Condensadores. Parte VII

SOLUCIONARIO

Tabla 1

Tiempo/s	I_1/µA	I_2/µA	I_3/µA
0	135.3	126,7	5,2
15	119,8	98,0	21,6
30	106,8	72,7	34,1
45	97,8	54,1	43,2
60	91,0	41,5	50,1
75	85,9	36,9	55,2
90	81,9	23,5	58,9
105	79,1	17,4	61,8
120	77,0	13,0	63,9
135	75,4	10,0	65,6
150	74,1	7,5	66,8
165	73,3	5,7	67,7
180	72,6	4,4	68,4
1º95	72,1	3,3	68,9
210	71,7	2,5	69,3
225	71,4	1,9	69,6
240	71,2	1,5	69,8
255	71,0	1,2	69,9
270	70,9	0,9	70,1
285	70,8	0,7	70,2
300	70,7	0,6	70,2
315	70,7	0,5	70,3
330	70,6	0,4	70,3
345	70,6	0,3	70,4
360	70,5	0,2	70,4
375	70,5	0,2	70,4
390	70,5	0,2	70,5

Con los datos de la tabla 1 y en la misma gráfica se representan las intensidades en el eje de ordenadas frente a los tiempos en el de abscisas.

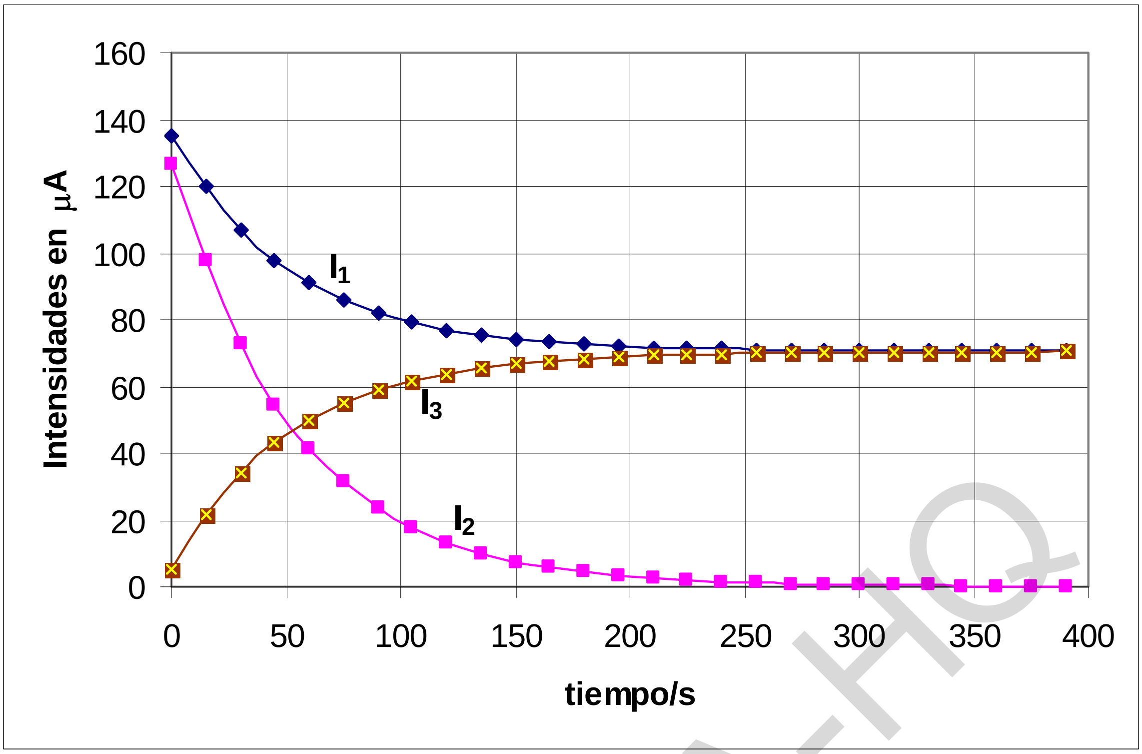
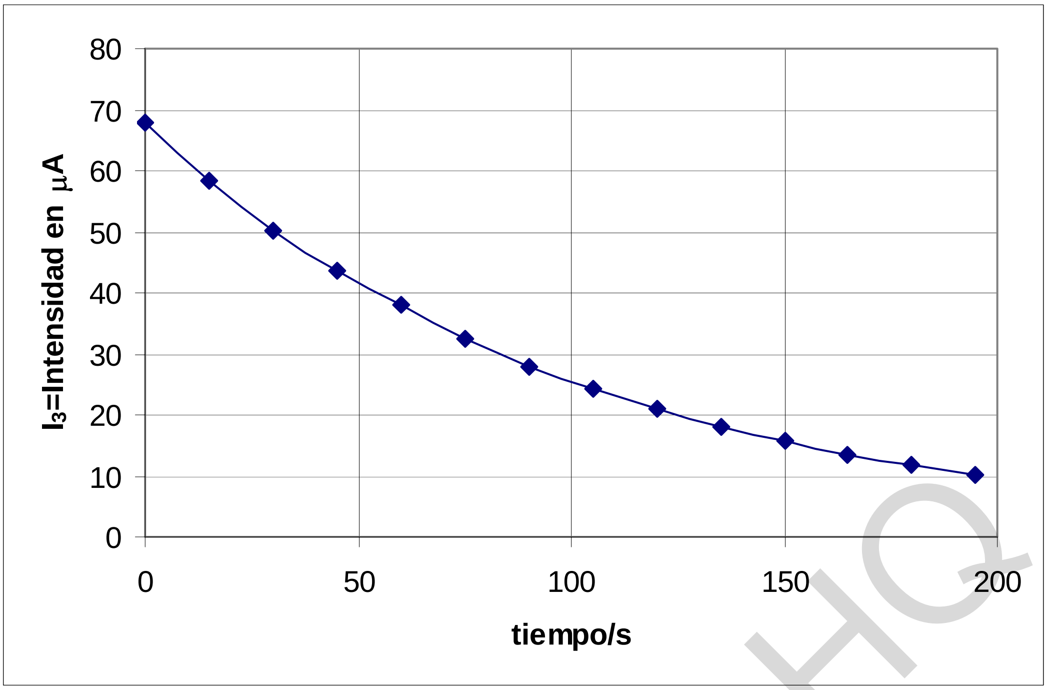


