PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS INTERNACIONALES DE FÍSICA

José Luis Hernández Pérez

Agustín Lozano Pradillo

Madrid 2008

9ª OLIMPIADA DE FÍSICA. HUNGRIA. 1976

1.-Una esfera hueca de radio R =0,5 m, gira en torno de uno de sus diámetros con una velocidad angular de ω = 5 rad/s. Dentro de la esfera y a una altura de R/2 está situado un pequeño bloque de masa m que gira pegado a la esfera.
a) ¿Cuál es el valor del coeficiente de rozamiento para que esto suceda?
b)¿ y cuál si la velocidad de rotación fuese ω = 8 rad/s? c) estudiar la estabilidad en ambos casos 1) para una pequeña variación de la posición del bloque 2) para una pequeña variación de la velocidad angular de la esfera. Tome g = 10 m/s^2
9ª. Olimpiada Internacional de Física. Hungria. 1976

Analizamos las fuerzas que actúan sobre el bloque desde un sistema de referencia ligado a la esfera, esto significa que el sistema de referencia elegido no es inercial y por tanto entre las fuerzas aparece una de inercia

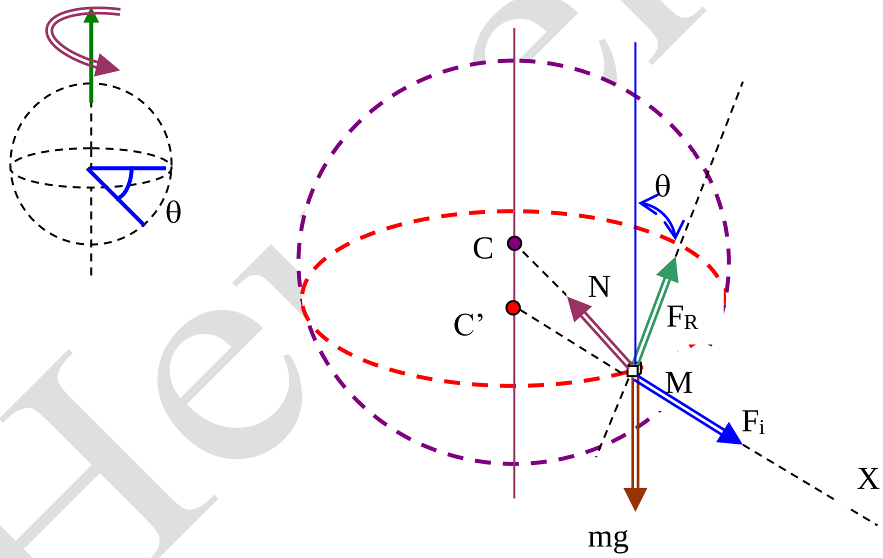


Fig. 1

En la figura 1 se han dibujado los ejes y las fuerzas en perspectiva.

C es el centro de la esfera de radio R. C´ es el centro de la circunferencia que describe la masa M cuando la esfera da una vuelta completa. N es la fuerza con que la esfera empuja a la masa m y esta dirigida hacia el centro de la esfera. Fi es la fuerza de inercia y está contenida en la línea C´X. F_R es la fuerza de rozamiento, mg el peso de la masa m.

Si ahora mirásemos de frente al plano XY veríamos las fuerzas como indica la figura

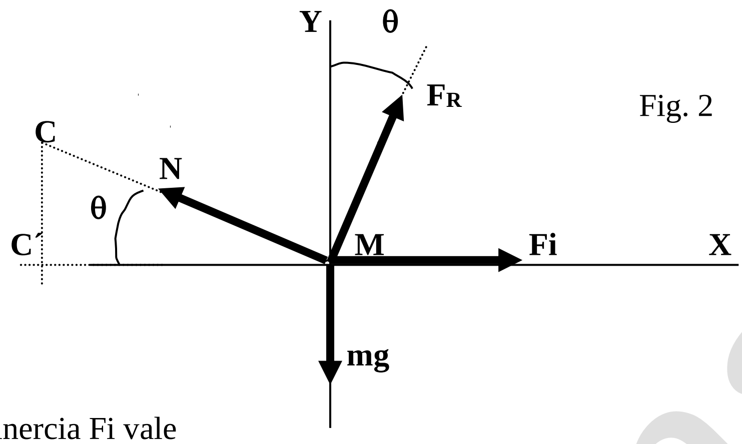


Fig. 2

La fuerza de inercia Fi vale

$$Fi = masa * aceleración\ del\ sistema = m\omega^2 * radio = m\omega^2 * C´M = m\omega^2 * R\cos\theta \quad (1)$$

