

**PROBLEMAS DE**

**LAS OLIMPIADAS**

**INTERNACIONALES**

**DE FÍSICA**

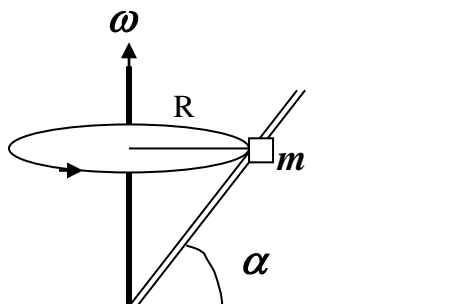
**José Luis Hernández Pérez**

**Agustín Lozano Pradillo**

Madrid 2008

8ª OLIMPIADA DE FÍSICA. REPÚBLICA DEMOCRÁTICA ALEMANA . 1975

1.-Una varilla da vueltas en torno de un eje vertical con una velocidad angular constante  $\omega$ . En su giro, la varilla forma un ángulo constante con la dirección horizontal de  $\alpha$  grados, tal como indica la figura inferior.



Una pequeña masa  $m$  puede deslizarse a lo largo de la varilla siendo el coeficiente de rozamiento  $\mu$  ¿Cuál es la condición para que la masa  $m$  se mantenga a una altura fija sobre el suelo durante la rotación de la varilla?

8ª Olimpiada Internacional de Física. República Democrática Alemana - 1975

Las fuerzas que actúan sobre la masa  $m$ , analizadas desde un sistema no inercial ligado a la propia varilla son las indicadas en la figura 1

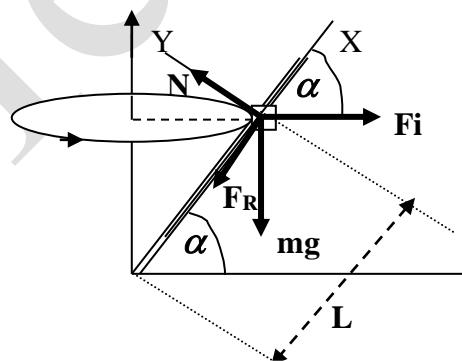


Fig. 1

El sistema de referencia  $XY$  se halla ligado a la propia varilla.  $F_i$  es la fuerza de inercia de sentido contrario a la aceleración de la varilla y que aparece debido a que el análisis del problema se hace desde un sistema no inercial.

1) Supongamos que la masa  $m$  puede moverse en sentido ascendente por la varilla. La fuerza de rozamiento,  $F_R$ , actúa hacia abajo.

Si la masa  $m$  está en equilibrio respecto de la varilla, también lo está respecto del sistema  $XY$  y por tanto la suma de las fuerzas debe ser cero.

$$\left. \begin{array}{l} F_i \cos \alpha - \mu N - mg \sin \alpha = 0 \\ N - F_i \sin \alpha - mg \cos \alpha = 0 \end{array} \right\} F_i \cos \alpha - \mu (mg \cos \alpha + F_i \sin \alpha) - mg \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

La fuerza de inercia que actúa sobre la masa es igual a  $m \cdot \text{aceleración de la varilla}$ , siendo la aceleración de la varilla la aceleración centrípeta, de valor

$$\omega^2 \cdot \text{radio} = \omega^2 \cdot L \cos \alpha$$

llevando esta relación a (1)

$$m \omega^2 L \cos \alpha - \mu (mg \cos \alpha + m \omega^2 L \cos \alpha \sin \alpha) - mg \sin \alpha = 0$$

Llamamos a la solución de la ecuación anterior  $L = L_1$

$$L_1 = \frac{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m \omega^2 \cos \alpha + \mu m \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} * \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{1 + \mu \sin \alpha}$$

2) Si para la posición indicada en la figura 1 la fuerza de rozamiento tuviese sentido contrario al dibujado, lo cual significa que la masa  $m$  tiende a deslizarse hacia abajo de la varilla, el desarrollo matemático es similar salvo un cambio de signo y el resultado final es;

$$L_2 = \frac{g}{\omega^2 \cos \alpha} \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{1 + \mu \sin \alpha}$$

Los valores de  $L$  comprendidos entre  $L_1$  y  $L_2$ , siendo  $L_1 > L_2$ , son aquellos para los que la masa  $m$  permanece en posición fija sobre la varilla.

