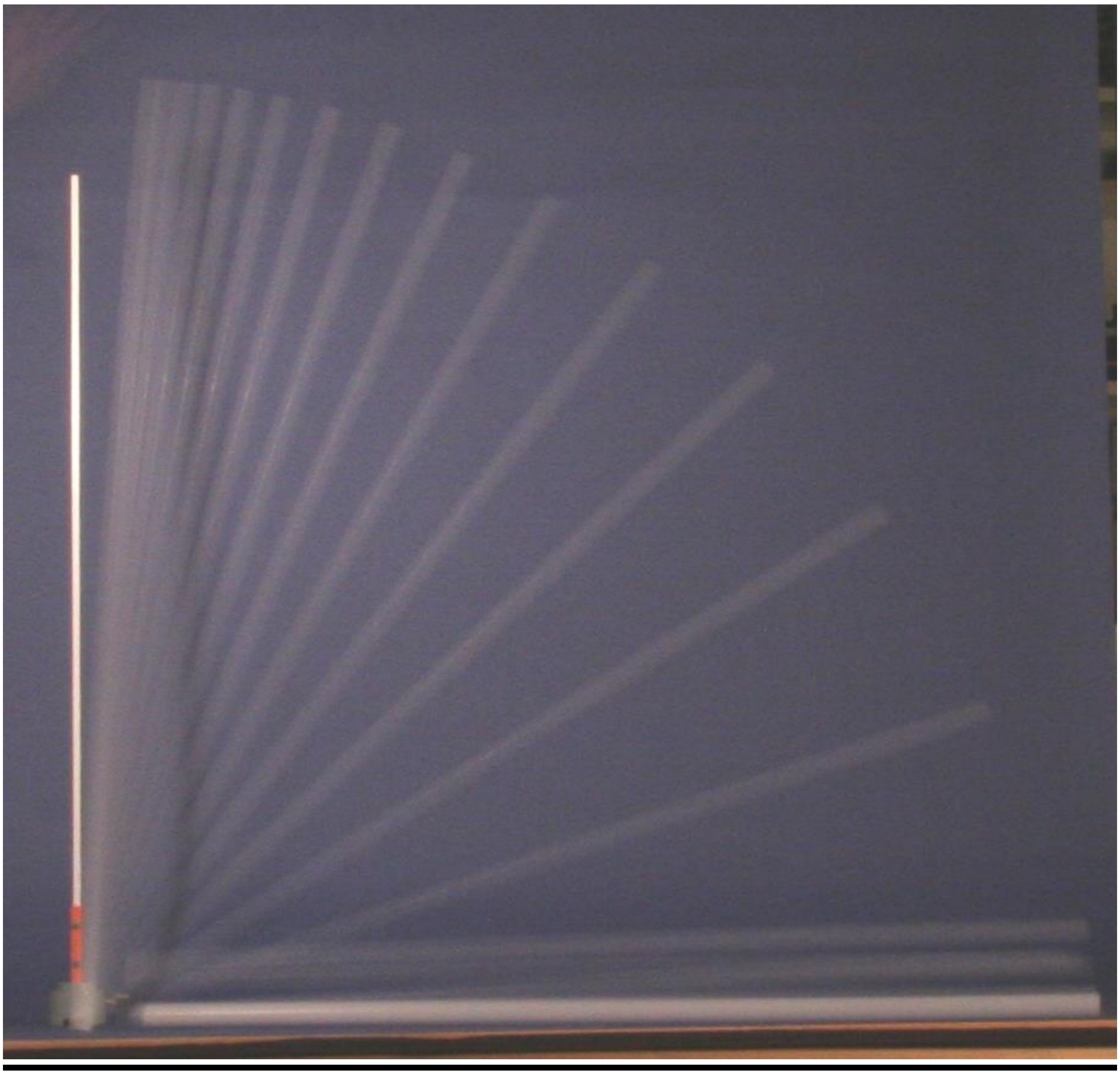
Problemas con imagen. Mecánica

Vara homogénea apoyada en un extremo ***



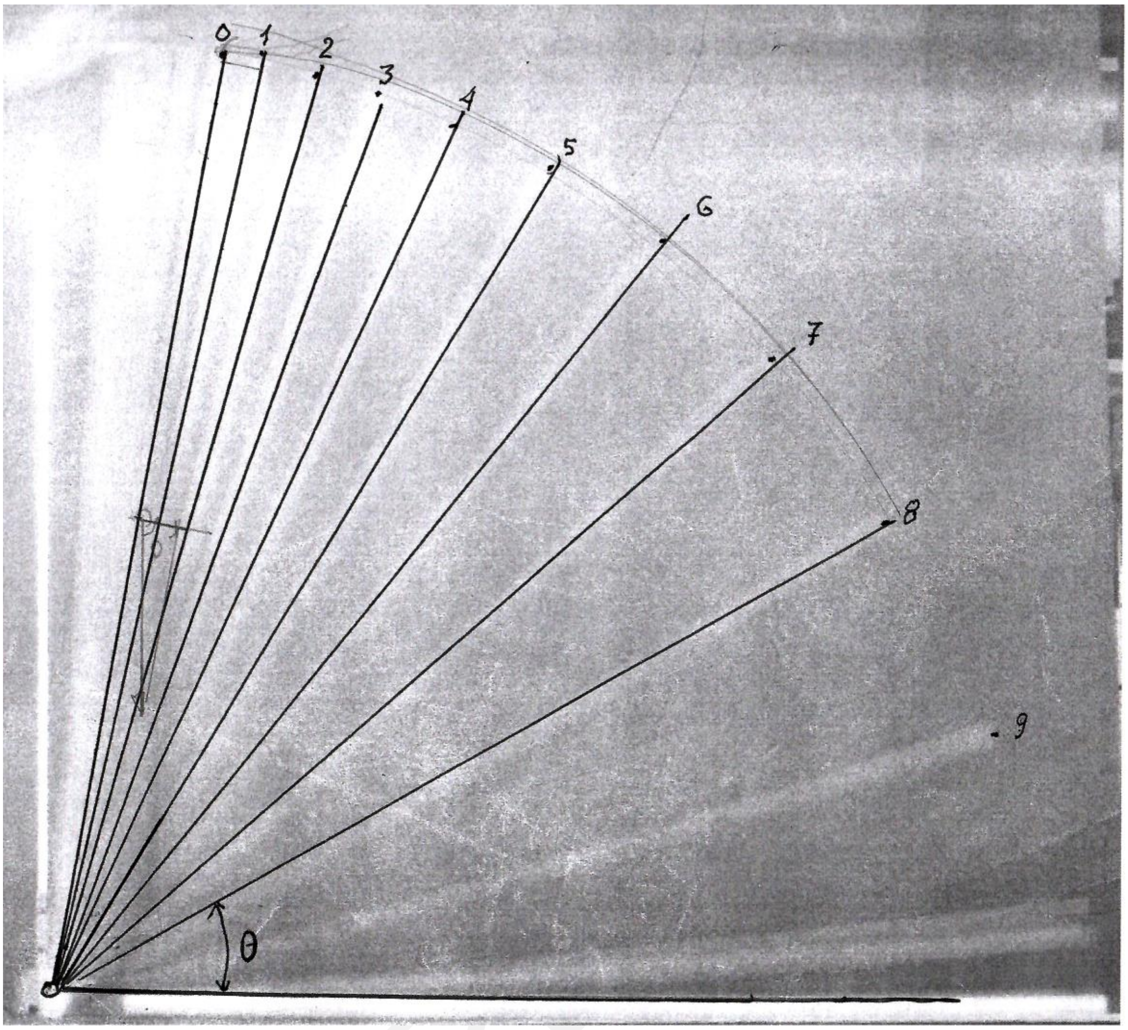
Fotografía 1

La fotografía 1 es estroboscópica y representa la caída de una vara de madera homogénea apoyada en uno de sus extremos..

El intervalo entre dos posiciones consecutivas de la vara vale 65/ 2 milisegundos.

La masa de la vara es m = 56,51 gramos y su longitud L= 91,9 centímetros.

