250**.- (650)- **Una masa m se lleva desde un lugar situado a R/2 por encima del centro de la Tierra hasta su superficie. El trabajo necesario se designa τ_1. Esa misma masa se lleva desde la superficie terrestre hasta una altura R/2 por encima de ella. Calcular la relación $\frac{\tau_1}{\tau_2}$. Suponer que la Tierra es una esfera homogénea de radio R.

Solución opción A.

El módulo de la intensidad del campo gravitatorio, que se deduce a partir del teorema de Gauss

$$g = G\frac{M}{x^2}$$

G es la constante de Gravitación Universal. Para una esfera, x es la distancia del lugar considerado medido desde el centro de la esfera y M es la masa encerada en una esfera concéntrica de radio x. Para los puntos interiores de la Tierra (considerada como una esfera uniforme y por tanto con densidad ρ constante

$$g_i = G\frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho}{x^2} = \frac{4}{3}G\pi\rho x$$

Según el problema x es una variable comprendida entre el punto de partida $x = R/2$ y $x = R$, esto significa que la intensidad del campo gravitatorio no es constante.. La fuerza que actúa sobre la masa m es

$$F = g_i\, m = \frac{4}{3}G\pi\rho m x$$

El trabajo para llevar esa m de un lugar x a uno x+dx vale

$$d\tau_1 = Fdx = \frac{4}{3}G\pi\rho m x\, dx$$

El trabajo total para llevar la masa m desde x= R/2 a R valle

$$\tau_1 = \int_{R/2}^{R}\frac{4}{3}G\pi\rho m x\, dx = \frac{4}{3}G\pi\rho m\left[\frac{x^2}{2}\right]_{R/2}^{R} = \frac{4}{3}G\pi\rho m\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{8}\right) = \frac{4}{3}G\pi\rho m\frac{3R^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tau_1 = \frac{1}{2}G\pi\rho m R^2$$

la densidad de la Tierra la ponemos en función de su masa y su radio $\rho = \dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} G\pi \frac{3M_T}{4\pi R^3} mR^2 = \frac{3}{8} G m \frac{M_T}{R}$$

La intensidad del campo gravitatorio para puntos situados entre x= R y $x = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$ vale

$$g_e = G\frac{M_T}{x^2} \quad \Rightarrow F = G\frac{M_T}{x^2} m$$

Puesto que cualquier esfera concéntrica de radio $x \geq R$ encierra la masa de la Tierra.

El trabajo para llevar esa m de un lugar x a uno x+dx vale

$$d\tau_2 = Fdx = G\frac{M_T\, m}{x^2} dx \quad \tau_2 = \int_R^{3R/2} G M_T m \frac{dx}{x^2} = G M_T m \left[-\frac{1}{x}\right]_R^{3R/2} = G M_T m\left(-\frac{2}{3R} + \frac{1}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \tau_2 = G M_T m \frac{1}{3R} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{3}{8} G m \frac{M_T}{R}}{G m \frac{M_T}{3R}} = \frac{9}{8}$$

Solución opción B

Otra alternativa para resolver este problema es emplear la definición de la energía potencial gravitatoria y después calcular el trabajo, como la variación de la energía potencial, puesto que el campo gravitatorio es conservativo.

Recordando que por aplicación del teorema de Gauss al campo gravitatorio se demuestra que el valor del módulo de la intensidad del campo gravitatorio g, para una esfera de masa M, radio R y densidad uniforme vale:

Para:

$$0 \leq r \leq R; \qquad g = G\frac{M}{R^3} r$$

$$R \leq r \leq \infty; \qquad g = G\frac{M}{r^2}$$

La energía potencial gravitatoria es una propiedad de la masa m, situada en el campo gravitatorio de la otra masa creadora del campo M. En un punto situado a una distancia r, medido desde el centro de la masa gravitatoria M (en nuestro caso esférica).viene dada por la integral.

$$U = -\int_r^{\infty} m \cdot g \;\, dr$$

En $r = R + \frac{R}{2}$; $U_{R+\frac{R}{2}} = -\int_{R+\frac{R}{2}}^{\infty} m \cdot g \; dr = -\int_{R+\frac{R}{2}}^{\infty} m \frac{GM}{r^2} dr = -\frac{2}{3}\frac{GmM}{R}$