**2.-Buscar las condiciones para las que una lente gruesa tiene la misma distancia focal para dos longitudes de onda diferentes. Discutir el problema con los distintos tipos de lentes.**

**8ª Olimpiada Internacional de Física. República Democrática Alemana – 1975**

Debemos deducir en primer lugar cuál es la distancia focal de una lente gruesa en función del índice de refracción de la lente,  $n$ , del espesor,  $d$ , y de los radios de curvatura  $R_1$  y  $R_2$ .

Analizamos en primer lugar la refracción de la luz en una superficie curva que separa el aire ( $n=1$ ) de un material de índice de refracción  $n$  (figura 1). Los razonamientos solamente son válidos en la zona paraxial.

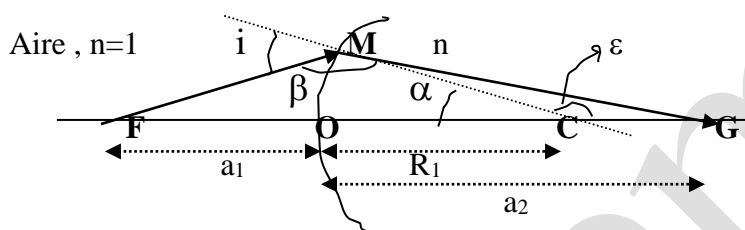


Fig. 1

$OC =$  Radio de la superficie de separación  $= R_1$ ,  $i =$  ángulo de incidencia,  $r =$  ángulo de refracción,  $OF = a_1$ ,  $OG = a_2$ ,  $\text{sen } i = \text{sen } \beta$ ,  $\text{sen } \alpha = \text{sen } \varepsilon$

Las distancias se toman desde la superficie curva, y hacia la izquierda son negativas y hacia la derecha positivas

$$\left. \begin{array}{l} \text{En el triángulo FMC} \quad \frac{\text{sen } i}{-a_1 + R_1} = \frac{\text{sen } \alpha}{MF} \\ \text{En el triángulo CMG} \quad \frac{\text{sen } \varepsilon}{MG} = \frac{\text{sen } \alpha}{a_2 - R_1} \end{array} \right\} \frac{\text{sen } i * MF}{-a_1 + R_1} = \frac{\text{sen } r * MG}{a_2 - R_1}$$

Teniendo en cuenta la ley de Snell:  $1 \text{ sen } i = n \text{ sen } r$  y que al estar en la zona paraxial podemos escribir que  $MF = -a_1$  y  $MG = a_2$ , resulta

$$\frac{-na_1}{-a_1 + R_1} = \frac{a_2}{a_2 - R_1} \quad (1)$$

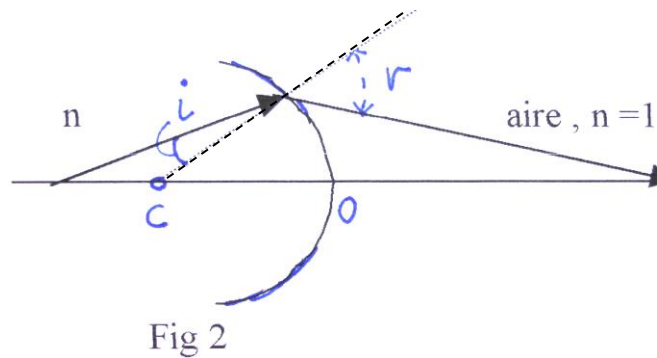
si  $a_1 = \infty$  ;  $a_2 = f_1^i$  siendo  $f_1^i$  la distancia focal imagen

