,}2 \cdot \frac{2}{9} c_3 (20 - t_E) = 1{,},5 \ c_3 \ (t_E - 10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(30 - t_E) + 2{,}4(20 - t_E) = 13{,}5(t_E - 10) \ \Rightarrow \ 90 + 48 + 135 = t_E (3 + 2{,}4 + 13{,}5) \ \Rightarrow$$

$$t_E = 14{,}4^o C$$

11.-** (575.)-**Dos calorímetros idénticos de forma cilíndrica están aislados térmicamente, sus alturas son H= 75 cm y ambos están llenos hasta un tercio de esa altura. El primero con hielo que procede de la congelación de agua añadida en él. El segundo contiene agua a una temperatura de T_A= 10º C. Se vierte el agua de este segundo calorímetro sobre el hielo del primero e inicialmente la altura alcanzada es 2/3 de h. Transcurrido un tiempo se ha alcanzado el equilibrio térmico y se observa que el nivel del agua ha aumentado en 0,5 cm. Calcular la temperatura inicial del hielo del primer calorímetro.

Datos: calor específico del agua, c_A=4,2 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$,

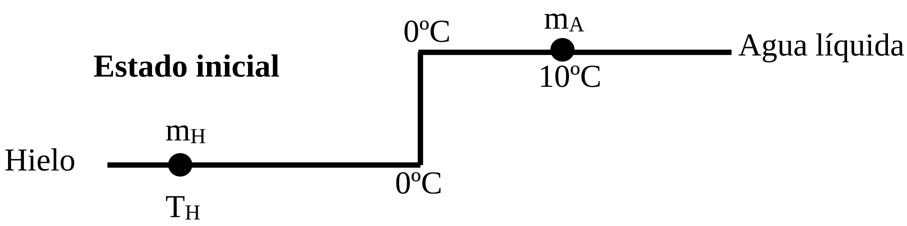
calor específico del hielo, c_H=2,1 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$

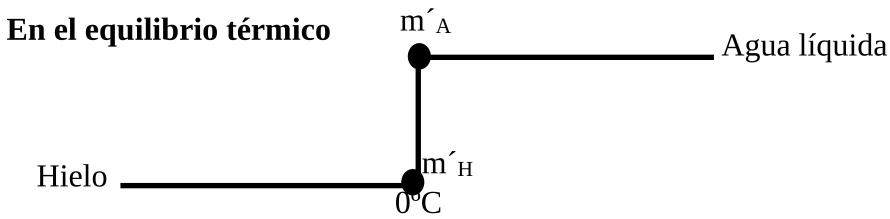
calor latente de fusión del hielo $\lambda = 340\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$

Relación entre las densidades del hielo y del agua, $\rho_H = 0{,}9\rho_A$

Olimpiadas de Moscú

Al poner en contacto agua líquida a 10 ºC con hielo a una temperatura inferior a 0 ºC se produce una transferencia de calor del agua líquida a mayor temperatura, al hielo a temperatura inferior, como consecuencia se produce la congelación de una cierta masa de agua líquida, hasta que se alcanza un nuevo equilibrio térmico a 0 ºC.





La razón del aumento del volumen es que la densidad del hielo es menor que la del agua y al pasar de una masa de agua líquida a hielo, el volumen aumenta.

Designamos con Δx a la masa de agua que se convierte en hielo y que provoca el aumento de nivel en 0,5 cm..

El proceso de congelación ocurre debido a que el agua líquida se enfría hasta cero grados cediendo calor, el agua al formar hielo desprende el calor de fusión y el hielo existente inicialmente se calienta desde la temperatura T_H hasta cero grados.

Calor recibido por el hielo

S designa al área de la base del calorímetro, La masa de hielo es

$$m_H = V_H \cdot \rho_H = S\frac{75}{3} \cdot \rho_H$$

El calor absorbido por el hielo entre su temperatura inicial T_H y 0 ºC intervalo de temperaturas en las que no sufre cambio de fase es.

$$Q_{H\to 0} = m_H c_H (T_F - T_i) = S\frac{75}{3}\rho_H c_H (0 - T_H)$$

Calor cedido por el agua al enfriarse desde 10ºC a cero grados centígrados, pero estando todavía como agua líquida a esta temperatura. Como no hay cambio de fase es.

$$Q_{A\to 0} = m_A c_A (T_F - T_i) = S\frac{75}{3}\rho_A c_A (0 - 10)$$

Calor cedido por la masa Δx de agua que se convierte en hielo. Hemos de tener en cuenta que ésta sufre un cambio de fase regresivo, con desprendimiento de calor.