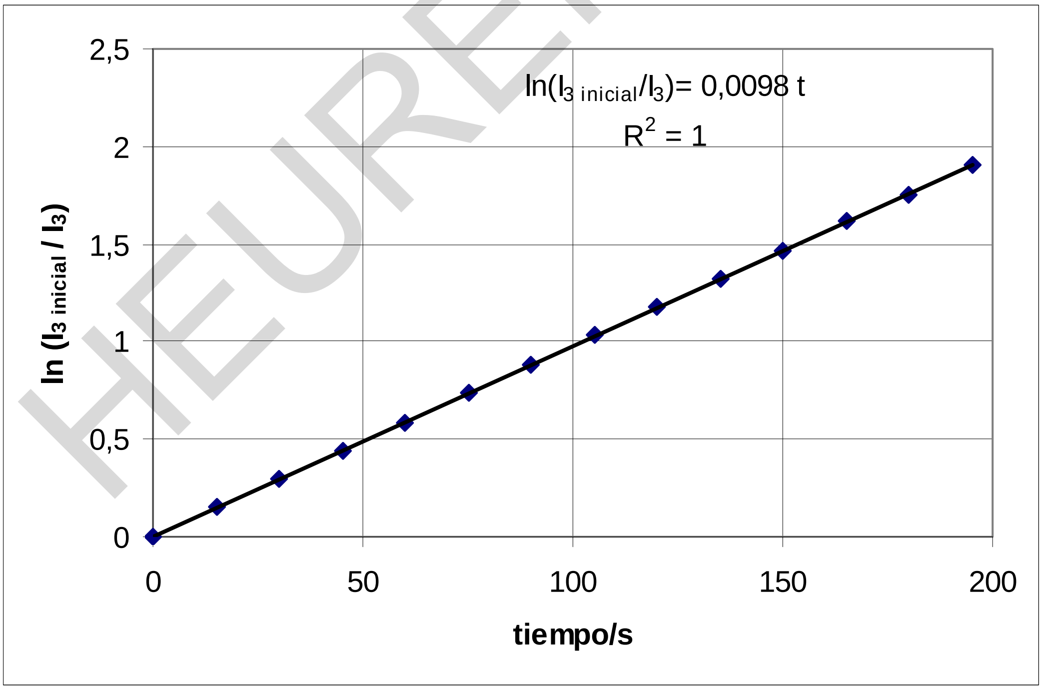
Tabla 2

Tiempo/s	$I_3/\mu A$	$\ln(I_{3inicial}/I_3)$
0	67,8	0
15	58,3	0,151
30	50,3	0,300
45	43,5	0,444
60	37,9	0,582
75	32,4	0,738
90	28,0	0,884
105	24,1	1,034
120	20,9	1,177
135	18,1	1,321
150	15,6	1,469
165	13,5	1,614
180	11,7	1,757
185	10,1	1,904

Con los datos de la tabla 2 se representa en una gráfica el tiempo en abscisas frente a I_3 en ordenadas.



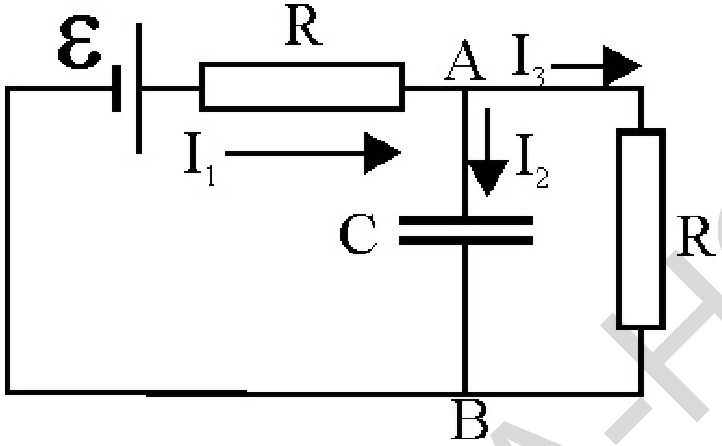
En otra gráfica se representa el tiempo (eje X) frente a ln(/$I_{3inicial}$/I_3)(eje Y). Teniendo en cuenta que la gráfica anterior es una línea recta cuya pendiente es $\frac{1}{RC}$ y que R = 100000 Ω, se calcula el valor de la capacidad del condensador.



$$\frac{1}{RC} = 0{,}0098 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{100\,000 \cdot 0{,}0098} = 1{,}02.10^{-3}\,F$$

Notas para el Profesor

La práctica se ha redactado huyendo del contenido matemático y con el objetivo de que los alumnos aprendan a trabajar en equipo y obtengan datos que puedan dar lugar a gráficas de tipo exponencial.
Este mismo experimento puede proponerse a alumnos con conocimientos de matemáticas, iniciándolo con la deducción de las ecuaciones matemáticas que rigen el proceso.



En el nudo **A** se verifica $I_1 = I_2 + I_3$ (1)

En la malla ε, R, **A**, **B,** ε $\varepsilon = I_1R + \frac{q}{C}$ (2)

En la malla ε, **A**, R, **B,** ε $\varepsilon = I_1R + I_3R$ (3)

De la ecuación (2) se deduce: $R\frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = R\frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C}I_2 = 0$ (4)

De las ecuaciones (1) y (3) $\varepsilon = I_1R + (I_1 - I_2)R \Rightarrow \varepsilon = 2I_1R - I_2R \Rightarrow I_2 = 2I_1 - \frac{\varepsilon}{R}$ (5)

De (5) y (4) $R\frac{dI_1}{dt} + \frac{1}{C}\left(2I_1 - \frac{\varepsilon}{R}\right) = 0 \Rightarrow \frac{dI_1}{dt} + \frac{2}{CR}I_1 = \frac{\varepsilon}{R^2C}$ (6)