Proyectando las fuerzas sobre los ejes de coordenadas resulta:

$$F_R \operatorname{sen}\theta - N\cos\theta + Fi = 0 \ ; \quad F_R\cos\theta + N\operatorname{sen}\theta - mg = 0$$

Si en las ecuaciones anteriores se sustituye Fi por (1) y se opera

$$F_R = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\omega^2 R\operatorname{sen}\theta}{g}\right) \quad (2); \qquad N = mg\left(\operatorname{sen}\theta + \frac{\omega^2 R\cos^2\theta}{g}\right) \quad (3)$$

Como $F_R = \mu N$

$$\mu = \cos\theta \frac{1 - \frac{\omega^2 R\operatorname{sen}\theta}{g}}{\operatorname{sen}\theta + \frac{\omega^2 R\cos^2\theta}{g}} \quad (4) \qquad \mu = \cos 30 \frac{1 - \frac{5^2 * 0{,}5 * \operatorname{sen}30}{10}}{\operatorname{sen}30 + \frac{5^2 * 0{,}5 * \cos^2 30}{10}} = 0{,}23$$

con un coeficiente de rozamiento de 0,23 o superior la masa se mantiene pegada a la esfera y es la fuerza de rozamiento la que impide que deslice hacia abajo.

b) Si la velocidad es 8 rad/s y se sustituye en la expresión anterior resulta para μ un valor negativo. Esto supone que al aumentar la velocidad angular la masa m tiende a deslizarse a una altura mayor. El diagrama de fuerzas es similar al de la figura 2, salvo que la fuerza de rozamiento tiene sentido contrario (fig. 3)

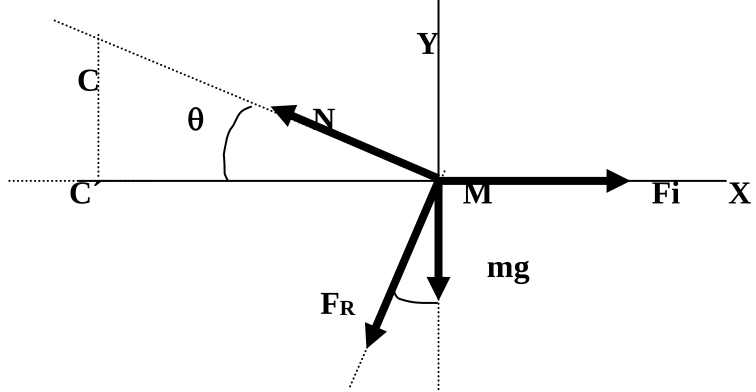


Fig.2

Si se hacen las proyecciones de las fuerzas sobre los ejes y se opera, de la misma manera que en el caso anterior, se llega al siguiente resultado:

$$\mu = \cos\theta \frac{\dfrac{\omega\ R\mathrm{sen}\theta}{g} - 1}{\mathrm{sen}\theta + \dfrac{\omega^2 R\cos^2\theta}{g}} \quad (5); \qquad \mu = \cos 30 \frac{\dfrac{10^2 * 0{,}5 * \mathrm{sen}30}{10} - 1}{\mathrm{sen}30 + \dfrac{8^2 * 0{,}5 * \cos^2 30}{10}} = 0{,}18$$

Con un coeficiente de rozamiento igual o superior a 0,18 la masa m se mantiene en su posición para un intervalo de velocidades comprendido entre 5 y 8 rad/s.

c) Para estudiar la estabilidad en el primer caso, se recurre a la ecuación (4). En ella se dan valores al ángulo θ = 10, 20 ,30 º ....para velocidades angulares de 4, 5 y 6 rad/s. El resultado de los cálculos están en la gráfica de la figura 4.