El momento de inercia de la vara respecto de un eje perpendicular a ella y que pasa por su centro de masas es. $I_{CM} = m L^2/12$



Fotografía 2

La fotografía 2 es la misma que la 1, pero ahora se han señalado nueve posiciones de la vara y un ángulo θ que es el que forma la posición ocho con el eje horizontal..
En la posición cero la vara tiene una velocidad angular ω_0 y a partir de ese punto se cuenta el tiempo, luego $t_o=0$

Los valores de los ángulos que forman cada posición con el eje horizontal son:

Tabla I

Posición	0	1	2	3	4	5	6	7	8
θ/º	79	76,5	73,5	69	64	58	50	40	29
θ/rad									
t/s									

a) Complete las filas de la tabla I

b) Represente en el eje de abscisas el tiempo y en el eje de ordenadas los ángulos en radianes.

c) Determine la ecuación $\theta = f(t)$

d) Determine la ecuación $\omega = f(t)$

e) Calcule el momento de inercia de la vara respecto del eje que pasa por su punto de apoyo.

f) Deduzca la ecuación que relaciona el momento de inercia de la vara en función de m, L ,ω_o , θ, y el ángulo de la posición cero. En la figura 3 está representado el peso m g de la vara, el ángulo θ que es la variable y t_o=0 y t_8 que son los tiempos de las posiciones cero y ocho respectivamente. Debe tomar momentos respecto del punto de apoyo O, y aplicar la ley fundamental de la Dinámica de rotación.

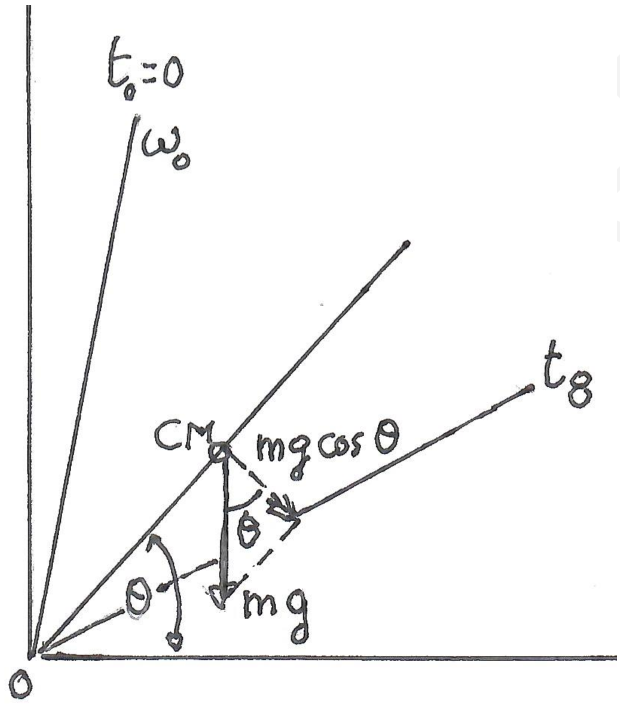


Fig.3

Debe llegar a obtener una ecuación con integrales en la que figuran los ángulos y como límites t_o y t_8

Como ayuda damos el resultado al que tiene que llegar.

$$\sqrt{\frac{m\,g\,L}{I}}\int_{t_O}^{t_8} dt = \int_{\theta_O}^{\theta_8} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta_o - \operatorname{sen}\theta}} = \text{área}$$

g) Para medir él área, represente en el eje de abscisas los valores de θ y en el de ordenadas $\frac{1}{\sqrt{\text{sen}\,\theta_0 - \text{sen}\,\theta}}$. El área se mide uniendo los puntos por segmentos con lo cual se obtiene una serie de trapecios siendo el área de cada uno semisuma de las bases por la altura.. El área total es la suma de las áreas de cada trapecio.

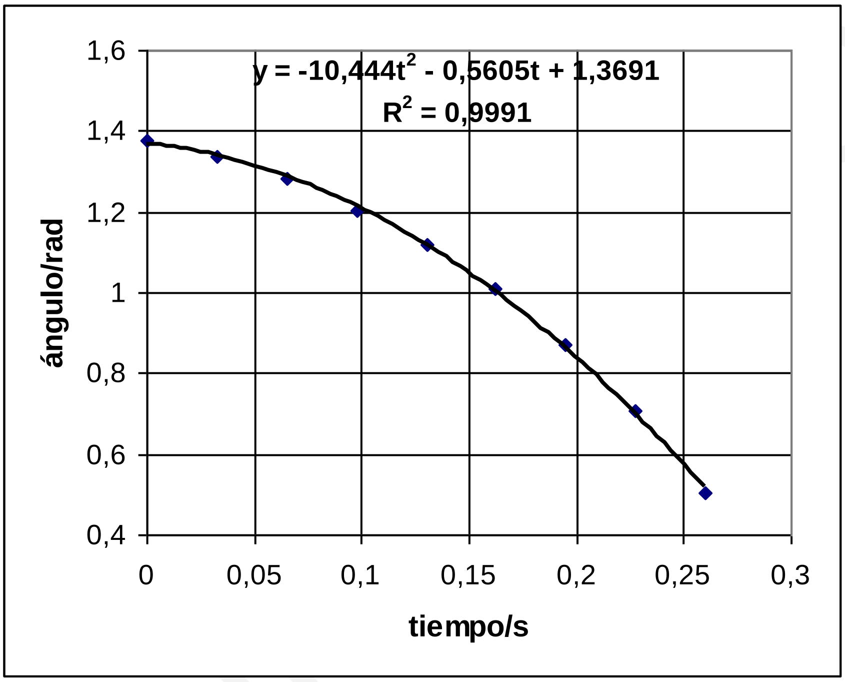
h) Calcule el valor del momento de inercia.. Teóricamente es igual al obtenido en el aparatado a), pero el valor puede diferir en un 10% debido a los errores de medida en la fotografía.