La ecuación diferencial (6) es del tipo $y' + X_1y = X_2$, cuya solución general es:

$$y = e^{-\int X_1 dx}\left(\int X_2 \cdot e^{\int X_1 dx}\,dx + K\right)$$

En nuestro caso

$$-\int \frac{2}{CR}dt = -\frac{2}{CR}t \quad ; \quad \int \frac{\varepsilon}{R^2C} \cdot e^{\frac{2}{CR}t}dt = \frac{\varepsilon}{R^2C} \cdot e^{\frac{2}{CR}t} \cdot \frac{CR}{2} = \frac{\varepsilon}{2R}e^{\frac{2}{CR}t}$$

$$I_1 = e^{-\frac{2}{CR}t}\left(\frac{\varepsilon}{2R}e^{\frac{2}{CR}t} + K\right), \quad \text{cuando t=0, } (I_1)_{t=0} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{2R} + K \Rightarrow \quad K = \frac{\varepsilon}{2R}$$

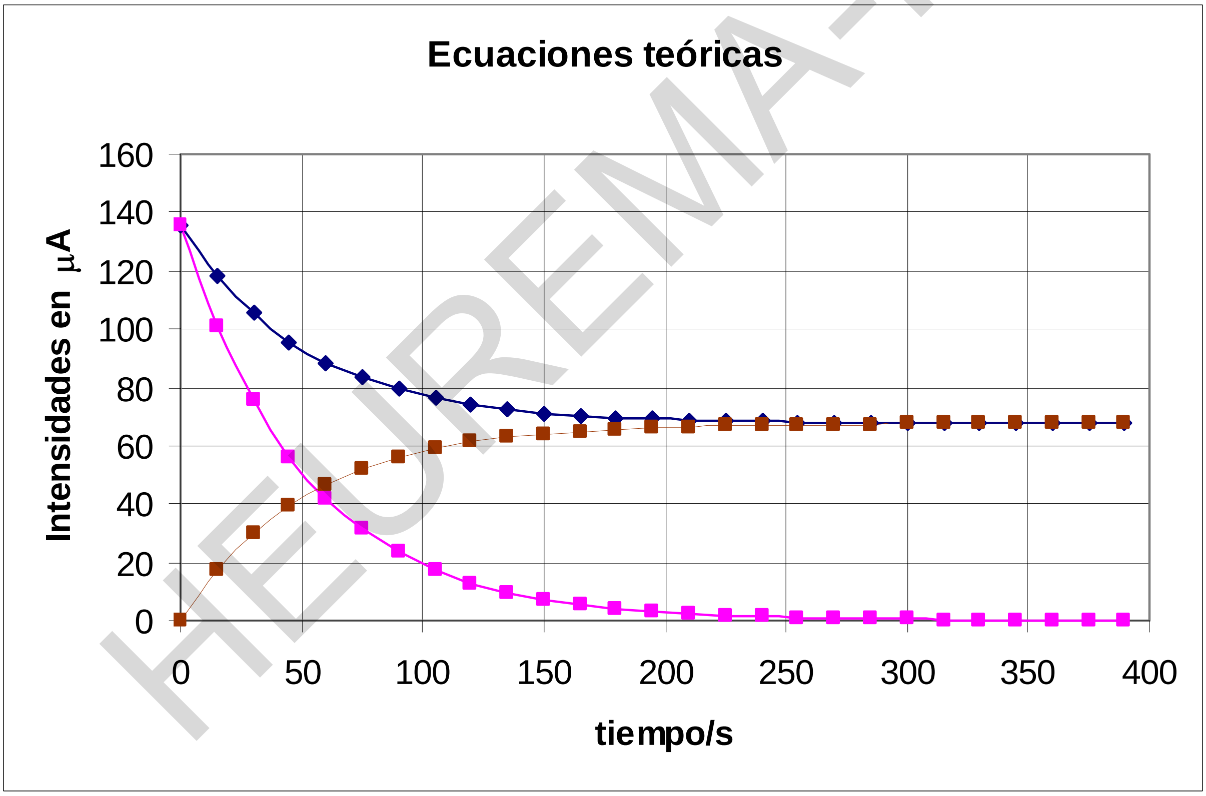
$$I_1 = e^{-\frac{2}{CR}t}\left(\frac{\varepsilon}{2R}e^{\frac{2}{CR}t}+\frac{\varepsilon}{2R}\right)=\frac{\varepsilon}{2R}+\frac{\varepsilon}{2R}e^{-\frac{2}{CR}t}=\frac{\varepsilon}{2R}\left(1+e^{-\frac{2}{CR}t}\right)$$