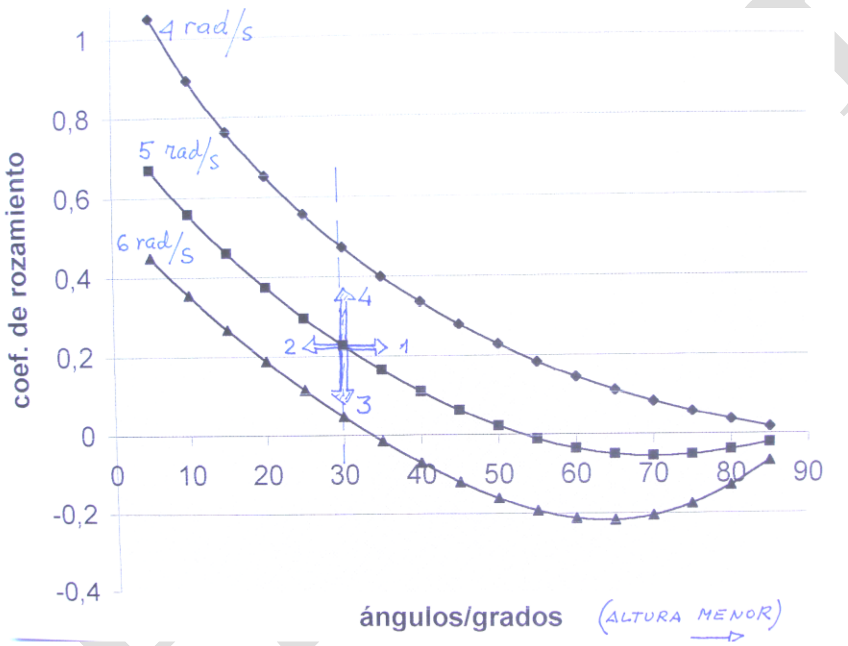


Fig. 4

En la figura 4 nos situamos en la velocidad de 5 rad/s y con un ángulo de 30º. Si nos desplazamos en la dirección de a flecha 2, hacia alturas mayores, para mantener la velocidad de 5 rad/s se necesita mayor coeficiente de rozamiento, tanto mayor cuanto mayor altura se desplace la masa m. Si la masa m se desplaza según 1, hacia alturas menores, puede adquirir posiciones de equilibrio con menor coeficiente de rozamiento aún manteniendo la velocidad de 5 rad/s.

Las flechas 3 y 4 indican variación de la velocidad angular para la misma posición. La flecha 3 nos indica que para la posición 30º el hecho de aumentar la velocidad angular supone menor coeficiente de rozamiento, luego el aumento de velocidad angular aumenta la estabilidad. La flecha 4 indica disminución de velocidad angular y aumento del coeficiente de rozamiento y por consiguiente disminución de la estabilidad.

Para estudiar la estabilidad en el segundo caso se recurre a la ecuación (5), dando valores al ángulo θ = 10 , 20 , 30 para las velocidades angulares 7,8 y 9 rad/s.

