***239.-*** *(616).-**Un observador en reposo sobre una carretera horizontal está determinando la velocidad de un vehículo que está dotado de una fuente de sonido cuya frecuencia es directamente proporcional a su velocidad. El vehículo pasa por delante del observador dos veces con velocidades constantes $v_1$ y $v_2$. Durante la primera pasada el observador determina que la frecuencia del sonido cuando el vehículo se acerca hacia él es dos veces mayor que cuando se aleja. En la segunda pasada la frecuencia que mide el observador cuando el vehículo se acerca hacia él es la misma que midió en la primera pasada cuando el vehículo se alejaba de él. La velocidad del sonido es c= 330 m/s. Calcular las velocidades $v_1$ y $v_2$.***

La frecuencia medida por un observador respecto de una fuente sonora en movimiento está regida por el efecto Doppler

$$f_m = f_F \frac{c \pm v_O}{c \mp v_F}$$

$f_F$ es la frecuencia con que emite la fuente sonora, c es la velocidad del sonido , $v_O$ la velocidad del observador y $v_F$ la velocidad de la fuente. En el problema vo=0 ya que el observador está en reposo y $f_F$= kv , siendo k una constante.

Primera pasada acercándose el vehículo al observador

$$f_1 = f_F \frac{c}{c - v_1} = kv_1 \frac{c}{c - v_1}$$

Primera pasada alejándose el vehículo del observador

$$f_{12} = kv_1 \frac{c}{c + v_1} \text{ siendo } f_{12} = \frac{f_1}{2}$$

De ambas ecuaciones

$$kv_1 \frac{c}{c - v_1} = 2kv_1 \frac{c}{c + v_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{c - v_1} = \frac{2c}{c + v_1} \quad \Rightarrow \quad c + v_1 = 2c - 2v_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{c}{3} = \frac{330}{3} = 110 \frac{m}{s}$$

Segunda pasada acercándose el vehículo al observador

$$f_2 = kv_2 \frac{c}{c - v_2} = f_{12} = kv_1 \frac{c}{c + v_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_2}{c - v_2} = \frac{v_1}{c + v_1} \quad \Rightarrow \frac{v_2}{330 - v_2} = \frac{110}{440} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4v_2 = 330 - v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{330}{5} = 66 \frac{m}{s}$$

***240.-(620).- Un deposito cilíndrico tiene una altura H y un radio de la base R. Recibe agua a razón de $Q_E$ $m^3/s$. En su parte inferior tiene un orificio circular de área S. Inicialmente el depósito está vacío. Se pide determinar el tiempo de llenado. Se supone que el agua se comporta como un fluido ideal.***
***Calcular el tiempo si $Q_E$ = 10 L/s , H= 2m , R = 1 m , S= 4 cm²***

En la figura 1 consideramos que el nivel en el depósito en un determinado instante es h.

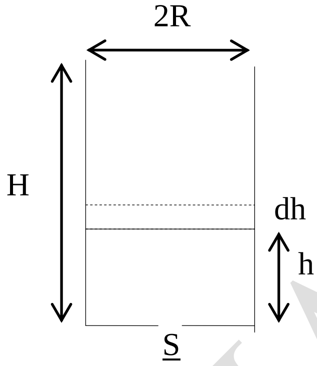



Fig 1

Transcurrido un tiempo posterior dt, en el depósito han entrado $Q_E dt\ m^3$ de agua y han salido por el orificio $QS = S\,v\,dt = S\sqrt{2gh}\,dt\ m^3$

La diferencia entre los dos valores es el agua que ase almacena en el depósito y forma una capa de sección $\pi R^2$ y altura dh. El volumen de esa capa es: $V = \pi R^2 dh$

$$Q_E\,dt - S\sqrt{2gh}\,dt = \pi R^2 dh$$

Sustituimos la variable h por la variable v

$$v^2 = 2gh \;\Rightarrow\; 2v\,dv = 2g\,dh \;\Rightarrow\; dh = \frac{v\,dv}{g}$$

$$dt = \frac{\pi R^2 \frac{v\,dv}{g}}{Q_E - Sv} \qquad \int dt = \int \frac{\pi R^2 v}{g(Q_E - Sv)} dv \;\Rightarrow\; t = \frac{\pi R^2}{g}\int \frac{v}{Q_E - Sv} dv \quad (1)$$

Para resolver la integral hacemos el cambio de variable

$$Q_E - Sv = P \;\Rightarrow\; -S\,dv = dP \;\Rightarrow\; dv = -\frac{dP}{S} \;;\quad v = \frac{Q_E - P}{S}$$

Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{v}{Q_E - Sv} dv = \int \frac{\frac{Q_E - P}{S}}{P} \left(-\frac{dP}{S}\right) = -\int \frac{Q_E - P}{S^2 P} dP = -\int \frac{Q_E}{S^2} \frac{dP}{P} - \left(\int -\frac{dP}{S^2}\right) = -\frac{Q_E}{S^2} \ln P + \frac{P}{S^2} =$$

$$\int \frac{v}{Q_E - Sv} dv = -\frac{Q_E}{S^2} \ln(Q_E - Sv) + \frac{Q_E - Sv}{S^2}$$

Poniendo límites a la ecuación (1)

$$t = \frac{\pi R^2}{g} \int_0^{\sqrt{2gH}} \frac{v}{Q_E - v} = \frac{\pi R^2}{g} \left[ -\frac{Q_E}{S^2} \ln(Q_E - Sv) + \frac{Q_E - Sv}{S^2} \right]_0^{\sqrt{2gH}}$$

$$t = \frac{\pi R^2}{g} \left[ -\frac{Q_E}{S^2} \ln(Q_E - S\sqrt{2gH}) - \left( -\frac{Q_E}{S^2} \ln Q_E \right) \right] + \frac{\pi R^2}{g} \left[ \frac{Q_E - S\sqrt{2gH}}{S^2} - \frac{Q_E}{S^2} \right]$$

$$t = \frac{\pi R^2}{g} \left[ \frac{Q_E}{S^2} \ln \frac{Q_E}{\left(Q_E - S\sqrt{2gH}\right)} \right] + \frac{\pi R^2}{g} \left[ -\frac{\sqrt{2gH}}{S} \right]$$

$$t = \frac{\pi R^2}{S^2 g} \left[ Q_E \ln \frac{Q_E}{(Q_E - S\sqrt{2gH})} - S\sqrt{2gH} \right]$$

$$t = \frac{\pi}{16.10^{-8} \cdot 9{,}8} \left[ 10^{-2} \ln \frac{10^{-2}}{10^{-2} - 4.10^{-4}\sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2}} - 4.10^{-4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 2} \right]$$

$$t = 2{,}004.10^{6} \cdot (0{,}288.10^{-2} - 6{,}261.10^{-4}) = 4{,}52.10^{3}\,s = 1{,}25\,\text{horas}$$

***241.*- *(622).-Un cono de madera de radio R y altura H y densidad 800 kg/m³, flota en posición vertical en un líquido de densidad 1200 kg/m³. Calcular la relación entre la altura de la parte sumergida y la altura H del cono***

Cálculo del peso del cono

$$P = V\,d\,g = \frac{1}{3}\pi R^2 H \cdot 800 \cdot g$$

Designamos con h la altura del cono sumergido en el fluido y calculamos el volumen de la parte sumergida

$$V_S = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H-h) = \frac{1}{3}\pi\left[R^2 H - r^2 (H-h)\right]$$

Con r se designa al radio de la base del cono que esta a una altura h y que está situada sobre la superficie del líquido.