El valor de I_2 se deduce de (5) y el de $I_3 = I_1-I_2$

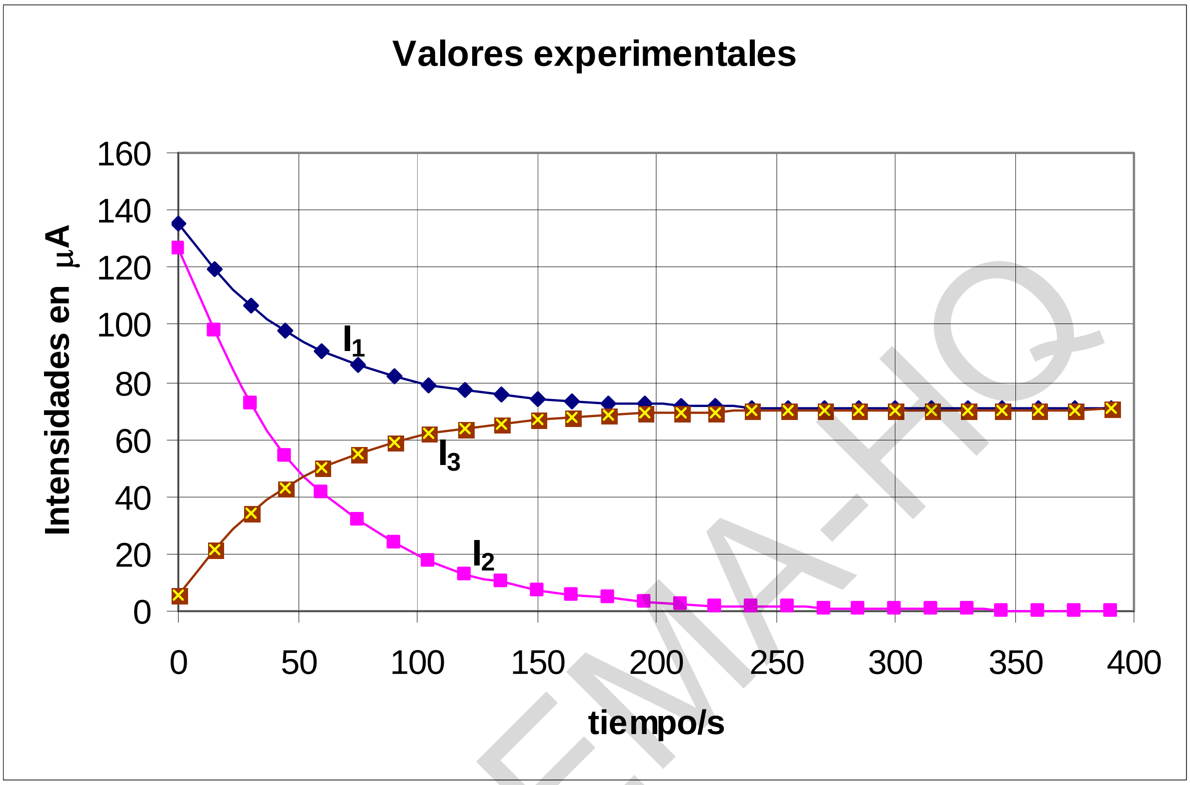
En nuestro experimento cuando t=0, I_1=135,3 mA=135,3.10^{-6} A $=\frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow \varepsilon = 13{,}53\ \text{V}$

$$I_1 = \frac{13{,}53}{2.10^5}\left(1+e^{-\frac{2}{1{,}02.10^{-3}\cdot 10^5}}\right)=6{,}77.10^{-5}\left(1+e^{-1{,}96.10^{-2}}\right)$$