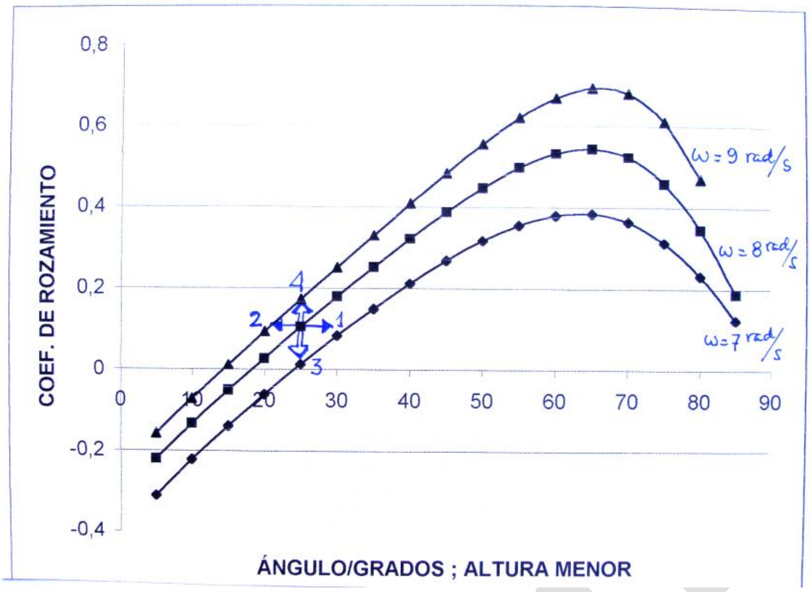
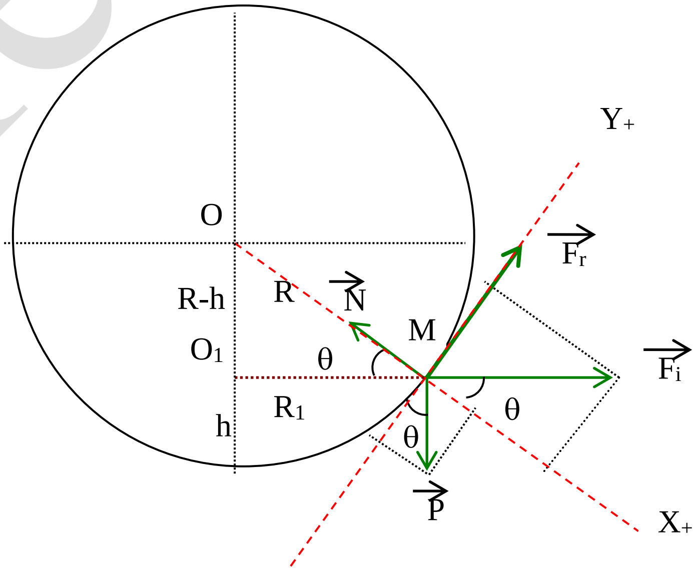


Fig. 5

La flecha 1 indica una disminución de la velocidad angular, el coeficiente de rozamiento no varía pero la altura de la masa disminuye. En 2 aumenta ω , no varía el coeficiente de rozamiento pero la masa está a una altura mayor.

La flecha 3 indica disminución de ω ,la misma posición que antes pero con menos coeficiente de rozamiento. La 4 indica que aumenta ω, no varía la posición pero se necesita mayor coeficiente de rozamiento para mantener la posición inicial

Otro punto de vista:



En el sistema de referencia XMY, tenemos las fuerzas

$\vec{N} = (-N,0)$ $\vec{F_r} = (0, F_r)$

$F_i = m.(\omega^2.R.\cos^2\theta,\ \omega^2.R.\,\mathrm{sen}\,\theta.\cos\theta)$; $P = m.(g.\,\mathrm{sen}\,\theta\,,\ -g.\cos\theta)$.

El equilibrio dinámico se alcanza cuando se anulan las componentes de las fuerzas,

$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma F_y = 0$$

Tenemos en el eje MX. $-N + m\omega^2 R\ \cos^2\theta + m\ g\ \mathrm{sen}\theta = 0$, de donde

$$N = m\left(\omega^2 R\ \cos^2\theta + g\ \mathrm{sen}\theta\right)$$

Y en el eje MY, $F_r + m\omega^2 R\ \mathrm{sen}\theta\ \cos\theta - mg\ \cos\theta = 0$, de donde

$$F_r = m\ \cos\theta\ \left(g - \omega^2 R\ \mathrm{sen}\theta\right)$$

Que nos da las condiciones para que

$$F_r > 0,\ \text{si}\ g > \omega^2 R\,\mathrm{sen}\theta, \qquad \text{y} \qquad F_r < 0,\ \text{si}\ g < \omega^2 R.\ \mathrm{sen}\theta$$

Lo cual nos indica en qué sentido actuará la fuerza de rozamiento.