Los radios R y r están relacionados entre sí

$$\frac{R}{H} = \frac{r}{H-h} \;\Rightarrow\; r = \frac{R\,(H-h)}{H}$$

Sustituyendo en el volumen sumergido

$$V_S = \frac{1}{3}\pi\left[R^2 H - \frac{R^2 (H-h)^3}{H^2}\right] = \frac{1}{3}\pi R^2\left[H - \frac{(H-h)^3}{H^2}\right]$$

El empuje vale

$$E = V_S \cdot 1200 \cdot g = \frac{1}{3}\pi R^2\left[H - \frac{(H-h)^3}{H^2}\right] \cdot 1200 \cdot g$$

Igualando el peso del cono al empuje

$$\frac{1}{3}\pi R^2 H \cdot 800 \cdot g = \frac{1}{3}\pi R^2\left[H - \frac{(H-h)^3}{H^2}\right] \cdot 1200 \cdot g \;\Rightarrow\; 2H = 3H - 3\frac{(H-h)^3}{H^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H^3 = 3(H-h)^3 \;\Rightarrow\; H = \sqrt[3]{3}\,(H-h) \;\Rightarrow\; H = 1{,}442H - 1{,}442h \quad \frac{h}{H} = \frac{0{,}442}{1{,}442} = 0{,}31$$

***242.-*** *(626).-* ***Dos partículas se desplazan sobre el eje X. Una sale del origen con velocidad inicial $v_{o1}$ y aceleración $a_1$ La otra parte de un punto del eje X (designado $s_o$) con velocidad inicial $v_{o2}$ y aceleración $a_2$. Ambas salen en el mismo instante y coinciden en el mismo punto y además con la misma velocidad. Calcular $s_o$***

***Construir las gráficas posiciones tiempos y velocidades tiempos para $v_{o1}$= 6 m/s ; $v_{o2}$= 1,5 m/s ; $a_1$= 0,5 m/s$^2$ ; $a_2$ = 2 m/s$^2$***

Las ecuaciones de las partículas son.

$$s_1 = v_{o1}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 \quad ; \qquad v_1 = v_{o1} + a_1 t$$

$$s_2 = s_o + v_{o2}t + \frac{1}{2}a_2 t^2 \qquad v_2 = v_{o2} + a_2 t$$

Según las condiciones del problema

$$s_1 = s_2 \quad \Rightarrow v_{o1}t + \frac{1}{2}a_1 t^2 = s_o + v_{o2}t + \frac{1}{2}a_2 t^2 \quad \Rightarrow \quad s_o = t(v_{o1} - v_{o2}) + \frac{1}{2}t^2(a_1 - a_2) \qquad (1)$$

$$v_1 = v_2 \quad \Rightarrow \quad v_{o1} + a_1 t = v_{o2} + a_2 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{o1} - v_{o2}}{a_2 - a_1} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$s_o = \frac{v_{o1} - v_{o2}}{a_2 - a_1}(v_{o1} - v_{o2}) + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{o1} - v_{o2}}{a_2 - a_1}\right)^2 (a_1 - a_2) = \frac{(v_{o1} - v_{o2})^2}{a_2 - a_1} - \frac{1}{2}\frac{(v_{o1} - v_{o2})^2}{a_2 - a_1} \quad \Rightarrow$$

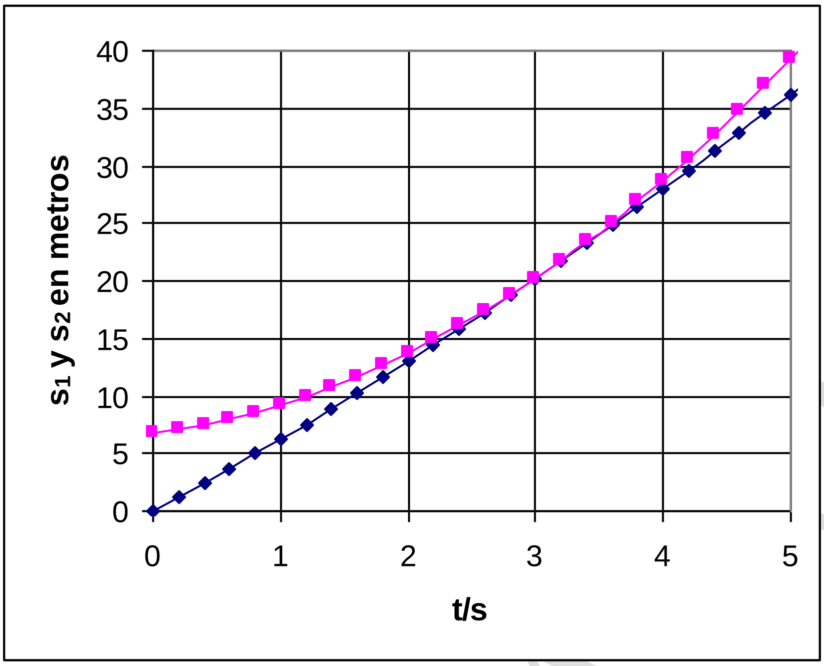
$$\Rightarrow s_o = \frac{1}{2}\frac{(v_{o1} - v_{o2})^2}{a_2 - a_1}$$

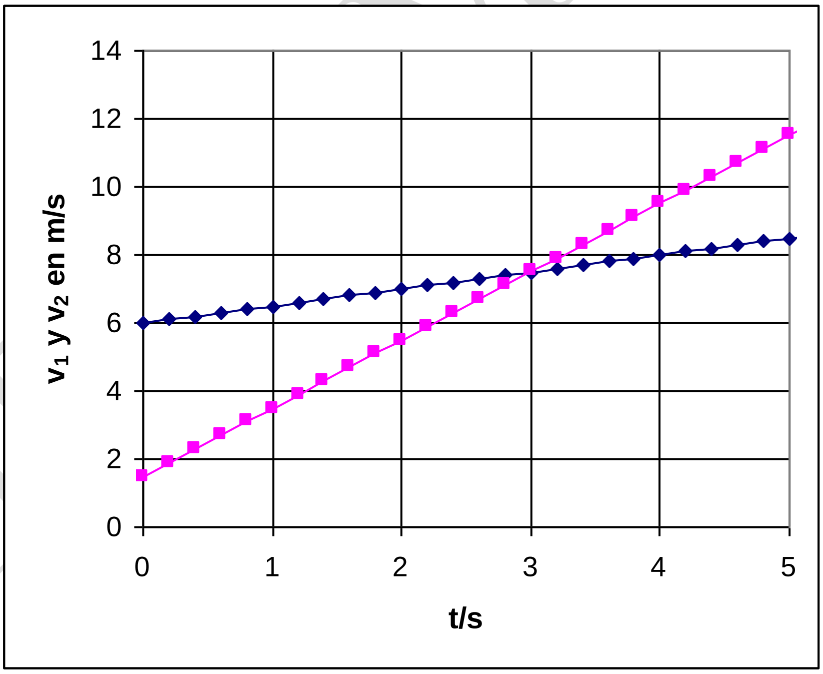
Sustituyendo valores numéricos en so

$$s_o = \frac{1}{2}\frac{(6 - 1{,}5)^2}{(2 - 0{,}5)} = 6{,}75\,\mathrm{m}$$

Sustituyendo valores numéricos en (2) obtenemos el tiempo para el que se igualan posiciones y velocidades

$$t = \frac{6 - 1{,}5}{2 - 0{,}5} = 3\,\mathrm{s}$$


40
35
30
25
20
15
10
5
0
s1 y s2 en metros
0
1
2
3
4
5
t/s


14
12
10
8
6
4
2
0
v1 y v2 en m/s
0
1
2
3
4
5
t/s

***243.-** 632.-**Se lanza un proyectil desde un suelo horizontal (coordenadas 0,0) con una velocidad inicial $v_o$ y un ángulo de lanzamiento $\alpha$. El proyectil vuelve a tierra a una distancia L del punto de lanzamiento. Con la misma velocidad y el mismo ángulo se lanza un segundo proyectil pero desde una torre (coordenadas 0, $h_1$) y llega al suelo a una distancia S de la coordenada (0,0). Un tercer proyectil se lanza desde la misma torre pero a una altura $h_2$, con la misma velocidad inicial $v_o$ pero con un ángulo $\alpha$ por debajo de la horizontal y llega al suelo a la misma distancia S.***