$$Q_{A\to H} = m_{A\to H} \cdot L = -\Delta x \cdot L$$

Al estar los calorímetros aislados podemos considerarlos como un sistema adiabático, que no intercambia calor con el exterior. En consecuencia, la suma de todos los calores intercambiados es igual a cero.

$$Q_{H\to 0} + Q_{A\to 0} + Q_{A\to H} = 0$$

$$S\frac{75}{3}\rho_H c_H (0 - T_H) + S\frac{75}{3}\rho_A c_A (0 - 10) - \Delta x \cdot L = 0$$

$$S\frac{75}{3}\rho_H c_H (0 - T_H) = S\frac{75}{3}\rho_A c_A (10 - 0) + \Delta x\, L$$

Designamos con h la altura inicial que tenía la masa de agua Δx antes de congelarse y con h* la altura que tiene al congelarse:

$$h^* - h = 0{,}5 \text{ cm} \quad (1)$$

La masa de agua $\Delta x = S\, h\, \rho_A$

$$S\frac{75}{3}\rho_H c_H (0 - T_H) = S\frac{75}{3}\rho_A c_A (10 - 0) + S\, h\, \rho_A\, L \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{75}{3}\rho_H c_H (0 - T_H) = \frac{75}{3}\rho_A c_A (10 - 0) + h\, \rho_A\, L \quad (2)$$

Dado que la masa de agua que se congela es igual a la masa de hielo producido.

$$S h \rho_A = S h^* \rho_H \quad \Rightarrow \quad h\rho_A = h^* \rho_H \quad \Rightarrow \quad h\rho_A = h^* 0{,}9 \rho_A \quad \Rightarrow \quad h = h^* 0{,}9 \quad (3)$$

De las ecuaciones (1) y (3)

$$h = (0{,}5 + h)\cdot 0{,}9 \quad \Rightarrow h - 0{,}9h = 0{,}45 \quad \Rightarrow h = 4{,}5\,\text{cm}$$

Volviendo a la ecuación (2)

$$\frac{75}{3}\rho_H\, c_H (0 - T_H) = \frac{75}{3}\rho_A\, c_A (10 - 0) + 4{,}5\ \rho_A\ L \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{75}{3} 0{,}9\ \cdot \rho_A\ \cdot c_H (0 - T_H) = \frac{75}{3}\rho_A\ c_A (10 - 0) + 4{,}5\ \rho_A\ L \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{75}{3} 0{,}9 \cdot\ 2{,}1\ (0 - T_H) = \frac{75}{3}\ 4{,}2 (10 - 0) + 4{,}5\ \cdot 340 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 47{,}25 - 47{,}25 T_H = 1050 + 1530 \ \Rightarrow \quad T_H = -\frac{2580 - 47{,}25}{47{,}25} = -53{,}6^{\circ}$$

12.-** (597).-**Un recipiente a 0ºC contiene la tercera parte de su volumen de mercurio. Se calienta una cierta temperatura t, y entonces el mercurio ocupa el 37,47 % del volumen del vaso ¿Cuál es el valor de la mencionada temperatura?

Datos: Coeficiente de dilatación del mercurio $\alpha_{Hg} = 18{,}00.10^{-5}\ {}^{o}C^{-1}$

Coeficiente de dilatación del recipiente $k = 25{,}00.10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$

Propuesto en el libro: Problemas de Física .Volumen III . Termología.
E. Gullón de Senespleda . M. López Rodriguez.

Designamos con V_R^0 el volumen del recipiente a la temperatura de cero grados centígrados, con V_{Hg}^o, el volumen de mercurio que contiene la vasija a cero grados centígrados. Según el enunciado

$$V_{Hg}^0 = \frac{1}{3} V_R^0 \qquad (1)$$

Designamos con V_F^t el volumen de la vasija a t grados centígrados, con V_{Hg}^t el volumen de mercurio de la vasija a t grados centígrados. De acuerdo con el enunciado

$$V_{Hg}^t = \frac{34{,}37}{100} V_R^t \qquad (2)$$

Ahora escribimos las relaciones en volúmenes a dos temperaturas tanto para el recipiente como para el mercurio

$$V_R^t = V_R^0 (1 + k\,t) = V_R^0 (1 + 25{,}00.10^{-6}\,t) \quad (3) \quad ;\ V_{Hg}^t = V_{Hg}^0 (1 + \alpha\,t) = V_R^0 (1 + 18{,}00.10^{-5}\,t) \quad (4)$$