SOLUCIÓN

Tabla I

Posición	0	1	2	3	4	5	6	7	8
θ/º	79	76,5	73,5	69	64	58	50	40	29
θ/rad	1,38	1,34	1,28	1,20	1,12	1,01	0,87	0,70	0,51
t/s	0	0,0325	0,065	0,098	0,13	0,163	0,195	0,228	0,26

b) Represente en el eje de abscisas el tiempo y en el eje de ordenadas los ángulos en radianes



Gráfica 1

c) Determine la ecuación $\theta = f(t)$

$$\theta = -10{,}4\,t^2 - 0{,}56\,t + 1{,}37$$

d) Determine la ecuación $\omega = f(t)$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = -20{,}8\,t - 0{,}56$$

e) Calcule el momento de inercia de la vara respecto del eje que pasa por su punto de apoyo.

Aplicamos el principio de Steiner

$$I = I_{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m\frac{L^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$$

f) Deduzca la ecuación que relaciona el momento de inercia de la vara en función de m, L ,ω_o , θ, y el ángulo de la posición cero

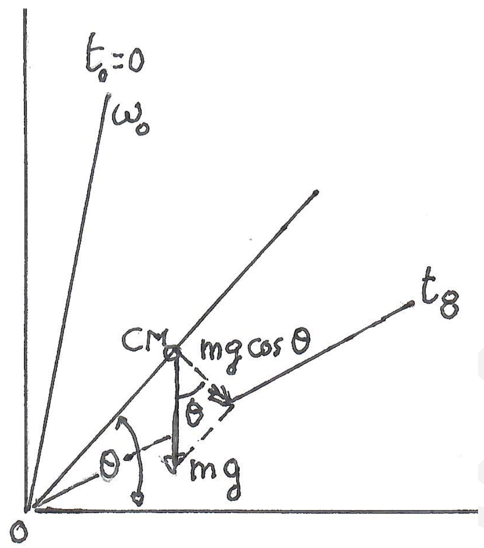


Fig. 3

$$M = mg(\cos\theta)\frac{L}{2} = -I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -I\omega\frac{d\omega}{d\theta} \quad\Rightarrow\quad -\int mg\frac{L}{2}\cos\theta = \int I\omega\, d\omega \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta = I\frac{\omega^2}{2} + Cte \quad (1)$$

El signo se debe a que la aceleración angular es negativa

Para hallar la constante de integración sabemos que cuando to =0 la velocidad angular es cero y el ángulo θ_o = 79º

$$-mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta_o = Cte$$

Sustituyendo en (1)