***a) Deducir la ecuación que relaciona $h_2$ con $h_1$, L y S.***

***b) Construir las gráficas del moviendo de los dos últimos proyectiles en función del tiempo, para $v_o$=20 m/s , L=40 m , $h_1$= 12 m***

***c) Determinar la altura máxima del proyectil lanzado desde $h_1$***

***d) Calcular las velocidades de los proyectiles segundo y tercero al llegar al suelo***

***e) Calcular los ángulos que forman los vectores velocidad con el eje horizontal al chocar los proyectiles con el suelo***

*Ecuaciones del primer proyectil*

$$x = v_o(\cos\alpha)t \ \ ; \ \ y = v_o(\operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}g t^2$$

Cuando el proyectil llegue al suelo y=0; designamos con $t_1$ el tiempo empleado en el vuelo

$$0 = v_o(\operatorname{sen}\alpha)t_1 - \frac{1}{2}g t_1^2 \ \Rightarrow v_o\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}g t_1 \ \Rightarrow t_1 = \frac{2v_o\operatorname{sen}\alpha}{g} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ x = L = v_o(\cos\alpha)t_1 = v_o(\cos\alpha)\cdot\frac{2v_o\operatorname{sen}\alpha}{g} \ \Rightarrow \ \ L = \frac{2v_o^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g} \quad (1)$$

*Ecuaciones del segundo proyectil*

$$x = v_o(\cos\alpha)t \ ; \ y = h_1 + v_o(\operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}g t^2$$

Cuando el proyectil llegue al suelo y=0; designamos con $t_2$ el tiempo empleado en el vuelo

$$x = S = v_o(\cos\alpha)t_2 \quad (2) \ ; \ \ 0 = h_1 + v_o(\operatorname{sen}\alpha)t_2 - \frac{1}{2}g t_2^2 \quad (3)$$

*Ecuaciones del tercer proyectil*

$$x = v_o(\cos\alpha)t \ \ ; \ y = h_2 - v_o(\operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}g t^2$$

Cuando el proyectil llegue al suelo y=0; designamos con $t_3$ el tiempo empleado en el vuelo

$$x = S = v_o(\cos\alpha)t_3 \ (4) \ ; \ \ 0 = h_2 - v_o(\operatorname{sen}\alpha)t_3 - \frac{1}{2}g t_3^2 ...(5)$$

De las ecuaciones (2) y (4) se deduce que: $t_2 = t_3$

Sumamos y restamos las ecuaciones (3) y (5)

$$h_1 + h_2 = g\,t_2^2 \quad (6)\ ; \qquad h_2 - h_1 = 2\,v_o(\operatorname{sen}\alpha)\,t_2 \quad (7)$$

Dividiendo (6) entre (7) y sustituyendo g de (1) y $t_2$ de (2)

$$\frac{h_1 + h_2}{h_2 - h_1} = \frac{g\ t_2}{2\,v_o \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\dfrac{2\,v_o^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{L}\ \dfrac{S}{v_o\cos\alpha}}{2\,v_o\operatorname{sen}\alpha} = \frac{S}{L} \ \Rightarrow\ h_1 L + h_2 L = h_2 S - h_1 S \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad h_1(L+S) = h_2(S-L)\ \Rightarrow h_2 = h_1\,\frac{L+S}{S-L}$$

Al fijar los valores de la velocidad inicial y del alcance se determina el ángulo de lanzamiento

$$L = \frac{2\,v_o^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g} \ \Rightarrow \operatorname{sen}2\alpha = \frac{L\,g}{v_o^2} = \frac{40\cdot 9{,}8}{20^2} = 0{,}98 \ \Rightarrow 2\alpha = 78{,}5^{\circ}$$

$$0 = 12 + 20\operatorname{sen}\frac{78{,}5}{2}\,t_2 - \frac{1}{2}9{,}8\,t_2^2\ ;\ 4{,}9\,t^2 - 12{,}65\,t - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$t_2 = \frac{12{,}65 \pm \sqrt{12{,}65^2 + 4\cdot 4{,}9\cdot 12}}{9{,}8} = \frac{12{,}65 \pm 19{,}88}{9{,}8} = 3{,}32\ \mathrm{s}$$

$$S = v_o\cos\alpha\, t_2 = 20\cdot\cos\frac{78{,}5}{2}\cdot 3{,}32 = 51{,}4\ \ \mathrm{m}$$

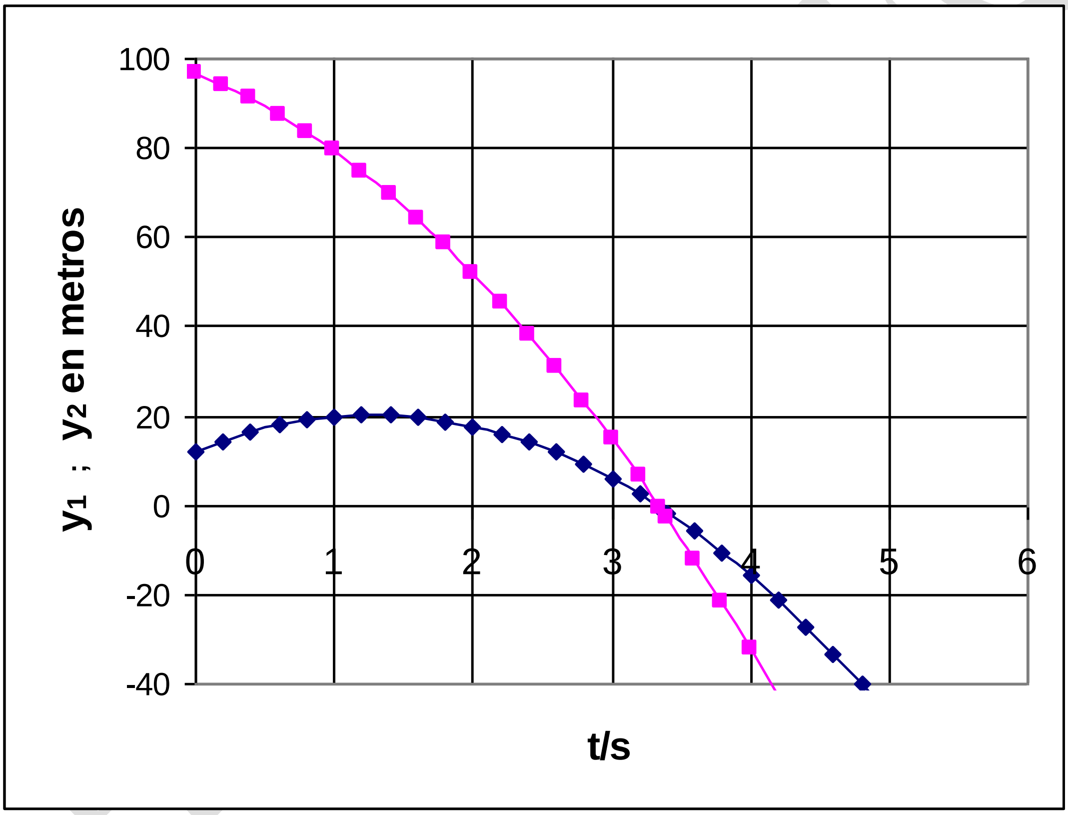
Las ecuaciones del los movimientos de los proyectiles son:

$$h_2 = 12\,\frac{40 + 51{,}4}{51{,}4 - 40} = 96{,}2$$

$$y_1 = 12 + 20\,\text{sen}\frac{78{,}5}{2}\,t - \frac{1}{2}9{,}8\,t^2 = 12 + 12{,}65t - 4{,}9\,t^2$$

$$y_2 = 96{,}2 - 20\,\text{sen}\frac{78{,}5}{2}\,t - \frac{1}{2}9{,}8\,t^2 = 96{,}2 - 12{,}65t - 4{,}9\,t^2$$