Cálculo del coeficiente de rozamiento.- Pero el coficiente de rozamiento es $\mu = \dfrac{F_r}{N}$, y con los valores de ambas fuerzas, tenemos: $\mu = \dfrac{\cos\theta\ \left(g - \omega^2 R\ \mathrm{sen}\theta\right)}{\omega^2 R\ \cos^2\theta + g\ \mathrm{sen}\theta}$

que nos permite calcular el coeficiente de rozamiento,

<u>Para ω = 5 rad/s</u>, cosθ = cos 30º = 0,87, y senθ = 0,5, tenemos que

$$\omega^2.R.\mathrm{sen}\theta = \frac{25}{4} = 6{,}25 < g$$

Por tanto Fr >0, tiene el sentido de MY positivo.

$$\mu(5) = \frac{\cos 30(10 - 25 * 0{,}5 * \mathrm{sen}30)}{25 * 0{,}5 * \cos^2 30 + 10 * \mathrm{sen}30} = 0{,}23$$

Hagamos el cálculo de μ <u>para ω = 8 rad/s</u>,

En primer lugar, $\omega^2 R\ \mathrm{sen}\theta = \dfrac{64}{4} = 16 > g$, luego el sentido que tiene $F_r < 0$ es el de las MY negativas. Y el coficiente de rozamiento vale

$$\mu = \frac{\cos\theta\ \left(\omega^2 R\ \mathrm{sen}\theta - g\right)}{\omega^2 R\ \cos^2\theta + g\ \mathrm{sen}\theta} \Rightarrow \qquad \mu(5) = \frac{\cos 30(64 * 0{,}5 * \mathrm{sen}30 - 10)}{64 * 0{,}5 * \cos^2 30 + 10 * \mathrm{sen}30} = 0{,}18$$

Condiciones de estabilidad.- a) Respecto de h(ω), la altura en función de la velocidad angular:

Si el coeficiente de rozamiento se anula $\mu = \dfrac{\cos\theta\ \left(g - \omega^2 R\ \text{sen}\theta\right)}{\omega^2 R\ \cos^2\theta + g\ \text{sen}\theta} = 0$, la altura correspondiente vale h =

$$h_0\, g - \omega^2 R\ \text{sen}\theta = 0 \quad \Rightarrow R\ \text{sen}\theta = \frac{g}{\omega^2} \quad \Rightarrow R * \frac{R-h}{R} = \frac{g}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad h_o = R - \frac{g}{\omega^2}$$

y, por tanto, $F_r = 0$, esto ocurre porque la componente de F_i y de P sobre el eje MY son iguales y de sentido contrario

Para valores de h mayores que $h_0 > R - \dfrac{g}{\omega^2}$, $\mu > 0$ y F_r tiene el sentido positivo del eje MY.Para valores de h menores que $h_0 < R - \dfrac{g}{\omega^2}$, $\mu < 0$ y F_r tiene el sentido negativo del eje MY. En conclusión, cuando $\mu = 0$ la fuerza de rozamiento $F_r = 0$, y para otros valores de μ F_r tendrá un sentido u otro según que

$g - \omega^2 R\ \text{sen}\theta$ sea mayor o menor que cero. Pero $\text{sen}\theta = \dfrac{R-h}{R}$, y la condición anterior se puede expresar poniendo:

$F_r > 0$, si $h > R - \dfrac{g}{\omega^2}$; $\qquad$ $F_r < 0$, si $h < R - \dfrac{g}{\omega^2}$;

$F_r = 0$, si $h = R - \dfrac{g}{\omega^2}$;

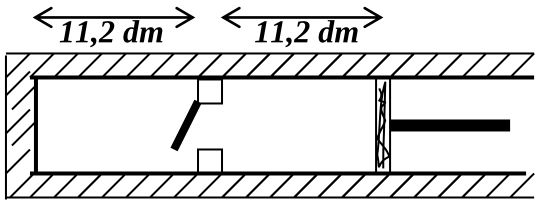
b) Respecto a ω (h), la velocidad angular en función de la altura: por consideraciones análogas sobre la expresión, $g - \omega^2 R\text{sen}\theta$;

$F_r > 0$, si $g > \omega^2 R\text{sen}\theta$ que equivale a $\omega^2 < \dfrac{g}{R-h}$

$F_r < 0$, si $g < \omega^2 R\text{sen}\theta$ es decir; $\omega^2 > \dfrac{g}{R-h}$

y también, $F_r = 0$, si $\omega^2 = \dfrac{g}{R-h}$

2.-Un cilindro de 1 dm² de sección, y con paredes perfectamente aislantes para el calor, tiene en su interior un pistón y una pared divisoria con una válvula, tal como indica la figura inferior