.De la expresión (1) 
$$f_1^i = \frac{nR_1}{n-1} \quad (2)$$

si  $a_2 = \infty$  ,  $a_1 = f_1^o$  siendo  $f_1^o$  la distancia focal objeto

De la expresión (1) resulta:  $f_1^o = -\frac{R_1}{n-1}$  (3)

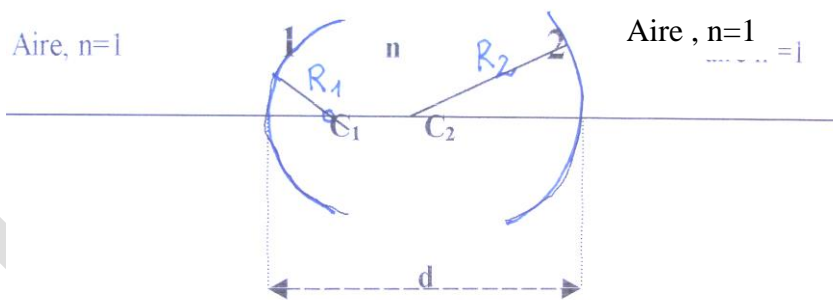
Si ahora suponemos que vamos del medio de índice de refracción  $n$  al aire a través de una superficie curva como la de la figura 2.  $R_2$  designa al radio de esa superficie



Haciendo el mismo razonamiento que anteriormente se llega a:

$$f_2^i = -\frac{R_2}{n-1} \quad (4) \quad f_2^o = \frac{nR_2}{n-1} \quad (5)$$

Una lente biconvexa gruesa que está en el aire está formada por dos superficies esféricas tal como indica la figura 3.



Vamos a hallar la distancia focal de la lente gruesa para ello hacemos uso de que los planos principales objeto e imagen son para cada superficie uno solo y que en la figura 4 aparecen representados mediante líneas rectas.

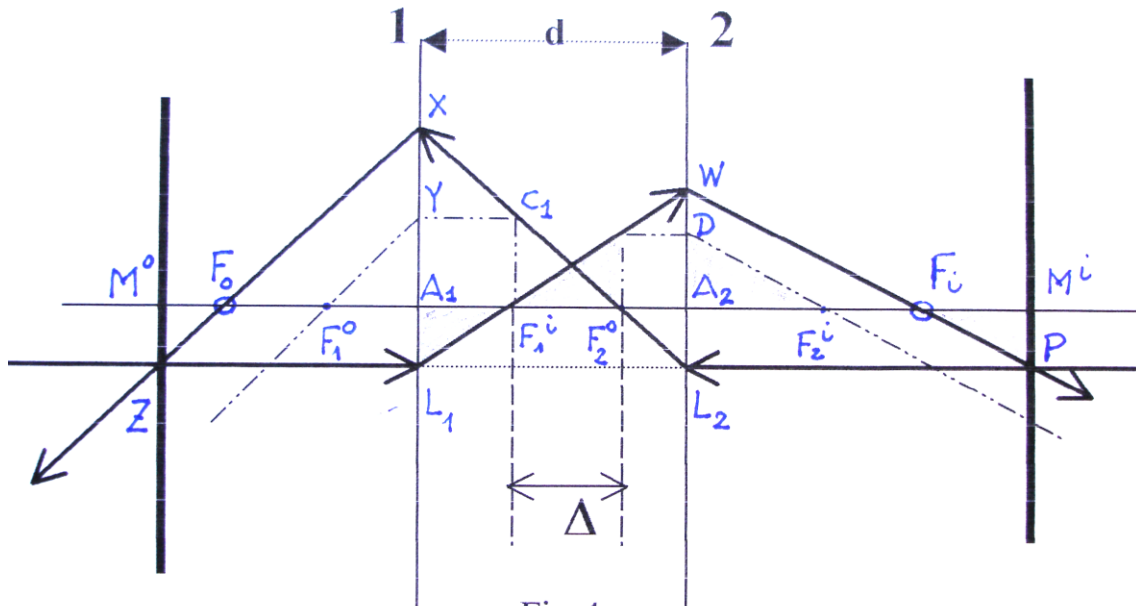


Fig 4

$\Delta = d - f_1^i + f_2^o$  ;  $A_1F_1^o = f_1^o$ , distancia focal objeto del sistema 1

