SOLUCIÓN

a) *Calcule la distancia real del centro de masas del listón respecto del extremo superior.*

Al ser el listón homogéneo su centro de masas está en su centro geométrico

$$D_{CM} = \frac{91,9}{2} = 45,95\,cm$$

b) Calcule el valor real de d'

La distancia entre el agujero 1 y el 10 vale: 9 ·10 = 90 cm

$$2d' = 91,9 - 9\cdot 10 = 1,9\,cm \;\Rightarrow\; d' = 0,95\,cm$$

c) Calcule la distancia real del agujero 3 respecto del extremo superior del listón

$$d_3' = 20 + 0,95 = 20,95\,cm$$

d) Calcule la distancia D entre el agujero 3 y el centro de masas

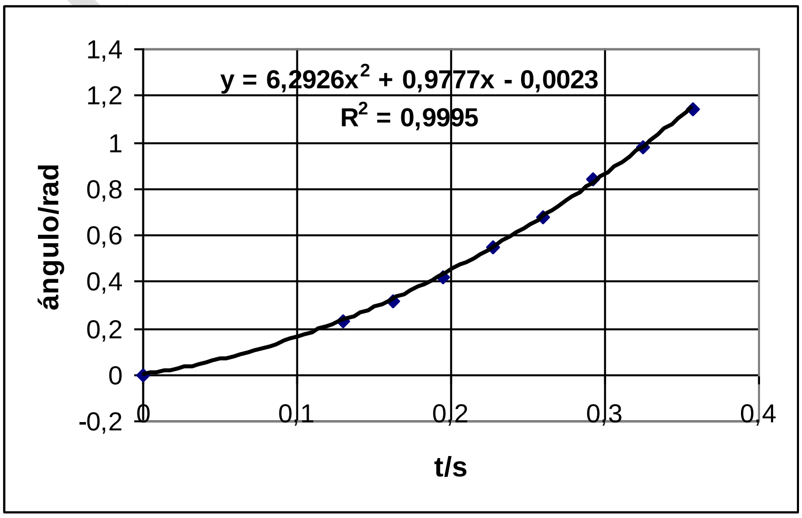
$$D = D_{CM} - d_3' = 45,95 - 20,95 = 25,0\,cm$$

e) Complete la tabla I

Tabla I

Tiempo/ms	t_o=0	t_1=130	t_2=162,5	t_3=195	t_4=227,5	t_5=260	t_6=292,5	t_7=325	t_8=357,5
Ángulo/º	0	13,4	17,9	24,1	31,4	39,0	48,1	56,0	65,5
Tiempo/s	0	0,130	0,163	0,195	0,228	0,260	0,293	0,325	0,358
Ángulo/rad	0	0,234	0,312	0,421	0,548	0,681	0,840	0,977	1,143

f) *Con los datos de la tabla I, represente en el eje de abscisas los tiempos en segundos y en el de ordenadas los ángulos en radianes.*
Determine la ecuación ángulo frente a tiempo, $\theta = f(t)$.
Calcule la ecuación velocidad angular frente a tiempo, $\omega = f(t)$



$$\theta = -2{,}3.10^{-3} + 0{,}98\,t + 6{,}29\,t^2 \quad ; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} = 0{,}98 + 12{,}6\,t$$

g) *Calcule la velocidad lineal del centro de masas en función del tiempo, ponga los datos en la tabla II*

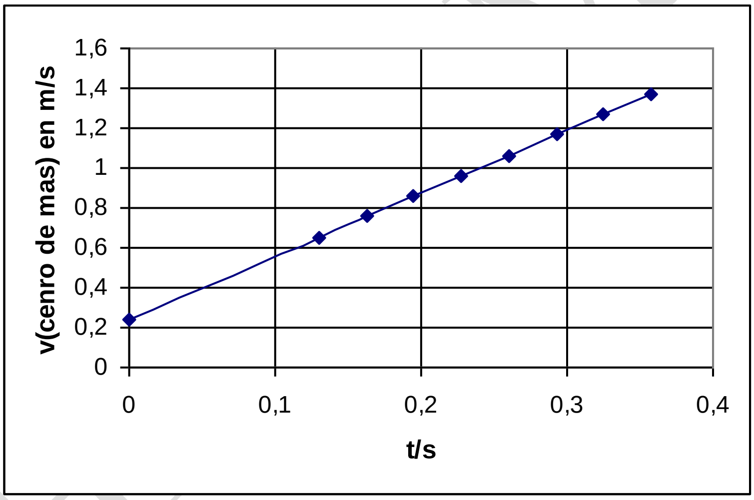
La velocidad del centro de masas es

$$v_{CM} = \omega D = (0{,}98 + 12{,}6t) \cdot 25.10^{-2} = 0{,}245 + 3{,}15t$$

Tabla II

Tiempo/s	0	0,130	0,163	0,195	0,228	0,260	0,293	0,325	0,358
$v_{CM}/m.s^{-1}$	0,245	0,655	0,758	0,859	0,963	1,064	1,168	1,269	1,373

Con los datos e la tabla II represente en el eje de abscisas el tiempo y en el de ordenadas la velocidad



h) Calcule el momento de inercia del listón respecto del eje que pasa por el agujero 3, tal como se observa en la fotografía 3.