La válvula se abre cuando la presión en la zona derecha es mayor que la de la izquierda. Inicialmente existen 12 g de helio en el compartimento izquierdo y 2 g en el de la derecha ambos a 273 K. La presión exterior es 10 N/cm² = 1 atm. Empujamos lentamente el pistón hacia la válvula y cuando ésta se abre nos detenemos un cierto tiempo y a continuación seguimos empujando hasta que el pistón llega a la pared que contiene la válvula. Calcular el trabajo total realizado en el proceso.
Datos Cv= 3,15 J/gK ; Cp = 5,25 J/gK , masa atómica relativa del helio =4
9ª. Olimpiada Internacional de Física. Hungria. 1976

Calculamos las presiones del gas en los dos compartimentos mediante la ecuación de los gases perfectos.

$$P_i = \frac{nRT}{V} = \frac{\frac{12}{4} * 0,082 * 273}{11,2} = 6 \ \text{atm} \quad ; \quad P_d = \frac{nRT}{V} = \frac{\frac{2}{4} * 0,082 * 273}{11,2} = 1 \ \text{atm}$$

teniendo en cuenta que la presión exterior es 1 atm el sistema se encuentra inicialmente en equilibrio.

Al empujar el émbolo hacia la izquierda la presión del gas aumenta por disminución del volumen y como el sistema está aislado el proceso es adiabático. Si utilizamos la ecuación de la adiabática junto con la general de los gases perfectos, podemos calcular el volumen y temperatura del gas de la derecha cuando su presión iguale al de la izquierda.

$$P_i V_i^{\frac{Cp}{Cv}} = P_f V_f^{\frac{Cp}{Cv}} \quad \Rightarrow \quad 1 * 11,2^{\frac{5,25}{3,15}} = 6 * V_f^{\frac{5,25}{3,15}} \quad \Rightarrow \quad V_f = 3,82 \ \text{L}$$

$$T_f = \frac{P_f V_f}{nR} = \frac{6 * 3,82}{0,5 * 0,082} = 559 \ \text{K}$$

En un proceso adiabático el intercambio de calor con el exterior es nulo, Q=0, y según el primer principio de la termodinámica :

$$\Delta U = Q + W = W = m(g)\ Cv\ \Delta T = 2g*3,15\ (J/gK)*(559\text{-}273)K = 1802\ J$$

A partir del momento en que la presión del gas del lado derecho es 6 atm la válvula se abre y los dos gases se ponen en contacto, si el tiempo de espera es suficiente se alcanzará una temperatura de equilibrio.

$$m_i (T_e - T_{ii}) = m_d (T_{id} - T_e) \quad ; \quad 12(T_e - 273) = 2(559 - T_e) \quad \Rightarrow T_e = 314\ \ K$$

Al seguir empujando el émbolo hacia la izquierda la presión aumentará en el <u>compartimento de la izquierda</u> y el proceso es adiabático. Podemos escribir:

$$6*(11{,}2 + 3{,}82)^{\frac{5,25}{3,15}} = P_f *11{,}2^{\frac{5,25}{3,15}} \quad \Rightarrow \quad P_f = 9{,}8\ \ atm$$

$$\frac{6*(11{,}2+3{,}82)}{314} = \frac{9{,}8*11{,}2}{T_f} \quad \Rightarrow \quad T_f = 381K$$

Según el primer principio de la termodinámica, dado que además Q = 0, resulta:

$$\Delta U = Q + W = W = mCv\Delta C = 14g*3{,}15\frac{J}{gK}*(381-314)K = 2955\ \ J$$

Durante todo el proceso desde el exterior y sobre el émbolo ha actuado la presión atmosférica con una fuerza F = Patm*superficie = 10 (N/cm^2)*100 cm^2 =10^3 N y esta fuerza se ha desplazado 11,2 dm , por tanto ha efectuado un trabajo.

$$W = F^*\ desplazamiento = 10^3\ N*1{,}12\ m = 1120\ J$$

El trabajo realizado por la fuerza aplicada es. 2955 + 1802–1120 = 3637 J