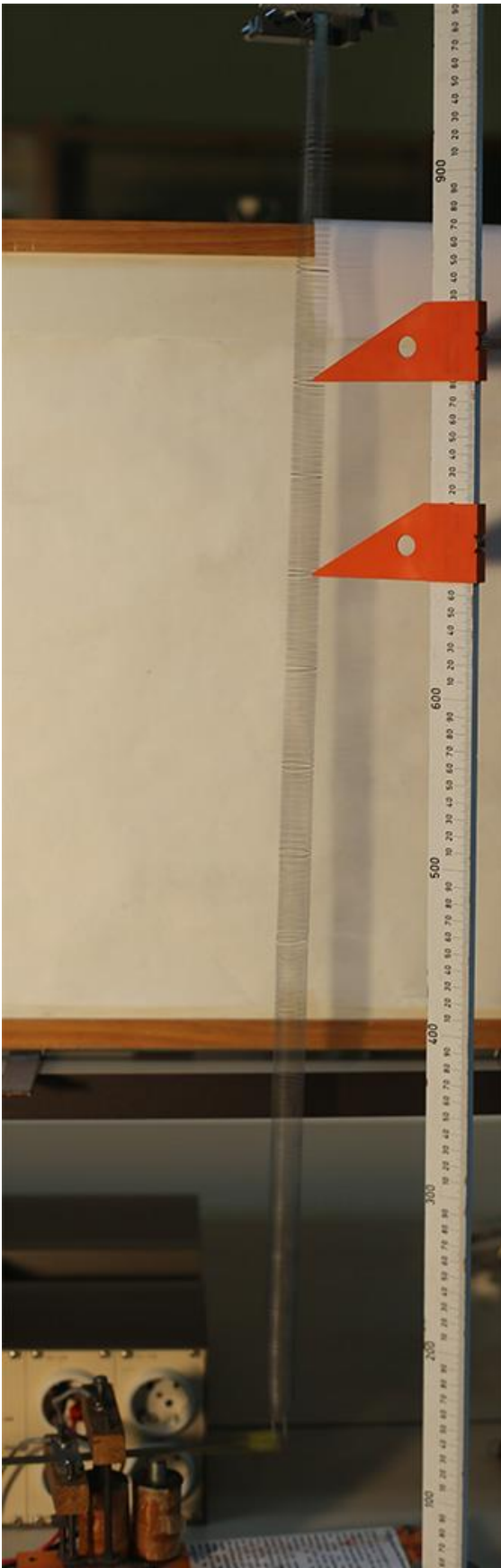
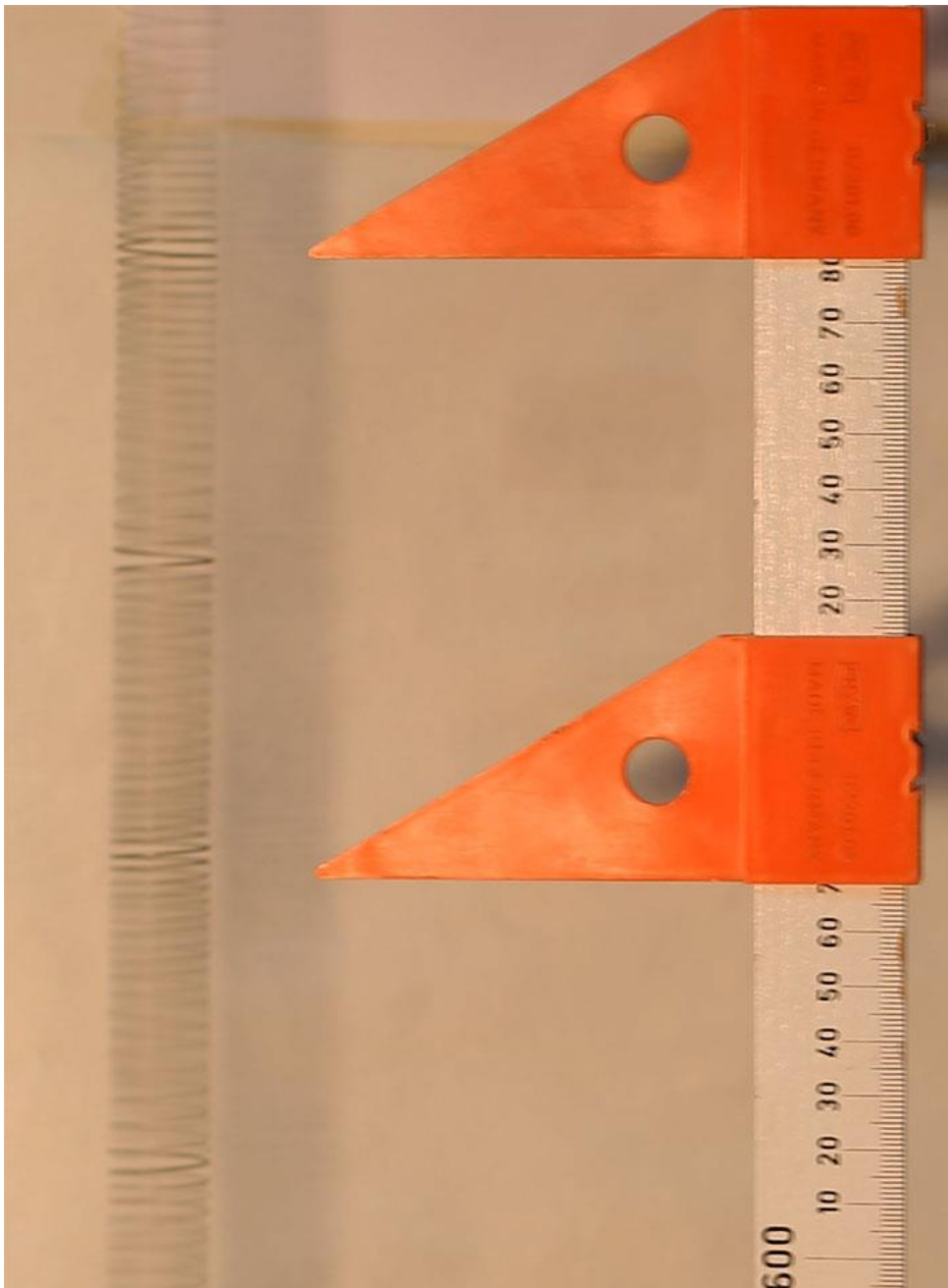