Damos valores numéricos a la variable t de las ecuaciones anteriores y dibujamos las gráficas




c) La altura máxima la obtenemos derivando la función $h_1(t)$ con respecto al tiempo e igualando a cero

$$\frac{dh_1}{dt} = 12{,}65 - 9{,}8\,t_M \quad \Rightarrow \quad t_M = \frac{12{,}65}{9{,}8} = 1{,}29\,s$$

$$y_M = 112 + 12{,}65 \cdot 1{,}29 - 4{,}9 \cdot 1{,}29^2 = 20{,}2\,m$$

d)

$$v_{1x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left[v_o\,(\cos\alpha)\,t\right]}{dt} = v_o\cos\alpha = 20\cdot\cos\frac{78{,}5}{2} = 15{,}5\ \frac{m}{s}$$

$$v_{1y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(h_1 + v_o(\text{sen}\,\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)}{dt} = v_0\,\text{sen}\,\alpha - 9{,}8t = 20\cdot\text{sen}\ \frac{78{,}5}{2} - 9{,}8\cdot 3{,}32 = -19{,}9\,\frac{m}{s}$$

$$|v_1| = \sqrt{15{,}5^2 + (-19{,}9^2)} = 25{,}2\ \frac{m}{s}$$

$$v_{2x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left[v_o\,(\cos\alpha)\,t\right]}{dt} = v_o\cos\alpha = 20\cdot\cos\frac{78{,}5}{2} = 15{,}5\ \frac{m}{s}$$

$$v_{2y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(h_1 - v_o(\text{sen}\,\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)}{dt} = -v_0\,\text{sen}\,\alpha - 9{,}8t = -20\cdot\text{sen}\ \frac{78{,}5}{2} - 9{,}8\cdot 3{,}32 = -45{,}2\,\frac{m}{s}$$

$$|v_2| = \sqrt{15{,}5^2 + (-45{,}2^2)} = 47{,}8\ \frac{m}{s}$$

A estos resultados se puede llegar aplicando el principio de conservación de la energía mecánica

$$m\,g\,h_1 + \frac{1}{2}m\,v_o^2 = \frac{1}{2}m\,v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2\,g\,h_1 + v_o^2} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 12 + 20^2} = 25{,}2\,\frac{m}{s}$$

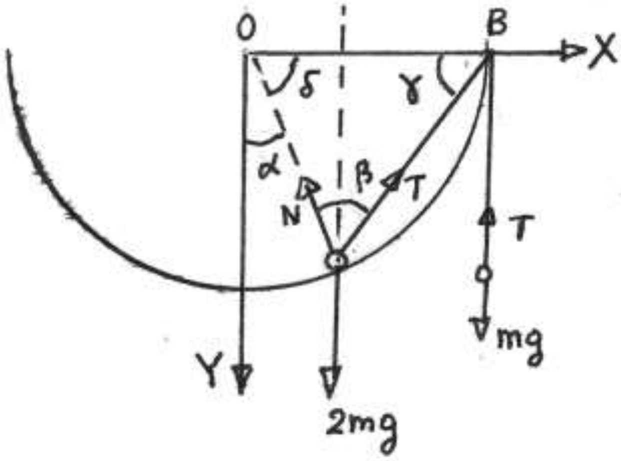
$$m\,g\,h_2 + \frac{1}{2}m\,v_o^2 = \frac{1}{2}m\,v_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2\,g\,h_2 + v_o^2} = \sqrt{2\cdot 9{,}8\cdot 96{,}2 + 20^2} = 47{,}8\,\frac{m}{s}$$

e)

$$\text{tag}\ \alpha_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \frac{-19{,}9}{15{,}5} = -1{,}28 \qquad \alpha_1 = -52{,}0^o$$

$$\text{tag}\ \alpha_2 = \frac{v_{2y}}{v_2 x} = \frac{-45{,}2}{15{,}5} = -2{,}92 \qquad \alpha_1 = -71{,}1^o$$

***244 (642).-Un hilo inextensible y de masa despreciable mantiene unidos y en equilibrio a dos cuerpos de masas 2m y m respectivamente, en la forma que indica la figura.***




***Se supone que no existe ningún rozamiento entre la masa 2m y el suelo de apoyo y tampoco en el punto B donde la cuerda se apoya y cambia su dirección. El radio del suelo es R. En la posición de equilibrio***
***a) Calcular el ángulo alfa. b) El valor de la reacción N en función de m.***

*No es necesario considerar las fuerzas sobre el suelo curvo y las actuantes en el punto B. Tómense solamente aquellas fuerzas que actúan sobre los elementos de nuestro sistema: las dos masas y el hilo.*

Dado que las masas están en equilibrio la suma vectorial de las fuerzas es nula. La masa 2 m está sometida a tres fuerzas: su peso 2mg, la fuerza N que ejerce el suelo sobre dicha masa y la tensión de la cuerda T,

Sobre el eje Y $\quad 2mg = N\cos\alpha + T\cos(\beta-\alpha)$

Sobre el eje X : $\quad N\,\mathrm{sen}\,\alpha = T\,\mathrm{sen}\,(\beta-\alpha)$

La masa m está sometida a dos fuerzas: su peso y la tensión de la cuerda T = m g

Sustituyendo T y N en la primera ecuación

$$2mg = \frac{T\mathrm{sen}\,(\beta-\alpha)}{\mathrm{sen}\alpha} + T\cos(\beta-\alpha) = \frac{mg\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha)}{\mathrm{sen}\alpha} + mg\cos(\beta-\alpha) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2 = \frac{\mathrm{sen}(\beta-\alpha)}{\mathrm{sen}\alpha} + \cos(\beta-\alpha)$$

De la figura se deduce $\beta = \gamma$ ; $\alpha$ y $\delta$ son ángulos complementarios

$$2\beta+\delta=180^{o}\ ;\quad \alpha+\delta=90^{o}\quad \Rightarrow\ 2\beta+90-\alpha=180^{o}\ \Rightarrow\ \beta=\frac{90^{o}+\alpha}{2}\ \Rightarrow\quad \beta=\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$$

$$\beta-\alpha=45+\frac{\alpha}{2}-\alpha=45-\frac{\alpha}{2}=D\quad \Rightarrow\qquad 2\,\mathrm{sen}\,\alpha=\mathrm{sen}\,D+\cos D\cdot\mathrm{sen}\,\alpha$$