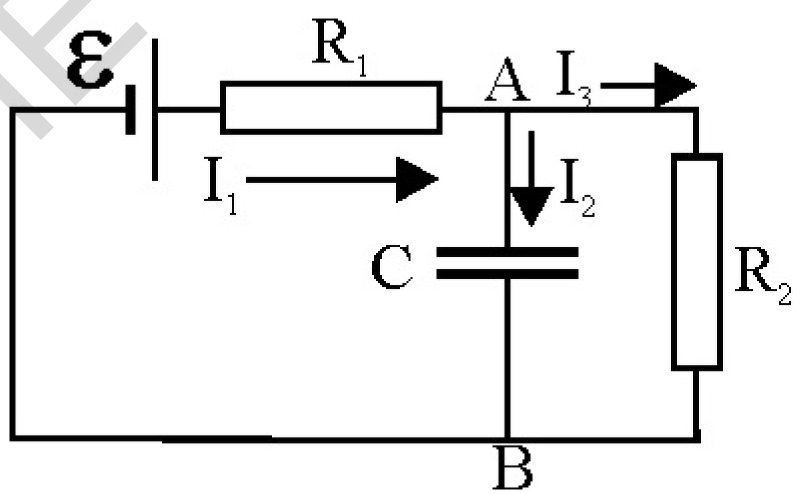
En una misma gráfica representamos esta ecuación junto con los valores de I_2 e I_3.



La siguiente gráfica es la de los valores experimentales.



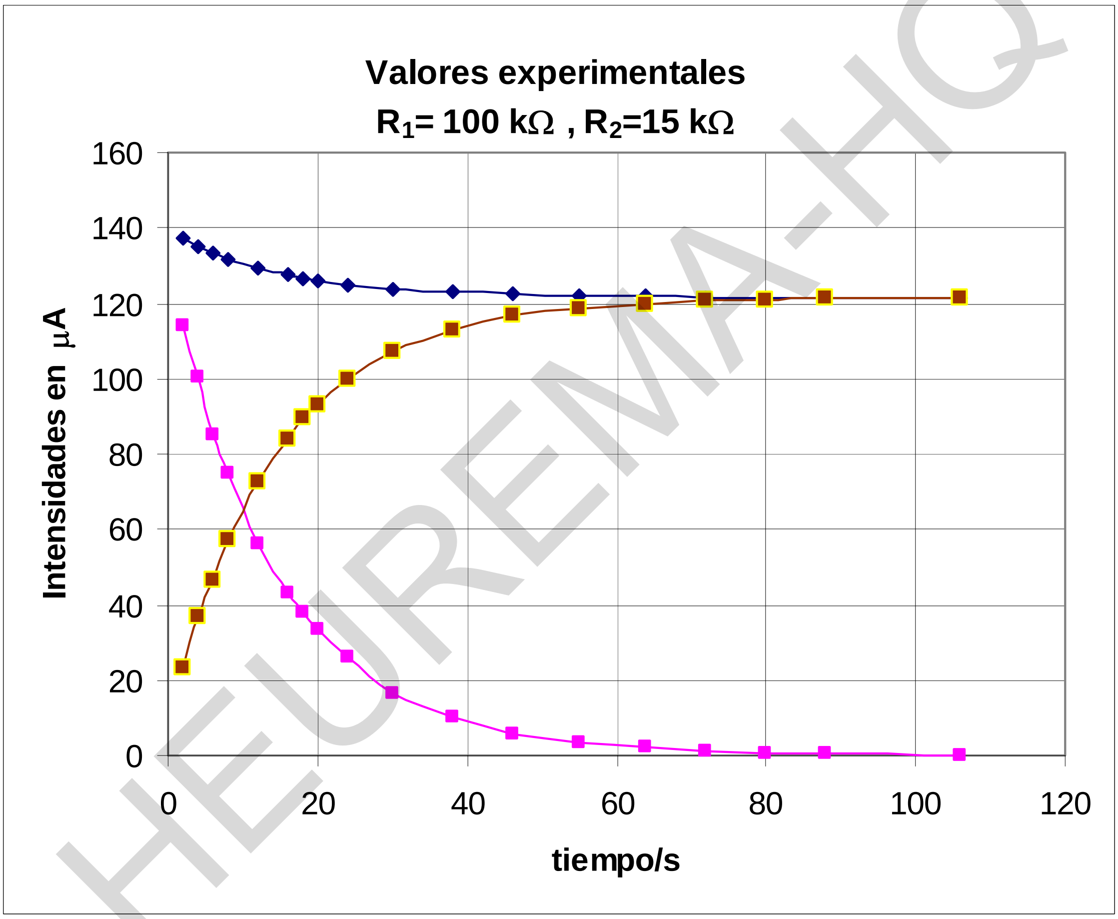
Es posible también montar un circuito en que las dos resistencias sean diferentes