$A_1F_1^i = f_1^i$ , distancia focal imagen del sistema 1,  $A_2F_2^o = f_2^o$ , distancia focal objeto del sistema 2 ;  $A_2F_2^i = f_2^i$ , distancia focal imagen del sistema 2

$M^oF_o = F^o$ , distancia focal objeto de la lente gruesa       $M^iF_i = F^i$ , distancia focal imagen de la lente gruesa

El rayo  $PL_2$  llega al sistema 2 y pasa por el foco  $F_2^o$  del sistema 2 y llega al plano principal del sistema 1 en el punto X. El punto  $C_1$  pertenece al plano focal imagen del sistema 1, si de él sale un rayo paralelo al eje atraviesa el sistema 1 pasando por  $F_1^o$ . El rayo  $C_1X$  que es el mismo que  $L_2X$  procede de  $C_1$  y ha de salir paralelo al  $YF_1^o$  ya que ambos proceden del mismo punto  $C_1$  que está en el plano principal imagen del sistema 1.

El rayo  $ZL_1$  paralelo al eje principal atraviesa el sistema 1 pasando por el foco  $F_1^i$  y llega al plano principal del sistema 2 en el punto W. El rayo  $C_2D$  procede del plano principal del sistema 2 y lo atraviesa pasando por el foco  $F_2^i$ , el rayo  $C_2W$  que es el mismo que  $L_1W$  atraviesa el sistema 2 y sale paralelo al  $DF_2^i$  puesto que ambos proceden de  $C_2$  que es un punto del plano principal objeto del sistema 2.

El punto  $F_o$  es el foco objeto de la lente gruesa y  $F_i$  es el foco imagen de la misma lente. Los planos principales son  $M^oZ$  y  $M^iP$ , dibujados en la figura con trazo más grueso.

Al comparar los triángulos  $A_1L_1F_1^i$  y  $F_1^iF_2^oC_2$  resulta:  $\frac{-A_1L_1}{f_1^i} = \frac{F_2^oC_2}{\Delta}$

Al comparar los triángulos  $A_2DF_2^i$  y  $F_iM^iP$  resulta:

$$\frac{A_2 D = F_2^o C_2}{f_2^i} = \frac{-M^i P = -A_1 L_1}{-F_i} \quad (7)$$

A partir de las ecuaciones (6) y (7) resulta  $\frac{1}{F_i} = -\frac{\Delta}{f_1^i f_2^i}$  (8)

Si en la ecuación (8) sustituimos los valores de las distancias focales por (2) y (4) y el valor  $\Delta = d - f_1^i + f_2^o$  y a su vez las distancias focales por (2) y (5) resulta:

$$\frac{1}{F_i} = -\frac{d - \frac{nR_1}{n-1} + \frac{nR_2}{n-1}}{\frac{nR_1}{n-1} * \left(-\frac{R_2}{n-1}\right)} \Rightarrow \frac{1}{F_i} = (n-1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n} \frac{d}{R_1 R_2} \right] \quad (9)$$

La expresión (9) corresponde a la distancia focal imagen de una lente gruesa de espesor  $d$ . Cuando la lente es delgada  $d = 0$ .

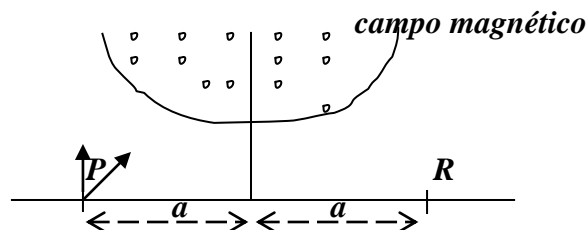
La lente tiene un índice de refracción que es función de la longitud de onda que la atraviese. Llamamos  $n_a$  y  $n_b$  los índices de refracción de la lente para dos longitudes de onda diferentes y aplicamos la condición del problema que establece que las distancias focales sean iguales