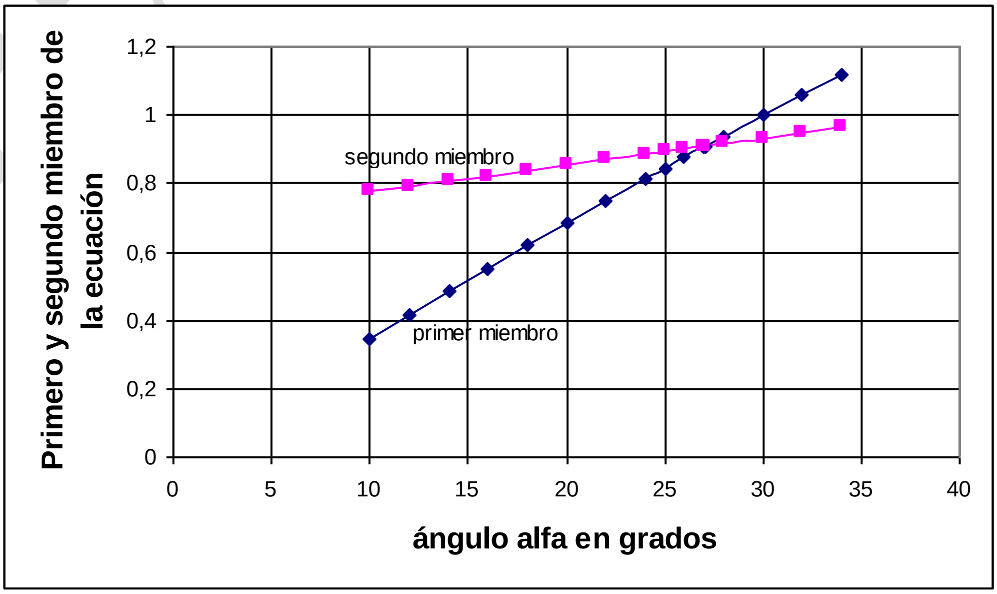
Para encontrar la solución de la ecuación trigonométrica lo haremos por tanteo, damos valores al ángulo alfa (α), hasta encontrar uno para el que sean iguales el primero y segundo miembro de la ecuación.

| α/grado | α/rad | *2·sen α* | D= 45-α/2 | D/rad | sen D | G= cosD·sen α | *F+G* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0,17453293 | *0,34729636* | 40 | 0,6981317 | 0,64278761 | 0,133022222 | *0,77580983* |
| 12 | 0,20943951 | *0,41582338* | 39 | 0,68067841 | 0,62932039 | 0,161577731 | *0,79089812* |
| 14 | 0,2443461 | *0,48384379* | 38 | 0,66322512 | 0,61566148 | 0,190637055 | *0,80629853* |
| 16 | 0,27925268 | *0,55127471* | 37 | 0,64577182 | 0,60181502 | 0,22013378 | *0,8219488* |
| 18 | 0,31415927 | *0,61803399* | 36 | 0,62831853 | 0,58778525 | 0,25 | *0,83778525* |
| 20 | 0,34906585 | *0,68404029* | 35 | 0,61086524 | 0,57357644 | 0,2801665 | *0,85374294* |
| 22 | 0,38397244 | *0,74921319* | 34 | 0,59341195 | 0,5591929 | 0,310562941 | *0,86975584* |
| 24 | 0,41887902 | *0,81347329* | 33 | 0,57595865 | 0,54463904 | 0,341118051 | *0,88575709* |
| 25 | 0,43633231 | *0,84523652* | 32,5 | 0,56723201 | 0,53729961 | 0,356432627 | *0,89373224* |
| 26 | 0,45378561 | *0,87674229* | 32 | 0,55850536 | 0,52991926 | 0,371759816 | *0,90167908* |
| 27 | 0,4712389 | *0,907981* | 31,5 | 0,54977871 | 0,52249856 | 0,387090534 | *0,9095891* |
| **27,069** | **0,47244318** | ***0,91012638*** | **31,4655** | **0,54917658** | **0,52198506** | **0,388148252** | ***0,91013331*** |
| 28 | 0,48869219 | *0,93894313* | 31 | 0,54105207 | 0,51503807 | 0,402415672 | *0,91745375* |
| 30 | 0,52359878 | *1* | 30 | 0,52359878 | 0,5 | 0,433012702 | *0,9330127* |
| 32 | 0,55850536 | *1,05983853* | 29 | 0,50614548 | 0,48480962 | 0,463477832 | *0,94828745* |
| 34 | 0,59341195 | *1,11838581* | 28 | 0,48869219 | 0,46947156 | 0,493738028 | *0,96320959* |

Comparando las columnas en cursiva que corresponden con cada uno de los miembros de la ecuación, se deduce que la solución es para un ángulo

$$\alpha=27{,}069^{o}$$

Vamos a resolver ahora el problema gráficamente utilizando la hoja de cálculo de EXCEL.



La solución es el punto donde coinciden las dos gráficas $\alpha = 27{,}069º$

***b) Determinación de la reacción en función de la masa m.***

A la derecha de la figura se observa que como estamos en una situación de equilibrio es T = m· g ; valor que llevamos a una de las ecuaciones.

$$N\,\mathrm{sen}\,\alpha = T\,\mathrm{sen}(\beta-\alpha) \;\Rightarrow\; N = \frac{mg\,\mathrm{sen}\left(45+\dfrac{\alpha}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{mg\,\mathrm{sen}\left(45-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,\alpha} \;\Rightarrow$$

$$N = \frac{9{,}8\,m\cdot\mathrm{sen}\left(45-\dfrac{27{,}069}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,27{,}069} = 11{,}2\ m$$

La solución es N = 11,2 ·m **N/kg**

***245 (650).- Una masa m se lleva desde un lugar situado a R/2 por encima del centro de la Tierra hasta su superficie. El trabajo necesario se designa $\tau_1$. Esa misma masa se lleva desde la superficie terrestre hasta una altura R/2 por encima de ella. Calcular la relación $\frac{\tau_1}{\tau_2}$. Suponer que la Tierra es una esfera homogénea de radio R.***

El módulo de la intensidad del campo gravitatorio, que se deduce a partir del teorema de Gauss

$$g = G\frac{M}{x^2}$$

G es la constante de Gravitación Universal.. Para una esfera, x es la distancia del lugar considerado medido desde el centro de la esfera y M es la masa encerada en una esfera concéntrica de radio x.. Para los puntos interiores de la Tierra (considerada como una esfera uniforme y por tanto con densidad ρ constante

$$g_i = G\frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho}{x^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho x$$

Según el problema x es una variable comprendida entre el punto de partida $x = R/2$ y $x = R$, esto significa que la intensidad del campo gravitatorio no es constante.. La fuerza que actúa sobre la masa m es

$$F = g_i\, m = \frac{4}{3}G\pi\rho m x$$

El trabajo para llevar esa m de un lugar x a uno x+dx vale

$$d\tau_1 = Fdx = \frac{4}{3}G\pi\rho m x\, dx$$

El trabajo total para llevar la masa m desde x= R/2 a R valle

$$\tau_1 = \int_{R/2}^{R}\frac{4}{3}G\pi\rho m x\, dx = \frac{4}{3}G\pi\rho m\left[\frac{x^2}{2}\right]_{R/2}^{R} = \frac{4}{3}G\pi\rho m\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{8}\right) = \frac{4}{3}G\pi\rho m\frac{3R^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_1 = \frac{1}{2}G\pi\rho m R^2$$

la densidad de la Tierra la ponemos en función de su masa y su radio $\rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\tau_1 = \frac{1}{2}G\pi\frac{3M_T}{4\pi R^3}mR^2 = \frac{3}{8}Gm\frac{M_T}{R}$$

La intensidad del campo gravitatorio para puntos situados entre x= R y $x = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ vale

$$g_e = G\frac{M_T}{x^2} \Rightarrow F = G\frac{M_T}{x^2}m$$

Puesto que cualquier esfera concéntrica de radio $x \geq R$ encierra la masa de la Tierra.