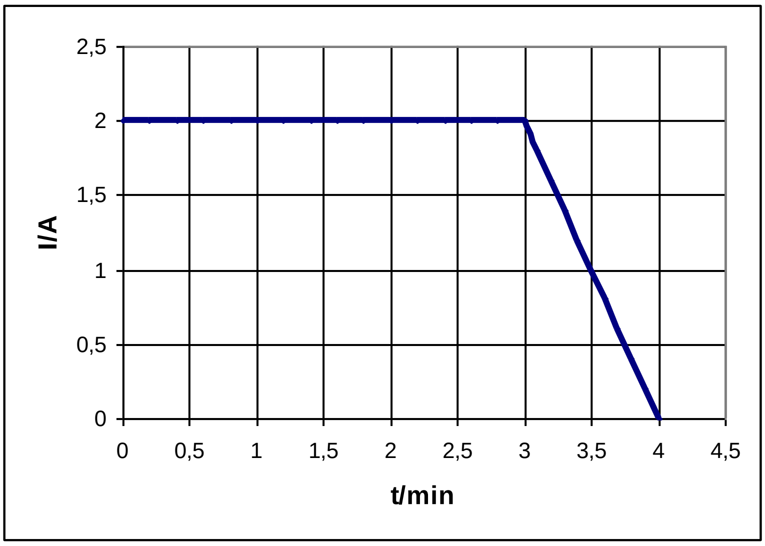
Dividimos (3) entre (4) y sustituimos (1) y (2)

$$\frac{V_R^t}{V_{Hg}^t} = \frac{V_R^0}{V_{Hg}^0} \cdot \frac{1 + 25{,}00.10^{-6}\,t}{1 + 18{,}00.10^{-5}\,t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\frac{100}{34{,}37} V_{Hg}^t}{V_{Hg}^t} = \frac{3 V_{Hg}^0}{V_{Hg}^0} \cdot \frac{1 + 25{,}00.10^{-6}\,t}{1 + 18{,}00.10^{-5}\,t} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{100}{34{,}37 \cdot 3} = \frac{1 + 25{,}00.10^{-6}\,t}{1 + 18{,}00.10^{-5}\,t} \quad \Rightarrow \quad 0{,}9698 = \frac{1 + 25{,}00.10^{-6}\,t}{1 + 18{,}00.10^{-5}\,t} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}9698 + 1{,}7456.10^{-4}\,t = 1 + 25{,}00.10^{-6}\,t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1 - 0{,}9698}{1{,}7456.10^{-4} - 25{,}00.10^{-6}} = 201{,}9\,{}^{o}C$$

13.- (658).- Una resistencia está sumergida en 200 gramos de agua cuya temperatura es 20,0ºC. En el instante cero se conecta a una fuente de corriente continua de 220V, con resistencia interna despreciable. La grafica inferior indica la variación de la intensidad con el tiempo.



Calcular al temperatura del agua a los cuatro minutos.
Suponer que la resistencia no varía al aumentar la temperatura y que el agua esta térmicamente aislada del ambiente.
Calor especifico del agua 4,18 J/g º

Universidad Nebraska-Linconl

Según el enunciado toda la energía suministrada por la batería se transfiere al agua

Valor de la resistencia $R = \frac{V}{I} = \frac{120}{2} = 60\,\Omega$

Energía transferida de t = 0 a t = 3 min

$$E_1 = I^2 R\,t = 2^2 \cdot 60 \cdot \cdot 3 \cdot 60 = 43200 \text{ J}$$

Energía transferida de t =3 a t = 4 min

Calculamos la ecuación de la recta pero teniendo en cuenta que el tiempo se mide en segundos. La ecuación de una recta es y= m x + n, en nuestro caso I = m t + n. Aplicamos esta ecuación en el tiempo t= 3 min= 180 s y en el tiempo t= 4 min= 240 s

$$2 = m180 + n \quad ; \quad 0 = m240 + n$$

Resolviendo

$$-2=(240-180)\,m \Rightarrow m=-\frac{1}{30} \quad \Rightarrow n=8$$

La energía transmitida en un intervalo de tiempo dt es

$$dE_2=I^2\,R\,dt=\left(-\frac{1}{30}t+8\right)60\cdot dt$$

La energía trasmitida entre t= 180 s y t = 240 s es:

$$E_2=\int_{180}^{240}\left(-\frac{1}{30}t+8\right)^2 R\,dt=\int_{180}^{240}\left(\frac{1}{900}t^2-\frac{8}{15}t+64\right)60\;dt=60\left|\frac{1}{900}\frac{t^3}{3}-\frac{8}{15}\frac{t^2}{2}+64\,t\right|_{180}^{240} \Rightarrow$$

$$E_2=\left|\frac{1}{45}t^3-16\,t^2+3840\cdot t\right|_{180}^{240}=\left(\frac{240^3}{45}-16\cdot 240^2+3840\;240\right)-\left(\frac{180^3}{45}-16\cdot 180^2+3840\;180\right)$$

$$E_2=4800\,J$$

La energía total suministrada al agua 43200+4800=48000J

$$48\,000=m\,c_e\Delta t \quad \Rightarrow \Delta t=\frac{48\,000}{200\cdot 4{,}18}=57{,}4^{o}$$

Temperatura final del agua t_F =20+57,4 = 77,4º

El problema se puede resolver atizando el valor del tiempo en minutos.

La ecuación de la recta comprendida entre 3 y 4 minutos es I = -2 t+8.

$$E_1=I^2\,R\,t=4A^2\cdot 60\Omega\cdot 3\min\;=720\,A^2\;\Omega\min\;=720\cdot 60=43200\,A\Omega\;s=43200\,J$$

$$E_2=\int_3^4(-2\,t+8)^2 R\,dt=\int_3^4\left(4\,t^2-32\,t+64\right)R\,dt=60\cdot\left|4\frac{t^3}{3}-16\,t^2+64\,t\right|_3^4=$$

$$E_2=60\left|(4\cdot\frac{4^3}{3}-16\cdot 4^2+64\cdot 4)-(4\cdot\frac{3^3}{3}-16\cdot 3^2+64\cdot 3)\right|=60\cdot(85{,}333....-84)$$

$$E_2=60\cdot 1{,}333...=80\,A\,\Omega\min\;=80\cdot A\,\Omega\,60\,s=4800\,J$$

14.-** (659.)-**Una moneda de masa m_M=10 g y densidad d_M= 8000 kg/m^3 está incrustada en un bloque de hielo. La temperatura del hielo y la moneda es 0ºC. La masa del l bloque de hielo sin la menda es 130 g. El bloque de hielo se introduce en un recipiente que contiene 400 gramos de agua a la temperatura T.¿Cuál es la temperatura T del agua si el conjunto bloque de hielo moneda comienza a sumergirse justamente cuando se alcanza el equilibrio térmico? Suponer que no hay intercambio de calor con el medio.

Datos.- Calor específico del agua c_e=4300 J/kg ºC , Calor latente de fusión del hielo λ= 330 kJ/kg, densidad del hielo d_H = 900 kg/ m^3 , densidad del agua d_A = 1000 kg/m^3

Olimpiadas de Física Estonia

Utilizamos la siguiente nomenclatura en el esquema del proceso: H = hielo, M = moneda , V_{HI} = volumen inicial del bloque de hielo, V_{HF} = volumen final del bloque de hielo, V_{HD} = volumen de hielo que pasa al estado líquido cuando se alcanza el equilibrio térmico, V_M= volumen d la moneda

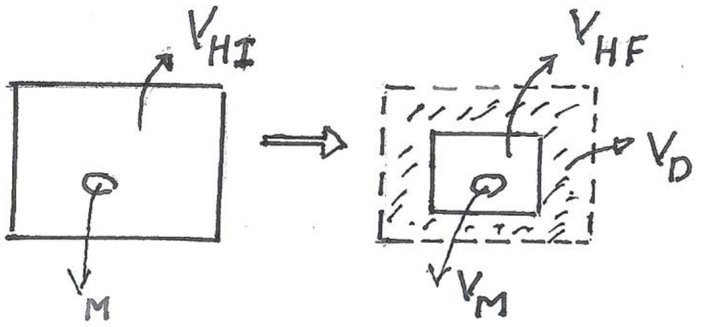


Fig. 1

El volumen de hielo que se funde vale $V_D = V_{HI} - V_{HF}$. El hielo al fundirse absorbe calor que es proporcionado por el agua que se enfriará desde T a 0ºC.
El calor ganado por el hielo para fundirse es igual al cedido por el agua

$$V_D \cdot d_H \cdot \lambda = m_A c_e \,\Delta T \;\Rightarrow\; \left(V_{HI} - V_{HF}\right) d_H\, \lambda = m_A\, c_e\, \Delta T \qquad (1)$$