PROBLEMAS CON IMAGEN. MECÁNICA

ONDAS ESTACIONARIAS***



Fotografía1



Fotografía 2

En la fotografía 1 se observa un muelle colocado de forma vertical. El extremo superior está fijo y el inferior está unido a una varilla que vibra y transmite esa vibración al muelle. La fotografía 2 es una ampliación de la 1 y se observa que hay espiras del muelle que no vibran, son las que en la fotografía su imagen es nítida, las cuales aparecen separadas entre sí por la misma distancia. Entre dos espiras que no vibran la fotografía aparece borrosa porque esas espiras están vibrando. El fenómeno se conoce como *ondas estacionarias*.

Se producen cuando una onda progresiva que se propaga por un medio elástico llega al final del mismo y sufre una reflexión. Si el extremo es fijo, como sucede en nuestro caso, en el que la última espira está fuertemente acoplada a una mordaza y no puede vibrar, se produce la reflexión de la onda, experimentando un cambio de fase de 180° y comienza su propagación en sentido contrario. La interferencia producida en el medio por la propagación de estas dos ondas desplazándose en sentidos contrarios es la llamada onda estacionaria, ya que una vez establecida da la impresión de que no avanza,

de hecho hay espiras que nunca vibran y se denominan *nodos* y otras que lo hacen con la máxima amplitud que se conocen como *vientres o antinodos*.

Las ondas estacionarias se producen cuando dos ondas de la misma velocidad, frecuencia y amplitud se propagan en sentido opuesto en un mismo medio. Aquí el medio es el muelle y la propagación es mediante ondas longitudinales. Las ecuaciones de propagación son:

$$z_1 = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right) \quad ; \quad z_2 = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)$$

La onda estacionaria es por el principio de propagación $z_E = z_1 + z_2$

- a) Obtenga la ecuación de la onda estacionaria z_E . Para ello ha de utilizar la relación trigonométrica

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

La ecuación de z_E que habrá de obtener contiene dos términos, uno que no depende del tiempo y otro que si depende. El término independiente del tiempo está ligado a la función coseno y a la amplitud. Los nodos tienen amplitud cero. Con la ecuación obtenida en a) y esta información determine la posición de los nodos. La ecuación que obtenga depende de la longitud de onda.

- b) Calcule la distancia entre dos nodos consecutivos.
c) Con la ecuación obtenida en b) y la fotografía 2 calcule la longitud de onda de las ondas que forman la onda estacionaria.
d) A partir de la ecuación de z_E encuentre la ecuación que determina los antinodos o vientres de la onda estacionaria que son aquellos que su amplitud es la máxima posible
e) Para la longitud de onda calculada en el apartado c) el periodo es 0,037 s. Calcule la velocidad de propagación de la onda.
f) Calcule la distancia entre dos vientres consecutivos y entre un nodo y el siguiente vientre