El trabajo para llevar esa m de un lugar x a uno x+dx vale

$$d\tau_2 = Fdx = G\frac{M_T\,m}{x^2}dx \quad \tau_2 = \int_R^{3R/2} G\,M_T m\,\frac{dx}{x^2} = G\,M_T m\left[-\frac{1}{x}\right]_R^{3R/2} = G\,M_T m\left(-\frac{2}{3R} + \frac{1}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tau_2 = G\,M_T m\frac{1}{3R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{3}{8}G\,m\frac{M_T}{R}}{G\,m\frac{M_T}{3R}} = \frac{9}{8}$$

***246 (652).- Un modelo ficticio de la Tierra es una esfera de radio R, con un núcleo que es una esfera de densidad constante $\rho$ y radio 3/4 R y un manto que es una corona esférica de espesor R/4 y densidad constante $\rho$/2.***
***1) Calcular el módulo de la intensidad del campo gravitatorio $g_N$ en la interfase entre el núcleo y el manto.***

***2) Calcular el módulo de la intensidad del campo gravitatorio $g_M$ en la superficie del manto***

***3) Determinar en % cuánto es mayor $g_N$ respecto del valor de $g_M$***

***4) Comprobar que el módulo de la intensidad del campo gravitatorio en un punto x del manto (3R/2< x< R) presenta un mínimo***

***De la revista: The Physics Teacher.Vol.30, Abil 1992***

1) La intensidad del campo gravitatorio $g_N$ se debe a la masa total del núcleo

$$g_N = G\frac{M_N}{R_N^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R_N^3\,\rho}{R_N^2} = \frac{4}{3}\pi\rho G R_N = \frac{4}{3}\pi\rho G\frac{3}{4}R = G\pi\rho R$$

2)

$$g_M = G\frac{M_N + M_M}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R_N^3\,\rho + \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - R_N^3\right)\frac{\rho}{2}}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi R_N^3\,\rho + \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - \left(\frac{3}{4}R\right)^3\right)\frac{\rho}{2}}{R^2} \Rightarrow$$

$$g_M = G\frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}R\right)^3\rho + \frac{2}{3}\pi\left(R^3 - \frac{27}{64}R^3\right)\rho}{R^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi\frac{27}{64}R^3\rho + \frac{2}{3}\pi\frac{37R^3}{64}\rho}{R^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad g_M = G\pi\rho R\left(\frac{9}{16} + \frac{37}{96}\right) \Rightarrow \frac{91}{96}G\pi\rho R$$

3)

$$\frac{G\pi\rho R(1 - \frac{91}{96}}{G\pi\rho R}\cdot 100\% = 5{,}2\,\%$$

La intensidad del campo gravitatorio en la interfase ( $g_N$) es un 5,2% mayor que en la superficie($g_M$).

4) Escogemos un punto que distan x del centro de la Tierra. Este punto está situado en el manto, siendo x una variable cuyos valores extremos son: el radio del núcleo ($R_N$) y el radio de la Tierra R

El módulo de la intensidad del campo gravitatorio en el punto x lo designamos $g_x$

$$g_x = G\frac{M_N + M_x}{x^2} = G\frac{M_T}{x^2} \quad (1)$$

$$M_N = V_N\,\rho = \frac{4}{3}\pi R_N^3\,\rho = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{4}R\right)^3\rho = \frac{9}{16}\pi\rho R^3$$

$$M_T = V_N\,\rho + V_x\frac{\rho}{2} = \frac{9}{16}\pi\rho R^3 + \frac{4}{3}\pi\left(x^3 - R_N^3\right) = \frac{9}{16}\pi\rho R^3 + \frac{4}{3}\pi\left[x^3 - \left(\frac{3}{4}R\right)^3\right]\frac{\rho}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; M_T = \frac{9}{16}\pi\rho R^3 + \frac{4}{3}\pi\left[x^3 - \frac{27}{64}R^3\right]\frac{\rho}{2} = \frac{9}{16}\pi\rho R^3 + \frac{2}{3}\pi\left[x^3 - \frac{27}{64}R^3\right]\rho \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad M_T = \pi\rho R^3\left(\frac{9}{16} - \frac{9}{32}\right) + \frac{2}{3}\pi x^3\rho = \frac{9}{32}\pi\rho R^3 + \frac{2}{3}\pi x^3\rho = \pi\rho\left(\frac{9}{32}R^3 + \frac{2}{3}x^3\right)$$

Sustituyendo $M_T$ en (1)

$$g_X = \frac{G\,\pi\rho\left(\frac{9}{32}R^3 + \frac{2}{3}x^3\right)}{x^2} \quad (2)$$

Para obtener el valor de x mínimo, derivamos (2) respecto de la variable x e igualamos a cero

$$\frac{dg_x}{dx} = G\,\pi\rho\,\frac{x^2\cdot 2x^2 - \left(\frac{9}{32}R^3 + \frac{2}{3}x^3\right)\cdot 2x}{x^4} = 0 \;\Rightarrow\qquad x^3 = \frac{9R^3}{32} + \frac{2}{3}x^3 \;\Rightarrow\; \frac{x^3}{3} = \frac{9R^3}{32} \;\Rightarrow$$

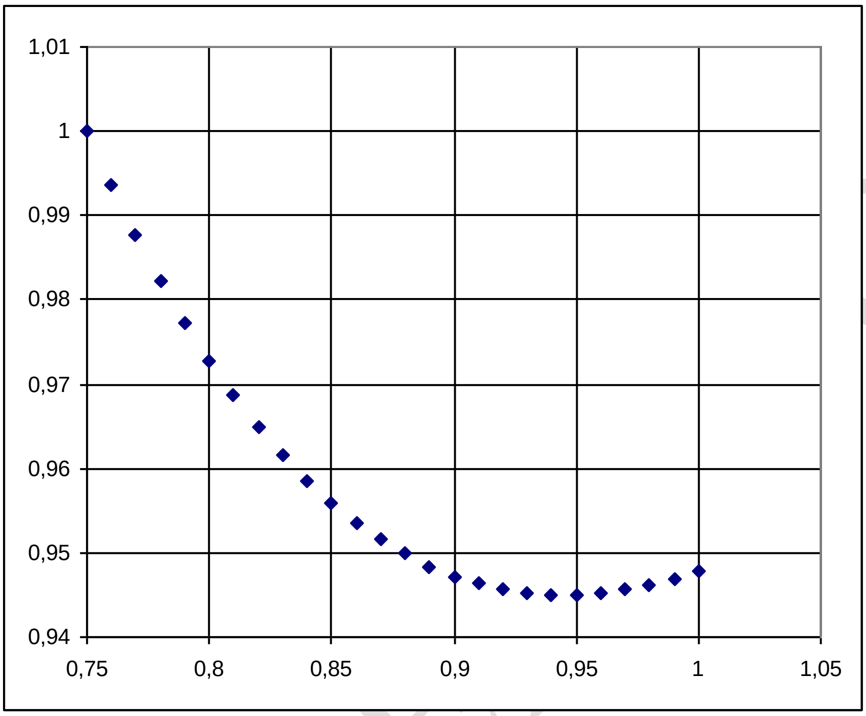
$$\Rightarrow\; x = R\sqrt[3]{\frac{27}{32}} = 0{,}945R$$

5) En la ecuación dos los valores extremos de x son ¾ R y R . Si en dicha ecuación damos un valor intermedio por ejemplo 0,80 R