En $r \geq R$;
$U_r = -\int_{r}^{\infty} m \cdot g \; dr = -\int_{r}^{\infty} m \frac{GM}{r^2} dr = -\frac{GmM}{r}$ [1]

$$En \;\; r = R \; ; \qquad U_R = -\frac{GMm}{R}$$

Para determinar la energía potencial en puntos interiores a la esfera, tenemos que considerar que la ecuación del campo gravitatorio dentro de la misa M, es distinta que fuera, de modo que hemos de llevar la masa m desde ese lugar hasta el infinito, que en nuestro caso es desde R/2 hasta el infinito.

Vamos a determinar la ecuación general para puntos tales que

$$0 \leq r \leq R; \quad U_r = -\int_{r}^{R} m \frac{GM}{R^3} r \, dr - \int_{R}^{\infty} m \frac{GM}{r^2} dr = \frac{-GMm}{2R^3}[R^2 - r^2] - \frac{GMm}{R}$$

$$U_r = \frac{GMm}{2R^3} r^2 - \frac{3GMm}{2R} \quad [2]$$

$$Para \;\; r = \frac{R}{2}; \qquad U_{\frac{R}{2}} = \frac{GMm}{2R^3}\frac{R^2}{4} - \frac{3GMm}{2R} = -\frac{11}{8}\frac{GMm}{R}$$

Para determinar el trabajo, recordemos que el trabajo realizado por la fuerza del campo desde un punto 1 hasta otro punto 2 es:

$$W_{1\rightarrow 2} = U_1 - U_2$$

De acuerdo con el enunciado, el trabajo $\tau 1$

$$\tau_1 = U_{\frac{R}{2}} - U_R = -\frac{11GMm}{8R} - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = -\frac{3GMm}{8R}$$

El trabajo τ_2

$$\tau_2 = U_R - U_{R+\frac{R}{2}} = -\frac{GMm}{R} - \left(-\frac{2}{3}\frac{GMm}{R}\right) = -\frac{GMm}{3R}$$

La relación entre los trabajos vale:

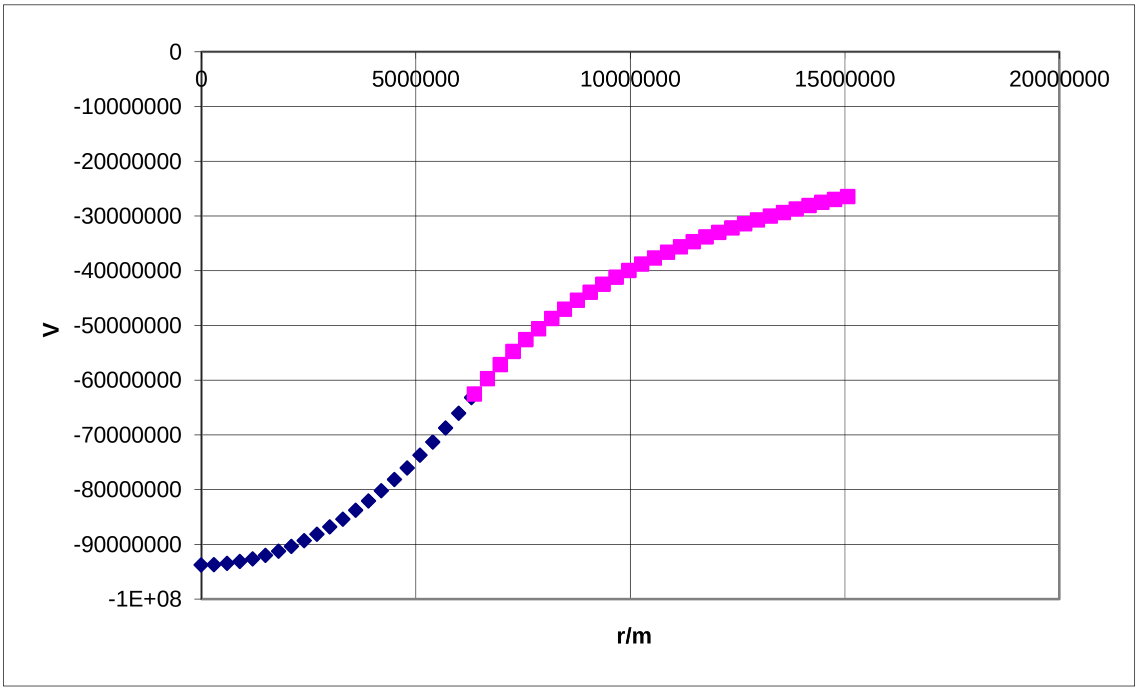
$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{-3GMm}{8R}}{\frac{-GMm}{3R}} = \frac{9}{8}$$