Cuando se alcance el equilibrio térmico el peso de la moneda más el peso del V_{HF} es igual al empuje del agua

$$m_M\, g + V_{HF}\, d_H\, g = (V_{HF} + V_M)\, d_A g \;\Rightarrow\; m_M + V_{HF}\, d_H = (V_{HF} + V_M)\, d_A \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_M + V_{HF}\, d_H = V_{HF} d_A + V_M d_A \;\Rightarrow\; V_{HF} = \frac{m_M - V_M d_A}{d_A - d_H} = \frac{m_M - \dfrac{m_M}{d_M} d_A}{d_A - d_H} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{HF} = \frac{m_M\left(1 - \dfrac{d_A}{d_M}\right)}{d_A - d_H} = \frac{10.10^{-3}\left(1 - \dfrac{1000}{8000}\right)}{1000 - 900} = 8{,}75.10^{-5}\, m^3$$

Volvemos a la ecuación (1)

$$\left(\frac{m_{HI}}{d_H} - 8,75.10^{-5}\right)900 \cdot 330 = 400.10^{-3} \cdot 4,3.\Delta T \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{130.10^{-3}}{900} - 8,75.10^{-}\right)9 \cdot 330 = 17,2.10^{-3} \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{\left(\frac{130.10^{-3}}{900} - 8,75.10^{-}\right)9 \cdot 330}{17,2.10^{-3}} = ,9,8^{o}\,C$$

La temperatura inicial del agua T = 9,8 º C

***15.** (661.)- Una barra recta de sección A = 2 cm² une un depósito a la temperatura de 100ºC con un depósito de hielo a 0ºC. La barra consta de dos partes, una de cobre de longitud L_1= 30 cm la otra de acero de longitud L_2=20 cm. La superficie lateral de la barra está aislada térmicamente y el acero está en contacto con el hielo a) ¿Cuál es es la temperatura en la unión de los dos metales? b) Cuánto hielo se funde por minuto? c) Gráfica de la temperatura a lo largo de la barra en el estado estacionario*

***Datos.- Conductibilidades caloríficas:** K_{Fe}= 0,125 cal/s · cm·º C ;*

K_{Cu}= 0,92 cal/s · cm·º C ; Calor de fusión del hielo 79,7 cal/g

Propuesto en el libro Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas. Ingard y Kraushaar . Editorial Reverté

a) Utilizamos la ecuación $q = -KA\dfrac{\Delta T}{\Delta x}$. Unidades de $q = \dfrac{cal}{s\cdot cm\cdot {}^oC}\cdot cm^2\cdot\dfrac{{}^oC}{cm} = \dfrac{cal}{s}$

Designamos con Ti la temperatura de la unión cuando se ha llegado al estado estacionario en que las temperaturas de la barra no cambian con el transcurso del tiempo.

Para el cobre $q_{Cu} = -K_{Cu}A\dfrac{T_i - 100}{L_1}$; Para el acero $q_{Fe} = -K_{Fe}A\dfrac{0 \ - T_i}{L_2}$

En el equilibrio térmico

$$q_{Cu} = q_{Fe} \ \Rightarrow -K_{Cu}A\frac{T_i - 100}{L_1} = -K_{Fe}A\frac{0 - T_i}{L_2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (K_{Cu}T_i - 100K_{Cu})L_2 = \ -K_{Fe}T_iL_1 \ \Rightarrow \ T_i\,(K_{Cu}L_2 + K_{Fe}L_1) = 100\ K_{Cu}L_2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ T_i = \frac{100\ K_{Cu}L_2}{K_{Cu}L_2 + K_{Fe}L_1} = \frac{100\cdot 0{,}92\cdot 20}{0{,}92\cdot 20 + 0{,}125\cdot 30} = 83^o C$$

b) El flujo de calor que llega al hielo

$$q_{Fe} = 0{,}125\cdot 2\cdot\frac{83}{20} = 1{,}0375\frac{cal}{s} = 62{,}25\frac{cal}{min} \ \Rightarrow 62{,}25\ \frac{cal}{min} = m\cdot 79{,}7\frac{cal}{g} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ m = \frac{62{,}25}{79{,}7} = 0{,}78\frac{g}{min}$$