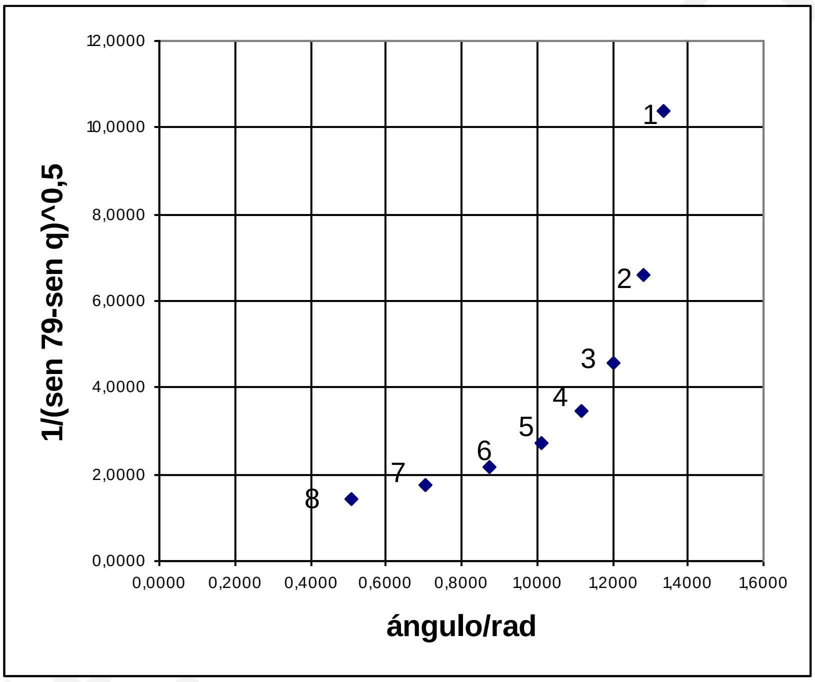
$$-mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta + mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta_o = I\frac{\omega^2}{2} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta_o - mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta}{I}} = I\frac{d\theta}{dt} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_8}\sqrt{\frac{mgL}{I}}dt = \int_{\theta_o}^{\theta_8}\frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta_o - \operatorname{sen}\theta}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{mgL}{I}}(t_8 - t_o) = \text{área} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mgL}{I}(t_8 - t_o)^2 = \text{área}^2$$

g) Para medir él área, represente en el eje de abscisas los valores de θ y en el de ordenadas $\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta_o - \operatorname{sen}\theta}}$. El área se mide uniendo los puntos por segmentos con lo cual se obtiene una serie de trapecios siendo el área de cada uno semisuma de las bases por la altura.. El área total es la suma de las áreas de cada trapecio..

Posición	0	1	2	3	4	5	6	7	8
θ/º	79	76,5	73,5	69	64	58	50	40	29
θ/rad	1,38	1,34	1,28	1,20	1,12	1,01	0,87	0,70	0,51
$1/\sqrt{\operatorname{sen}79 - \operatorname{sen}\theta}$		10,39	6,62	4,56	3,47	2,74	2,15	1,73	1,42



Gráfica 2

Al lado de cada punto figura un número que se corresponde con la fotografía 2. El punto correspondiente a la posición cero no lo podemos uilizar puesto que es indeterminado.
Calculamos el área formada por el segmento que une la posición 8 con la siete, y las perpendiculares al eje de abscisas trazadas desde los puntos 8 y 7, se forma un trapecio.
La base mayor es la ordenada del punto 7, B=1,73, la base menor es la ordenada del punto 8,b= 1,42, .la altura del trapecio , es la abscisa del puto siete 0,70, menos la abscisa del punto 8, 0,51; h= 0,70-0,51= 0,19

$$\text{Área del trapecio} \quad \frac{B+b}{2}\cdot h = \frac{1,73+1,42}{2}\cdot 0,19 = 0,299$$

Siguiendo el procedimiento se calcula el resto de las áreas

Posiciones entre	B	b	h	Área (B+b/2)·h
8 y 7	1,73	1,42	0,70-0,51	0,299
7 y 6	2,15	1,73	0,87-0,70	0,329
6 y 5	2,74	2,15	1,01-0,87	0,342
5 y 4	3,47	2,74	1,12-1,01	0,342
4 y 3	4,56	3,47	1,20-1,12	0,321
3 y 2	6,62	4,56	1,28-1,20	0,447
2 y 1	10,39	6,62	1,34-1,28	0,510

Área total 0,299+0,329+0,342+0,342+0,321+0,447+0,510 = 2,59

i) *Calcule el valor del momento de inercia. Teóricamente es igual al obtenido en el aparatado a), pero el valor puede diferir hasta en un 10% debido a los errores que se pueden cometer sobre la fotografía..*

$$\frac{m\,g\,L}{I}\left(t_8 - t_1\right)^2 = \text{área}^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{m\,g\,L\left(t_8 - t_1\right)^2}{\text{área}^2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{56{,}51.10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 91{,}9.10^{-2} \cdot \left(8 \cdot \frac{65}{2} - \frac{65}{2}\right) \cdot 10^{-3}}{2{,}59^2} = 0{,}017 \ \text{kg.m}^2$$

Se ha puesto t_1 en lugar de t_o ya que según se observa en la gráfica 2, las áreas se han medido entre los tiempos t_8 y t_1