$$\begin{aligned} (n_a - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{n_a - 1}{n_a} \frac{d}{R_1 R_2} \right] &= (n_b - 1) \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{n_b - 1}{n_b} \frac{d}{R_1 R_2} \right] \\ \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] (n_a - 1 - n_b + 1) &= \frac{d}{R_1 R_2} \left[ \frac{(n_a - 1)^2}{n_a} - \frac{(n_b - 1)^2}{n_b} \right] \\ (R_2 - R_1)(n_a - n_b) &= d \left[ \frac{(n_a - 1)^2}{n_a} - \frac{(n_b - 1)^2}{n_b} \right] \Rightarrow R_1 - R_2 = d \left( 1 - \frac{1}{n_a n_b} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

El segundo término de la ecuación (10) es positivo

- Cualquier lente que tenga una cara plana no puede cumplir la ecuación (10) ya que uno de los radios es infinito
- En una lente biconvexa  $R_1$  es positivo y  $R_2$  negativo, su suma es positiva y puede cumplir la ecuación (10)
- En una lente bicóncava  $R_1$  es negativo y  $R_2$  positivo, luego no puede cumplir la ecuación (10)
- En una lente convexo-cóncava,  $R_1$  es positivo y  $R_2$  es positiva, si en valores absolutos  $R_1 > R_2$  el resultado es positivo y puede cumplir la ecuación (10)

3.- Desde un punto  $P$  sale un haz de iones, todos con la misma masa y carga y con la misma velocidad  $v$  en todas las direcciones (ver figura inferior) Un campo magnético  $B$  uniforme y perpendicular al plano del papel, los debe juntar en el punto  $PR = 2a$ . Sus trayectorias deben ser simétricas con relación al eje. Determinar los límites del campo magnético



8ª Olimpiada Internacional de Física. República Democrática Alemana. 1975

Si una partícula de carga  $q$  penetra en dirección perpendicular a un campo magnético uniforme con una velocidad  $v$  sufre una fuerza magnética  $F = qvB$ , que es precisamente la fuerza centrípeta que necesita la partícula para describir una circunferencia

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

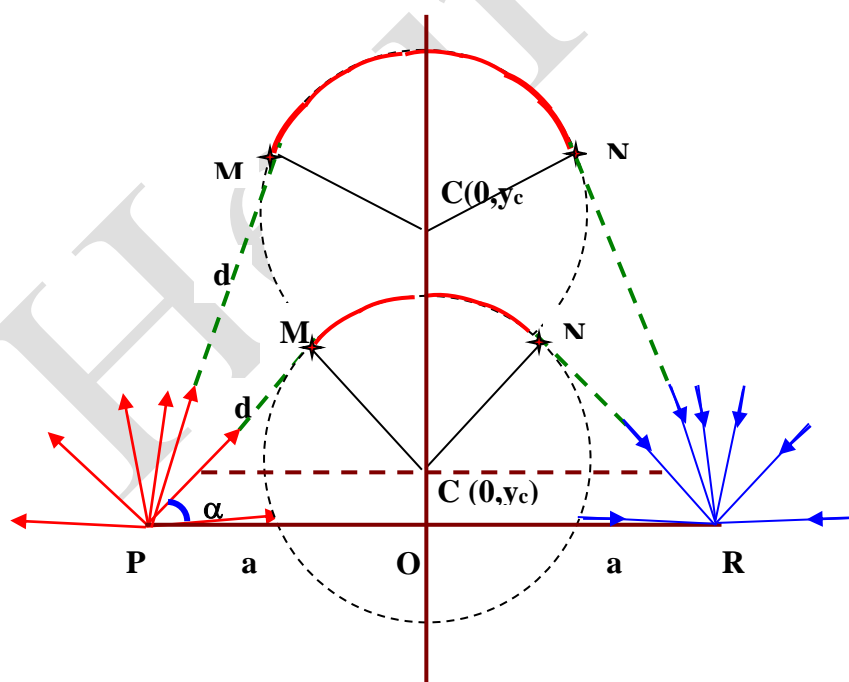


Fig.1

De la expresión (1) se deduce que al ser todos los términos iguales para los iones el valor del radio de la circunferencia es constante. En la figura 1 se observa que un ión abandona  $P$  formando su velocidad  $v$  un ángulo  $\alpha$  con el eje horizontal, llega al campo en el punto  $M$ , dentro de él describe un arco de circunferencia, luego abandona el campo magnético y se dirige al punto  $R$ .