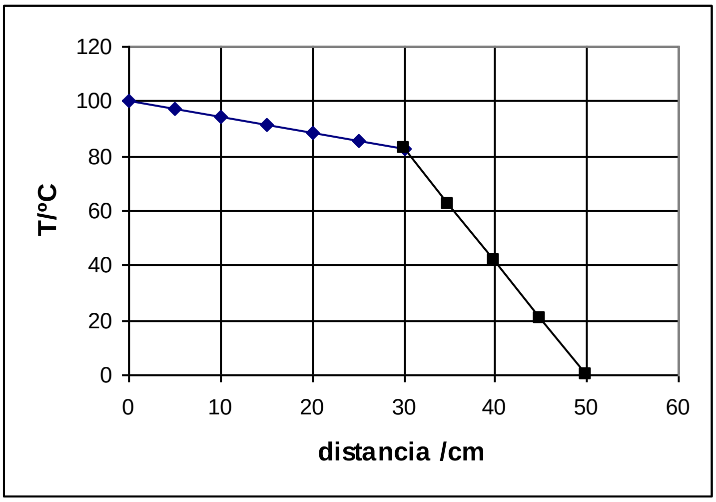
c) Para el cobre, Designamos con x a la variable distancia, siendo x= 0 al principio del cobre y x= 30 cm en la unión con el acero

$$1{,}0375 = -0{,}92\cdot 2\cdot\frac{T_x - 100}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{1{,}0375\ x}{0{,}92\cdot 2} = 100 - T_x \quad\Rightarrow\quad T_x = 100 - \frac{1{,}0375}{0{,}92\cdot 2}x$$

Para el acero. La variable x' toma el valor x'=0 en la unión y x'= 20 cm al final del acero.

$$1{,}0375 = -0{,}125\cdot 2\cdot\frac{T_{x'} - 83}{x'} \quad\Rightarrow\quad 4{,}15\,x' = 83 - T_{x'} \quad\Rightarrow\quad T_{x_i} = 83 - 4{,}15\,x'$$

La representación gráfica sobre el eje de abscisas es la distancia que es d = x+ (x'+30)



16 .-**(662).- **Un tubo cilíndrico largo de hierro tiene un radio interior R_1 y un radio exterior R_2. La temperatura del tubo interior es T_1 y la del tubo exterior T_2, siendo $T_1>T_2$. La conductividad térmica del material es K.
a) Calcular el flujo medio a través del cilindro , por unidad de longitud.
b) Determinar la distribución radial de la temperatura
c) Construir la gráfica temperatura frente a r , siendo $R_1 \le r \le R_2$.
Los valores de R_1 y R_2 son respectivamente 5,0 cm y 15,0 cm, el valor de K =0,125 cal/ s·cm· ºC; T_1=80ºC ; T_2=10ºC

a) Consideramos una superficie cilíndrica de radio r comprendida entre R_1 y R_2. El gradiente de temperatura en ese lugar es $\frac{dT}{dr}$, el flujo calorífico a través de la superficie cilíndrica por unidad de longitud es

$$q=-KA\frac{dT}{dr}=-K\,2\pi r h\frac{dT}{dr}\quad \text{como } h=1 \;\Rightarrow\; q=-K\,2\pi r\frac{dT}{dr} \quad (1)$$

Establecido el régimen permanente q es independiente de r

$$q\frac{dr}{r}=-2\pi K dT \;\Rightarrow\; g\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=-2\pi K\int_{T_1}^{T_2}dT \;\Rightarrow g\ln\frac{R_2}{R_1}=-2\pi k(T_2-T_1) \;\Rightarrow$$

,

$$\Rightarrow\; g=\frac{2\pi K(T_1-T_2)}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \quad (2)$$

b) Sustituimos (2) en (1)

$$\frac{2\pi K(T_1-T_2)}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=-K\,2\pi r\frac{dT}{dr} \;\Rightarrow\; \frac{dr}{r}=-\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{T_1-T_2}dT \;\Rightarrow\; \int_{R_1}^{r}\frac{dr}{r}=-\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{T_1-T_2}\int_{T_1}^{T}dT \;\Rightarrow$$

$$\ln\frac{r}{R_1}=-\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{T_1-T_2}(T-T_1)=\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{T_1-T_2}(T_1-T) \;\Rightarrow\; (T_1-T_2)\frac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=T_1-T \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; T=T_1-(T_1-T_2)\frac{\ln\frac{r}{R_1}}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \quad (3)$$

c) Sustituimos los valores numéricos en (3)

$$T = 80 - 70\,\frac{\ln \frac{r}{5}}{\ln 3}$$

Se dan valores a la variable r, desde r = 5 cm hasta r = 15 cm