Aplicando el teorema de Steiner

$$I_3 = I_{CM} + m\,D^2 = \frac{1}{12} \cdot 51{,}56.10^{-3} \cdot \left(91{,}9.10^{-2}\right)^2 + 51{,}56.10^{-3} \cdot \left(25.10^{-2}\right)^2 = 6{,}85.10^{-3}\,kg.m^2$$

i) Calcule la energía de rotación del listón en las posiciones t_1 y t_8

$$E_{CR1} = \frac{1}{2} I_3 \omega^2 = \frac{1}{2}\ 6{,}85.10^{-3} \cdot \left(0{,}98 + 12{,}6 t_1\right)^2 = \frac{6.85.10^{-3}}{2} \cdot (0{,}98 + 12{,}6 \cdot 0{,}130)^2 = 2{,}35.10^{-2}\,\mathrm{J}$$

$$E_{CR8} = \frac{1}{2} I_3 \omega^2 = \frac{1}{2} 6{,}85.10^{-3} \cdot \left(0{,}98 + 12{,}6 t_8\right)^2 = \frac{6{,}85.10^{-3}}{2} \cdot (0{,}98 + 12{,}6 \cdot 0{,}358)^2 = 10{,}33.10^{-2}\,\mathrm{J}$$

j) Calcule la altura del centro de masas del listón respecto de la posición horizontal para los tiempos t_1 y t_8.

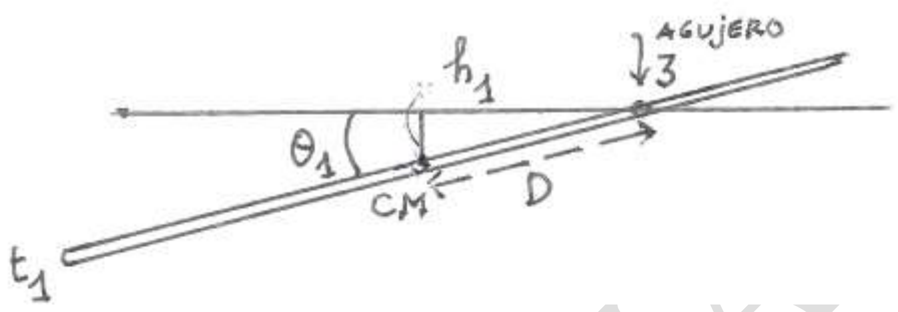


Figura 1

En la figura 1 se ha representado el listón y la posición t_1. Se deduce

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{h_1}{D} \quad \Rightarrow \quad h_1 = D\operatorname{sen}\theta_1 = 25.10^{-2} \cdot \operatorname{sen}13{,}4^\circ = 0{,}058\,\mathrm{m}$$

$$\operatorname{sen}\theta_8 = \frac{h_8}{D} \quad \Rightarrow \quad h_8 = D\operatorname{sen}\theta_8 = 25.10^{-2} \cdot \operatorname{sen}65{,}5^\circ = 0{,}227\,\mathrm{m}$$

k) Haga un balance de energía del listón para los tiempos t_1 y t_8, tomando como referencia de energía la posición horizontal h=0..

Tomamos como referencia h=0 en la línea horizontal dónde está situado inicialmente el listón. En consecuencia, las energías potenciales gravitatorias se van a considerar negativas cuando el listón se deje libre y empiece a girar. El principio de conservación de la energía mecánica no es aplicable porque tenemos fuerzas disipativas como son las del rozamiento con el eje y con el aire, cuyo trabajo W es el que queremos determinar, Aplicamos el principio de conservación de la energía en sentido más amplio sabiendo que en el instante inicial la energía del sistema es nula. En cualquier posición

$$E_p + E_{CR} + W_d = 0$$

Para la posición correspondiente a t_1

$$E_{p_1} + E_{CR1} + W_{d1} = -51{,}56.10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}058 + 2{,}35.10^{-2} + W_{d1} = 0 \;\Rightarrow\quad W_{d1} = 5{,}81.10^{-3}\,\mathrm{J}$$

Para la posición correspondiente a t_8

$$E_{p8} + E_{CR8} + W_{d8} = -51{,}56.10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}227 + 10{,}33.10^{-2} + W_{d8} = 0 \quad \Rightarrow W_{d8} = 11{,}40.10^{-3}\,\mathrm{J}$$

Los resultados indican que la disipación de energía aumenta a medida que el listón desciende.

l) Determine si en el desplazamiento del listón desde el tiempo t_1 al tiempo t_8 hay pérdida de energía mecánica y en caso positivo calcule su cuantía.

En el apartado anterior W_{d1} representa la energía disipada desde la posición h=0 a la posición t_1 y W_{d8} la energía disipada desde h=0 a la posición t_2. La disipación de energía entre t_1 y t_8 es:

$$W = W_{d8} - W_{d1} = 11{,}40.10^{-3} - 5{,}81.10^{-3} = 5{,}6.10^{-3}\,\mathrm{J}$$

Otra forma de calcular W es tomar como referencia de energía potencial, la horizontal de la posición del centro de masas de t_1 adjudicando un valor cero

La energía mecánica en la posición t_1 vale

$$E_1 = \mathrm{E.cinética} + \mathrm{Epotencial} = 2{,}35.10^{-2} - 0 = 2{,}35.10^{-2} \quad \Rightarrow \quad E_1 = 2{,}35.10^{-2}\,\mathrm{J}$$

La energía mecánica en la posición t_8 vale

$$E_8 = \mathrm{E.cinética} + \mathrm{Epotencial} = 10{,}33.10^{-2} - mg(h_8 - h_1) \Rightarrow$$
$$E_8 = 10{,}33.10^{-2} - 51{,}56.10^{-3} \cdot 9{,}8 \cdot (0{,}227 - 0{,}058) \Rightarrow \quad E_8 = 1{,}79.10^{-2}\,\mathrm{J}$$

Si E_1 fuese igual a E_8 no habría disipación de energía, pero al ser $E_8 < E_1$ se ha perdido energía mecánica que se habrá convertido en otro tipo de energía. La diferencia es esa pérdida de energía

$$W = 2{,}35.10^{-2} - 1{,}79.10^{-2} = 5{,}6.10^{-3}\,\mathrm{J}$$