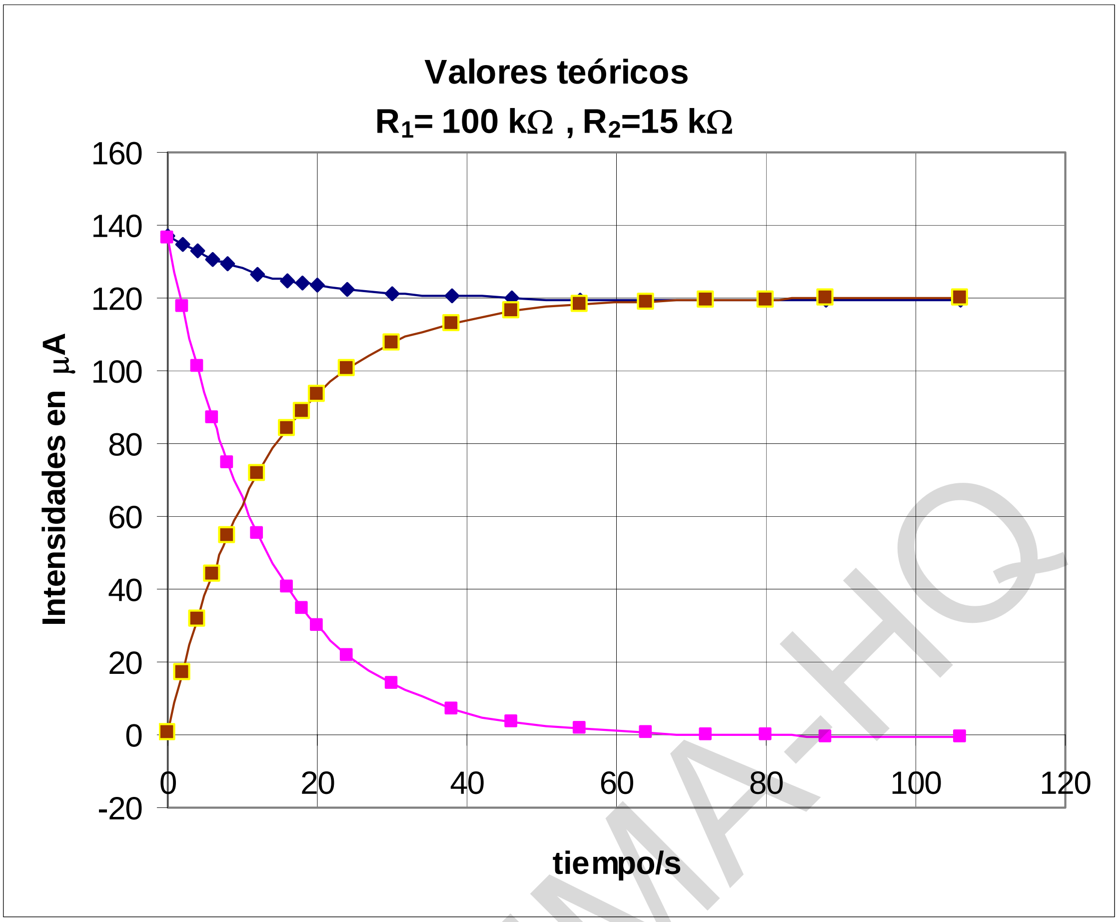


Siguiendo el mismo método de resolución se llega a:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1 + R_2}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\cdot e^{-\frac{R_1+R_2}{CR_1R_2}t}\right) \; ; \; I_2 = I_1\frac{R_1 + R_2}{R_2} - \frac{\varepsilon}{R_2} \; ; \; I_3 = I_1 - I_2$$

Nosotros construimos un circuito co R_1 =100 kΩ y R2 = 15 kΩ. A continuación damos las gráficas experimentales y teóricas.





Al colocar una resistencia de 15 kΩ las lecturas de los aparatos de medida no se pueden seguir con la vista y para poder medir hicimos fotografías digitales de los amperímetros y del cronómetro, y a partir de esas fotografías obtuvimos los datos experimentales. Por tanto si se quiere medir empleando la vista del observador deben utilizarse resistencias grandes.