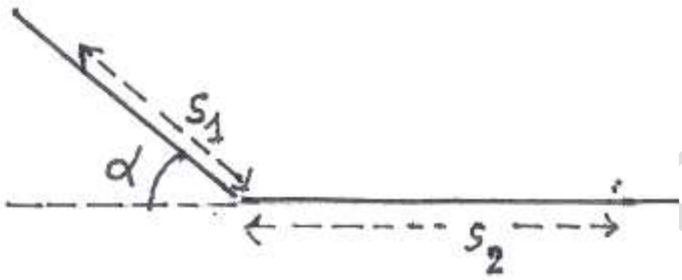
$$g_x = G\,\pi\rho\,\frac{\frac{9}{32}R^3 + \frac{2}{3}\,0{,}80^3R^3}{0{,}80^2\,R^2} = G\,\pi\rho R\,\frac{0{,}281 + 0{,}341}{0{,}512} = G\,\pi\rho R\;0{,}947$$

Como en el problema no se dan los valores de las constantes, la representación gráfica se hace con los valores numéricos. La curva obtenida nos da la forma en que $g_x$ varía en el manto, pero no su valor numérico, esto supone representar en el eje de abscisas los valores de x y en el de ordenadas

$$\frac{\frac{9}{32}+\frac{2}{3}x^{3}}{x^{2}}$$



***247 (656).-Un cuerpo de tamaño despreciable y masa m se desplaza a lo largo de un plano inclinado pariendo del reposo. La distancia entre la posición inicial y la final es $s_1$ (ver la figura). El ángulo de inclinación del plano es $\alpha$ y el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano es $k_1$. Al abandonar el plano inclinado el cuerpo se desplaza por un plano horizontal hasta pararse. La distancia recorrida es $s_2$ y el coeficiente de rozamiento $k_2$.En la transición del plano inclinado al horizontal no existe pérdida de energía.***




***a) Obtenga la dependencia de la distancia $s_2$ en función de $\alpha$, $s_1$, $k_1$ y $k_2$***

***b) Para una distancia constante $s_1$= 0,500 m se investiga la dependencia de $s_2$ del ángulo a del plano. Los resultados son:***

| $\alpha$/º | *15* | *20* | *25* | *30* | *35* | *40* | *45* | *50* | *55* | *60* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***$s_2$/cm*** | *8,0* | *19,5* | *30,3* | *40,6* | *51,0* | *61,4* | *70,5* | *79,9* | *88,3* | *95,5* |

***Obtenga a partir del resultado anterior una gráfica a partir de la cual determine los valores de los coeficientes de rozamiento.***

***c) Calcule al ángulo máximo para el cual el cuerpo está en reposo sobre el plano.***

***Olimpiada de Física Balcanes***

a) El cuerpo en la posición inicial está en reposo y tiene energía potencial, después de recorrer la distancia $s_1$, tiene energía cinética y ha realizado un trabajo de disipación de energía debido a la fuerza de rozamiento

$$m g s_1 \ \text{sen}\alpha = \frac{1}{2} m v_1^2 + k_1 m g \cos\alpha \cdot s_1 \quad \Rightarrow 2 g s_1 (\text{sen}\alpha - k_1 \cos\alpha) = v_1^2$$

Al no haber pérdida de energía la velocidad con la que empieza a recorrer el plano horizontal es $v_1$ y después de recorrer la distancia $s_2$ queda en reposo. La energía cinética inicial es igual al trabajo de rozamiento

$$\frac{1}{2}m v_1^2 = k_2 m g s_2 \Rightarrow \quad v_1^2 = 2 k_2 g s_2 \Rightarrow \quad 2 g s_1 (sen\alpha - k_1 \cos\alpha) \Rightarrow$$

$$s_2 = \frac{s_1 (sen\alpha - k_1 \cos\alpha)}{k_2}$$

*Una alternativa a la solución anterior*. Puesto que hay fuerzas de rozamiento (disipativas) y el móvil se acaba parando según el enunciado, se puede aplicar el principio de conservación de la energía. La variación de energía potencial es igual al trabajo efectuado contra las fuerzas de rozamiento, que como sabemos se oponen al movimiento.

$$\Delta E_p = W_{FR1} + W_{FR2} = N_1 \cdot k_1 \cdot s_1 \cdot \cos 180 + N_2 \cdot k_2 \cdot s_2 \cdot \cos 180$$

$$0 - mg \cdot s_1\ sen\alpha = -(mg \cdot \cos\alpha) k_1 \cdot s_1 - mg \cdot k_2 \cdot s_2$$

$$s_2 = \frac{s_1 (sen\ \alpha - k_1 \cos\alpha)}{k_2}$$

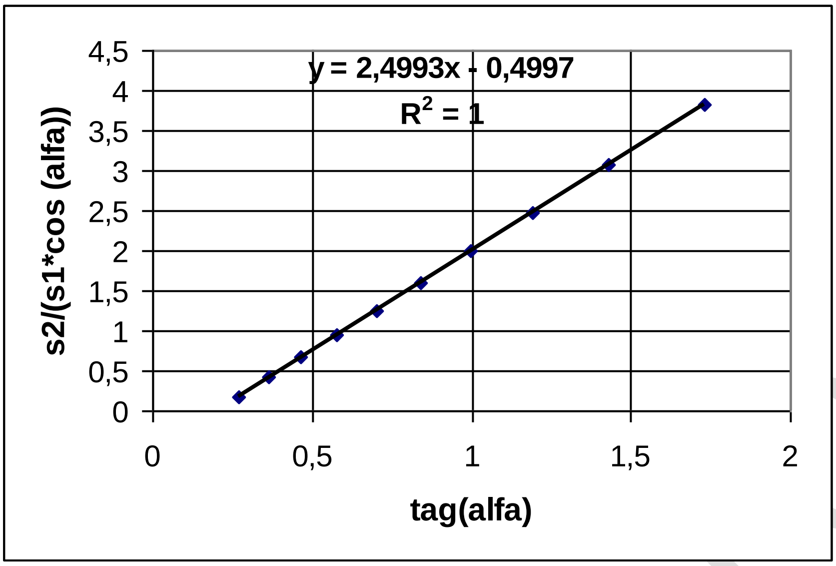
b)

$$s_2 k_2 = s_1 sen\alpha - s_1 k_1 \cos\alpha \Rightarrow \frac{s_2 k_2}{s_1 \cos\alpha} = tag\,\alpha - k_1 \Rightarrow \frac{s_2}{s_1 \cos\alpha} = \frac{1}{k_2} tag\,\alpha - \frac{k_1}{k_2} \text{(1)}$$

La ecuación de una recta es $y = m x + b$. Comparando esta ecuación con (1) resulta que al representar $\frac{s_2}{s_1 \cos\alpha}$ en el eje de ordenadas frente a tag α en el eje de abscisas se obtiene una recta cuya pendiente es $\frac{1}{k_2}$ y ordenada en el origen $-\frac{k_1}{k_2}$

**Para $s_1$ = 0,500 m**

| α/º | $s_2$/cm | α/rad | tag α/º | $s_2/(s_1 \cdot \cos\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 8 | 0,26179939 | 0,26794919 | 0,16564419 |
| 20 | 19,5 | 0,34906585 | 0,36397023 | 0,41502933 |
| 25 | 30,3 | 0,43633231 | 0,46630766 | 0,66864702 |
| 30 | 40,6 | 0,52359878 | 0,57735027 | 0,93761684 |
| 35 | 51 | 0,61086524 | 0,70020754 | 1,24519008 |
| 40 | 61,4 | 0,6981317 | 0,83909963 | 1,60304015 |
| 45 | 70,5 | 0,78539816 | 1 | 1,99404112 |
| 50 | 79,9 | 0,87266463 | 1,19175359 | 2,48604668 |
| 55 | 88,3 | 0,95993109 | 1,42814801 | 3,07892704 |
| 60 | 95,5 | 1,04719755 | 1,73205081 | 3,82 |




$$\frac{1}{k_2}=2{,}499\cong 2{,}5 \;\Rightarrow\; k_2=\frac{1}{2{,}5}=0{,}4 \qquad -\frac{k_1}{k_2}=-0{,}499\cong -0{,}5 \;\Rightarrow\; k_1=0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}2$$

c) El ángulo máximo supone que la fuerza de rozamiento es igual a la componente del peso sobre el plano

$$k_1 mg\cos\alpha_m = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha_m \;\Rightarrow\; \mathrm{tag}\,\alpha_m = k_1 = 0{,}2 \;\Rightarrow\; \alpha_m = 11{,}3^{o}$$