Ricardo David Fernández Cruz José Luis Hernández Pérez

Resulta interesante hacer una representación gráfica de como varía la energía potencial de la masa m, en función de la distancia al centro de la masa esférica creadora del campo gravitatorio, desde r = 0, hasta el infinito. Para esta finalidad y puesto que hay que usar datos numéricos para realizar la representación tomaremos:

$M = 6.10^{24}$ kg; $G = 6.67.10^{-11}$ $N.m^2/kg^2$ R = 6.370 km y daremos a m = 1 kg por comodidad, entonces la representación corresponderá con el potencial gravitatorio de la masa M, pero la forma de la función representada para la energía potencial es similar para cualquier masa, porque lo único que varía es la multiplicación por un factor constante que es m.

En definitiva, habremos de representar las ecuaciones [1] y [2] después de sustituir los valores numéricos desde r = 0 a r = R con la ecuación [2]; y también desde este valor, hasta valores de r muy grandes, teóricamente infinito, con la ecuación [1] donde veremos que asintóticamente el potencial gravitatorio tiende a cero. Si se hace así, se obtiene una gráfica como la de la figura. Se puede observar como el potencial va siendo menos negativo (por lo tanto mayor) a medida que la distancia va aumentando.



Podemos representar también otra gráfica de bastante interés, como es la de la variación del módulo del vector intensidad del campo gravitatorio "g" con la distancia al centro de la masa creadora del campo M y radio R.

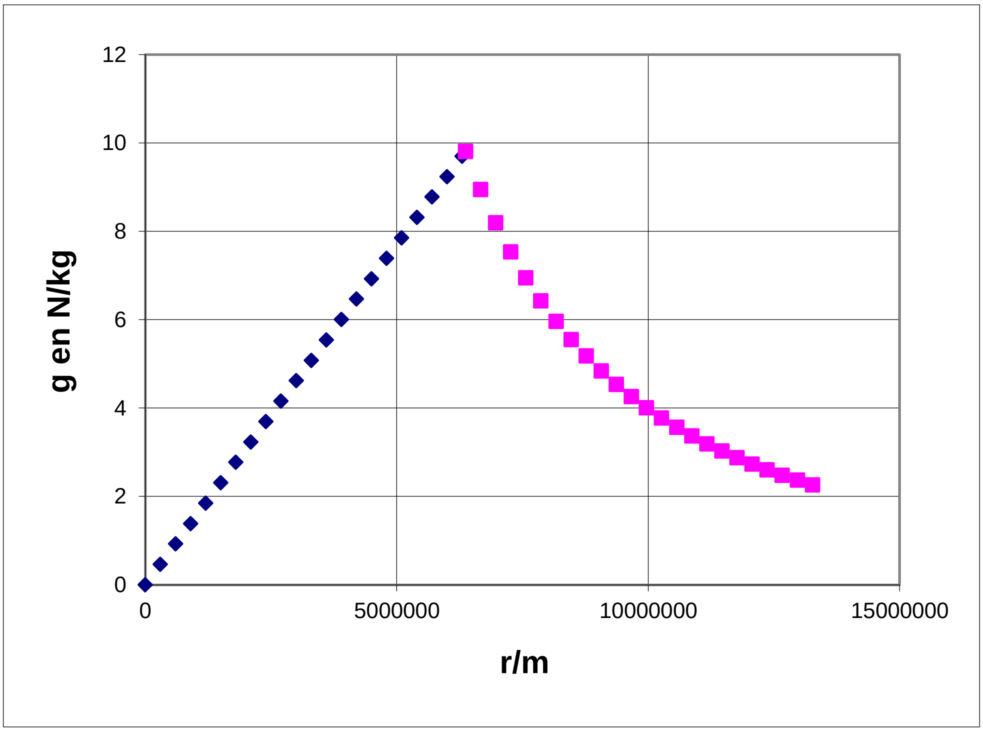
Las ecuaciones correspondientes son:

$$0 \leq r \leq R; \qquad g = G\frac{M}{R^3}r$$

$$R \leq r \leq \infty; \qquad g = G\frac{M}{r^2}$$

La primera aumenta linealmente con la distancia al centro y la segunda a partir de la superficie de la esfera y hacia el exterior, disminuye con el inverso del cuadrado de la distancia al centro.

Sustituyendo G, M y R por los valores antes indicados, podemos obtener con la ayuda de una hoja de cálculo la gráfica de la figura.



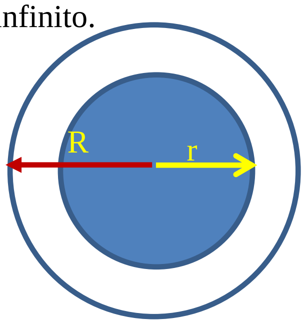
Observamos que la intensidad del campo gravitatorio toma su valor máximo en $R = 6.370.10^3$ m. Es decir en la superficie de la esfera terrestre.

Solución opción C

En realidad, cuando determinamos el potencial gravitatorio en un punto del campo, lo que se hace es calcular la diferencia de potencial entre un punto de referencia al que asignamos potencial gravitatorio cero y el del punto en cuestión.

A diferencia de las opciones anteriores, hay otra manera de calcular el trabajo. Consiste en tomar dos orígenes de referencia para el potencial. En el primero se toma el centro de la esfera con potencial cero. En el segundo, el potencial cero en el infinito.

Para $0 \leq r \leq R$ escogemos dentro de la esfera un volumen de radio r , la masa que abarca se designa con m. La masa de toda la esfera con M.



$m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho; \quad M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho \quad \rightarrow \quad \frac{m}{M} = \frac{4/3\pi r^3 \rho}{4/3\pi R^3\rho} = \frac{r^3}{R^3}\ ; \ \ g = \frac{Gm}{r^2} = \frac{GMr^3}{R^3r^2} = \frac{GM}{R^3} r$

Aplicado a la Tierra $g = \frac{GM_T}{R_T^3} r$

$$g = -\frac{dV}{dr} \quad \rightarrow \quad -\int dV = \int \frac{G\,M_T}{R_T^3}\, r\,dr \quad \rightarrow \quad -V = \frac{GM_T}{R_T^3}\frac{r^2}{2} + Cte$$

Para r = 0, asignamos al potencial el valor cero, V = 0 y la Cte = 0

Aplicamos la fórmula anterior a $R_T/2$ y R_T

$$-V_{\frac{R_T}{2}} = \frac{GM_T}{2R_T^3}\frac{R_T^2}{4} = \frac{GM_T}{8R_T} \quad : \quad -V_{R_T} = \frac{GM}{2R_T^3} R_T^2 = \frac{GM_T}{2R_T}$$

$$(\tau_1)_u = \frac{GM_T}{2R_T} - \frac{GM_T}{8R_T} = \frac{3GM_T}{8R_T} \qquad \boldsymbol{\tau_1 = \frac{3GM_Tm}{8R_T}}$$

Para r comprendido entre R_T y $3R_T/2$ (usamos la fórmula del potencial cuando el valor en el infinito es cero)

Potencial en R_T ; $V_{R_T} = -\frac{GM_T}{R_T}$,

Potencial en $3R_T/2$; $V_{\frac{3R_T}{2}} = -\frac{2}{3}\frac{GM_T}{R_T}$

$$(\tau_2)_u = \frac{2}{3}\frac{GM_T}{R_T} - \frac{GM_T}{R_T} = \frac{GM_T}{3R_T} \qquad \boldsymbol{\tau_2 = \frac{GM_Tm}{3R_T}}$$

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\frac{3GM_Tm}{8R_T}}{\frac{GM_Tm}{3R_T}} = \frac{9}{8}$$

Con lo que volvemos a encontrar la misma relación entre los trabajos.