SOLUCIÓN

$$z_E = z_1 + z_2 = z_1 = A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right) + A \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right) =$$

a)

$$= 2A \operatorname{sen} 2\pi \frac{\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right) + \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}{2} \cos 2\pi \frac{\left(\frac{t}{T} + \frac{z}{\lambda} \right) - \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} \right)}{2} = 2A \cos 2\pi \frac{z}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}$$

z_E es cero cuando lo sea el coseno que figura en la ecuación

$$\cos 2\pi \frac{z}{\lambda} = 0$$

Si el coseno es igual a cero el ángulo ha de valer $2\pi \frac{z}{\lambda} = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \dots$

La solución son los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$, podemos escribir la solución

$$2\pi \frac{z}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow z = (2n+1) \frac{\lambda}{4}; n=0, 1, 2 \dots$$

Todos los lugares del muelle que cumplan esta ecuación son los nodos.

b) Si un nodo cumple la ecuación $(2n+1) \frac{\lambda}{4}$, el nodo siguiente $n' = n+1$ y su ecuación

$$[(2n'+1)] \frac{\lambda}{4} = [2(n+1)+1] \frac{\lambda}{4}.$$

La distancia entre estos dos nodos consecutivos es

$$d = [2(n+1)+1] \frac{\lambda}{4} - [2(n+1)] \frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{4} (2n+3-2n-1) = \frac{\lambda}{2}$$

c) La distancia marcada por los indicadores de la regla es una longitud de onda, por ser la distancia entre un nodo de orden n y otro de orden $n+2$. Leyendo en la regla

$$\lambda = 782 - 669 = 113 \text{ mm} = 0,113 \text{ m}$$

d) $z_E = 2A \cos 2\pi \frac{z}{\lambda} \cdot \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{T}$

Los puntos que puedan alcanzar una amplitud máxima están condicionado por el valor del coseno que puede ser $+1$ y -1

$$\begin{aligned} \cos 2\pi \frac{z}{\lambda} = \pm 1 &\Rightarrow 2\pi \frac{z}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = n \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Como esos puntos dependen también de la función seno que puede tener los valores extremos $+1$ y -1 , esos puntos vibran separándose de la posición de equilibrio a una distancia comprendida entre $+2A$ y $-2A$

Un ejemplo. Elegimos un vientre con $n=1$, $z = \frac{\lambda}{2}$, sustituyendo en z_E .

$$z_E = 2A \cos 2\pi \frac{\lambda}{2} \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} = 2A \cos \pi \sin 2\pi \frac{t}{T} = -2A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Damos valores a la variable t en función de T

$$t = 0 \Rightarrow z_E = -2A \sin 0 = 0 \quad ;$$

$$t = \frac{T}{8} \Rightarrow z_E = -2A \sin 2\pi \frac{\frac{T}{8}}{T} = -2A \sin \frac{\pi}{4} = -1,414 A$$

$$t = \frac{2T}{8} \Rightarrow z_E = -2A \sin 2\pi \frac{\frac{2T}{8}}{T} = -2A \sin \frac{\pi}{2} = -2A \quad ;$$

$$t = \frac{3T}{8} \Rightarrow z_E = -2A \sin 2\pi \frac{\frac{3T}{8}}{T} = -2A \sin \frac{3\pi}{4} = -2A$$

$$t = \frac{4T}{8} \Rightarrow z_E = -2A \sin 2\pi \frac{\frac{4T}{8}}{T} = -2A \sin \pi = 0$$

$$t = \frac{5T}{8} \Rightarrow z_E = -2A \sin 2\pi \frac{\frac{5T}{8}}{T} = -2A \sin \frac{5\pi}{4} = -2A \cdot (-0,707) = 1,414 A$$

$$t = \frac{6T}{8} \Rightarrow z_E = -2A \sin 2\pi \frac{\frac{6T}{8}}{T} = -2A \sin \frac{3\pi}{2} = -2A \cdot (-1) = 2A$$

$$t = \frac{7T}{8} \Rightarrow z_E = -2A \sin 2\pi \frac{\frac{7T}{8}}{T} = -2A \sin \frac{7\pi}{4} = -2A \cdot (-0,707) = 1,414 A$$

$$t = \frac{8T}{8} = T \Rightarrow z_E = -2A \sin 2\pi \frac{T}{T} = -2A \sin 2\pi = 0$$

Este vientre oscila pasando por las posiciones extremas $+2A$ a $-2A$

$$e) \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,113 \text{ m}}{0,037 \text{ s}} = 3,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$f) \quad d_V = (n+1) \frac{\lambda}{2} - n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

$$d_{NV} = (2n+1) \frac{\lambda}{4} - n \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{4}$$

Esta es la disposición simétrica de los vientres y los nodos en las fotografías. El vientre está entre dos nodos o el nodo entre dos vientres.

..... N V N V N V