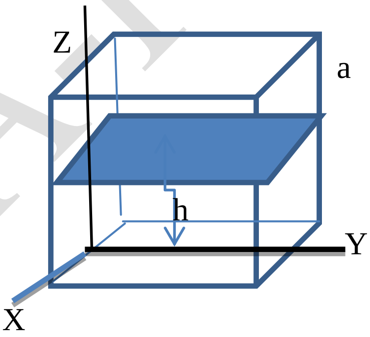
***248 (660).- Se ha vertido un líquido de masa M  y densidad $\rho$ en un recipiente con forma  de cubo de masa M y arista a. Sabiendo que el centro de masas del conjunto cubo líquido determina que la posición del cubo sea la más estable (esto supone que el centro de masas ocupa la posición más baja). Calcular la masa de líquido en función de M, a y $\rho$.***

***Olimpiadas de Física Estonia***

Consideramos unos ejes coordenados, tales que cuando Z=0 , la base del cubo está en el plano XY.

El centro de masa del cubo está a una altura Z= a/2. El líquido vertido  tiene una altura h y su centro de masas está a h/2 del plano XY. Ahora  h  es una variable cuyos valores están comprendidos entre cero y a.

El centro de masas  del conjunto cubo líquido tiene una coordenada  Z  vale:




$$Z_{CM}=\frac{M\frac{a}{2}+M_L\frac{h}{2}}{M+M_L}=\frac{M\frac{a}{2}+V_L\rho\frac{h}{2}}{M+V_L\rho}=\frac{M\frac{a}{2}+a^2h\rho\frac{h}{2}}{M+a^2h\rho}$$

Para determinar el valor de h, derivamos la función  $Z_{CM}$=  f(h) respecto a la variable h e igualamos a cero.

Para determinar el valor de h, derivamos la función  $Z_{CM}$=  f(h) respecto a la variable h e igualamos a cero.

$$\frac{dZ_{CM}}{dh}=\frac{(M+a^2h\rho)a^2\rho h-\left(M\frac{a}{2}+a^2\rho h^2\right)a^2\rho}{(M+a^2h\rho)^2}=0\ \Rightarrow (M+a^2h\rho)a^2\rho h=\left(M\frac{a}{2}+a^2\rho h^2\right)a^2\rho$$

$$\Rightarrow (M+a^2h\rho)h=M\frac{a}{2}+a^2\rho h^2\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}a^2\rho h^2+Mh-M\frac{a}{2}=0\ \Rightarrow\ a^2\rho h^2+2Mh-Ma=0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado

$$h=\frac{-2M\pm\sqrt{4M^2+4a^3\rho M}}{2a^2\rho}$$

La solución válida es la positiva

$$h=\frac{-2M+\sqrt{4M^2+4a^3\rho M}}{2a^2\rho}=\frac{-2M+2\sqrt{M^2\left(1+\dfrac{a^3\rho}{M}\right)}}{2a^2\rho}=\frac{-M+\sqrt{M^2\left(1+\dfrac{a^3\rho}{M}\right)}}{a^2\rho}\quad\Rightarrow$$

$$h=\frac{M\left(\sqrt{1+\dfrac{a^3\rho}{M}}-1\right)}{a^2\rho}$$

La masa de líquido es

$$M_L=V_L\rho=a^2h\rho=M\left(\sqrt{1+\dfrac{a^2\rho}{M}}-1\right)$$

***249 (667).- La densidad de una disolución salina varía con la profundidad h según la ley $\rho = \rho_o + \alpha h$, en la que $\rho_o$= 1 g/cm$^3$ y $\alpha$ = 0,01 g/cm$^4$. En esta disolución se introducen dos bolitas unidas entre sí por un hilo inextensible cuya longitud no permite que la distancia entre los centros de las bolitas pueda ser mayor que 5 cm. Los volúmenes de las bolitas son $V_1$=$V_2$= 1 cm$^3$ y sus masas $m_1$= 1,2 g y $m_2$= 1,4 g. Determinar el valor de h en el cual las bolitas están en equilibrio.***

***Del libro Problemas de Física. S. Kósel. Editorial MIR***

Cuando se alcance el equilibrio la bolita de menor peso estará a una profundidad menor que la de mayor peso. Al estar unidas por un hilo inextensible su distancia no puede ser mayor que 5 cm.
Calculamos el valor de h para cada bolita en el supuso de que el hilo no esté en tensión. En este caso las fuerzas que actúan sobre cada bolita son su peso y el empuje.

$$m_1 g = V_1 (\rho_o + \alpha h_1) g \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{\frac{m_1}{V_1} - \rho_o}{\alpha} = \frac{\frac{1{,}2}{1} - 1}{0{,}01} = 20\,\text{cm}$$

$$m_2 g = V_2 (\rho_o + \alpha h_2) g \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{\frac{m_2}{V_2} - \rho_o}{\alpha} = \frac{\frac{1{,}4}{1} - 1}{0{,}01} = 40\,\text{cm}$$

El resultado anterior nos dice que esta situación no es posible, ya que la distancia entre las bolitas es mayor que 5 cm, el hilo tiene tensión y esa tensión acercará a las bolitas hasta una distancia de 5 cm. La tensión actuará vertical y hacia abajo sobre la bolita 1 y vertical y hacia arriba sobre la bolita 2, por ser una pareja de acción-reacción en la cuerda.

Tomamos el sentido positivo de las fuerzas hacia arriba


Bolita 1

$$-m_1 g - T + V_1(\rho_o + \alpha h_1) g = 0 \quad \Rightarrow \quad T = V_1(\rho_o + \alpha h_1) g - m_1 g$$

Bolita 2

$$V_2(\rho_O+\alpha h_2)g+T-m_2g=0 \;\Rightarrow\quad T=m_2g-V_2(\rho_O+\alpha h_2)g$$

De ambas ecuaciones

$$V_1\,(\rho_o+\alpha h_1)-m_1=m_2-V_2\,(\rho_o+\alpha h_2)\Rightarrow m_1+m_2=V_1\,(\rho_o+\alpha h_1)+V_2\,(\rho_o+\alpha h_2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad m_1+m_2=\rho_o\,(V_1+V_2)+V_1\alpha h_1+V_2\alpha h_2\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad m_1+m_2-\rho_o\,(V_1+V_2)=V_1\,\alpha h_1+V_2\,\alpha\,(h_1+5)\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;h_1=\frac{m_1+m_2-\rho_o\,(V_1+V_2)-5V_2\,\alpha}{V_1\alpha+V_2\,\alpha}=\frac{2{,}6-1\cdot 2-5\cdot 0{,}01}{2\cdot 0{,}01}=27{,}5\,\mathrm{cm}\;;$$

$$h_2=27{,}5+5=32{,}5\,\mathrm{cm}$$

Es la profundidad a la que tiene lugar el equilibrio del sistema formado por las dos bolitas.