Con estas condiciones el punto P puede encontrarse dentro del campo B o fuera de él, la dirección del haz de iones puede tener una dirección dada por el ángulo  $\alpha$  cuyo valor puede variar desde  $0^\circ$  hasta  $180^\circ$ . El radio de la circunferencia, como se ha visto depende de la velocidad  $v$  y del campo B, además de su carga y masa. Con todos estos condicionantes se puede hacer un razonamiento como el que sigue para tratar el problema propuesto:

Tomando como sistema de referencia la recta PR como eje OX y la mediatriz de PR como eje OY, el centro C de la circunferencia se encontrará en el eje OY y puede estar por arriba o por debajo de O, según sea la dirección del haz. Supongamos que P es exterior al campo B. La figura es simétrica respecto de OY.

La recta NR es tangente a la circunferencia descrita por el ión en el punto N de coordenadas  $(x,y)$ . El punto C es el centro de la circunferencia y sus coordenadas son  $(0, y_c)$ . La ecuación de dicha circunferencia es:

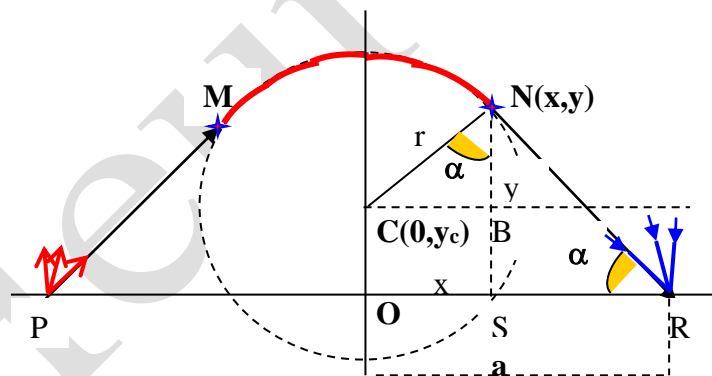
$$x^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \quad (2)$$

En el triángulo CNB (fig.2)

$$\cos\alpha = \frac{y - y_c}{r} \quad (3)$$

En el triángulo NSR (fig.2)

$$\cos\alpha = \frac{a - x}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}} \quad (4)$$



De (3) y (4) resulta:

Fig 2.

$$y - y_c = r \frac{a - x}{\sqrt{y^2 + (a - x)^2}} \text{ y esta expresión se sustituye en la ecuación (2)}$$

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{r^2(a-x)^2}{y^2 + (a-x)^2} &= r^2 \Rightarrow \frac{r^2(a-x)^2}{y^2 + (a-x)^2} = r^2 - x^2 \Rightarrow \frac{y^2}{r^2(a-x)^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{r^2 - x^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{y^2}{r^2(a-x)^2} &= \frac{1}{r^2 - x^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{r^2 - r^2 + x^2}{r^2(r^2 - x^2)} \Rightarrow y^2 = \frac{r^2(a-x)^2 x^2}{r^2(r^2 - x^2)} \Rightarrow y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Como se ve en estas expresiones la forma del perímetro del campo depende de  $a$  y de  $R$ . Se trata de una función que admite tratamiento por tanteos como el que sigue:

Si  $a < R$ , podemos suponer que  $a = 6$  y  $R = 5$  utilizando la hoja de cálculo podemos ver la forma del campo, fig 3. Si  $a = 6$   $R = 6$ , fig 4.

