SOLUCIONARIO

1.- Una partícula de masa m se acelera mediante la aplicación de fuerzas. Cuando la fuerza aplicada es de F=8 N la aceleración es 0,16 m/s^2, cuando F= 12 N la aceleración es 0,24 m/s^2 y cuando F = 22 N la aceleración es 0,44 m/s^2, se deduce que si se aplicase a la masa m una fuerza de F= 50 N la aceleración sería:

1) 5 m/s^2 2) 3 m/s^2 3) 2 m/s^2 4) 1 m/s^2

$$m=\frac{F}{a}=\frac{8}{0,16}=\frac{12}{0,24}=\frac{22}{0,44}=50\,\text{kg} \quad ; \quad a=\frac{F}{m}=\frac{50}{50}=1\frac{m}{s^2}$$ **Opción 4)**

2.- A una pelota de golf de masa m= 0,050 kg se le da un golpe y sale despedida con una velocidad de 70 m/s. Si el periodo de contacto del palo con la pelota ha sido 5.10^{-4} s, la fuerza media producida en la pelota ha sido

1) 2,5.10^5 N 2) 2,5.10^3 N 3) 7,0.10^3 N 4) 7,0.10^2 N

El impulso mecánico es igual a la variación de la cantidad de movimiento

$$F_m\Delta t=m\,\Delta v \;\Rightarrow\; F_m=\frac{m\,(v-0)}{t-0}=\frac{0,050\cdot 70}{5.10^{-4}}=7,0.10^3\,N$$ **Opción 3)**

3.- Una masa de 5,0 kg se acelera hasta alcanzar una velocidad de 60 m/s, si partió del reposo, la fuerza que actuó sobre ella es

1) 5,0 · 60 N 2) 5,0 · 60 · 9,81 3) $\frac{1}{2}5,0\cdot 60^2$ 4) Falta información

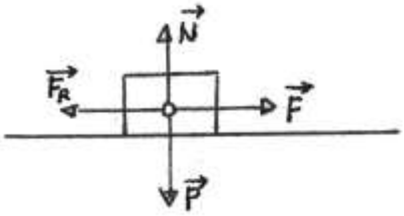
$F_m\Delta t=m\,\Delta v$ falta saber el tiempo de actuación de la fuerza **Opción 4**

4.- Un ladrillo de masa 5,0 kg está apoyado sobre un suelo horizontal, se le aplica una fuerza F paralela al suelo. Se determina que el ladrillo adquiere una velocidad constante debido a que el coeficiente de rozamiento entre suelo y ladrillo es 0,2. El módulo de la fuerza F es.

Dato : g = 10 m/s^2

1) 5,0 · 0,2 N 2) 0,2 · 10 N 3) 0,2 · 5,0 · 10 N 4) 0,5 ·10 N

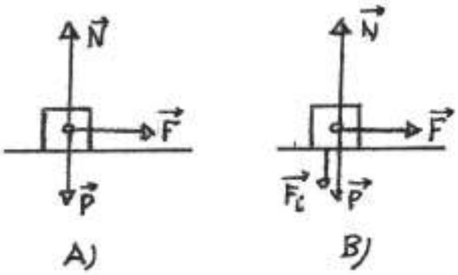
En la figura se representan las fuerzas que actúan sobre el ladrillo. Si éste se desplaza con velocidad uniforme, la suma vectorial de las fuerzas es cero, según el primer principio de la Dinámica. Luego para los módulos se cumple



$P = mg = N \;;\; F = F_R = \mu N = \mu\, m\, g = 0{,}2 \cdot 5{,}0 \cdot 10\ N$ **Opción 3)**

5.-Dentro de la cabina de un ascensor está situada una mesa horizontal y sobre ella una masa de m=3,0 kg. El ascensor está dotado de una aceleración vertical hacia arriba de a_a= 2 m/s^2. Entre la mesa y la masa, el rozamiento es despreciable. Si a la masa m se le aplica una fuerza F paralela a la mesa se logra una aceleración en dirección y sentido de la fuerza F, de módulo 2,5 m/s^2 .El módulo de F vale *Dato : g = 10 m/s^2* *1) 3 N 2) 6 3) 7,5 N 4) 9 N*

Analizamos el problema desde un sistema inercial, esto es, un sistema situado fuera del ascensor. Las fuerzas son las indicadas en la figura A)



$N - mg = m \cdot 2 \quad : \quad F = m\,a = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5\,N$

Para un observador situado en el sistema inercial la masa tiene dos aceleraciones una vertical y hacia arriba de a_a = 2m/s^2 y una horizontal de a = 2,5 m/s^2

Analizamos el problema desde un sistema no inercial que está situado dentro del ascensor. Las fuerzas son las indicadas en la figura B)
Fi es la llamada fuerza de inercia que es igual en módulo a la masa por la aceleración del ascensor pero actuando en sentido contrario. En nuestro caso vertical hacia abajo.
Mientras que la F según el enunciado, actúa horizontalmente produciendo una aceleración a

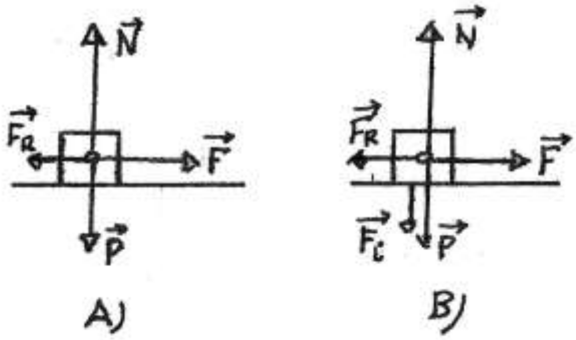
$$-(F_i + P) = 0\,; \qquad N - (m \cdot a_a + m \cdot g) = 0\;; \qquad F = m \cdot a = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5\ N$$

Para un observador situado dentro del ascensor la masa m se encuentra en reposo y tiene una aceleración horizontal de 2,5 m/s^2

Opción 3)

6) Si en la prueba anterior el coeficiente de rozamiento entre la masa m = 3,0 kg y la mesa vale 0,40, el módulo de la fuerza F paralela a la mesa que se necesita para imprimir una aceleración de 2,5 m/s^2 en la misma dirección y sentido que la fuerza vale.

1) 19, 3 N   2) 15 N   3) 21,9 N   4) 9,9 N



En la figura A) están representadas las fuerzas para el sistema inercial. Las ecuaciones son :

$$N - mg = m2 \quad ; \quad F - F_R = m\,a \;\Rightarrow\; F - \mu N = ma \;\Rightarrow$$

$$F = \mu N + ma = 0{,}40 \cdot (mg + m2) + m\,2{,}5 \;\Rightarrow \qquad a$$

$$F = 0{,}40 \cdot (3 \cdot 10 + 3 \cdot 2) + 3 \cdot 2{,}5 = 21{,}9\,N$$

Par el sistema no inercial, las fuerzas son las indicadas en la figura b). Las ecuaciones son

$$N - (F_i + P) = 0 \Rightarrow \quad N = F_i + mg \quad ; \quad F - F_R = m\,a \;\Rightarrow\; F - \mu N = ma \Rightarrow$$

$$F = \mu N + ma = \mu(F_i + mg) + ma = \mu\,(ma + mg) + ma = 0{,}40 \cdot (3 \cdot 2 + 3 \cdot 10) + 3 \cdot 2{,}5 = 21{,}9N$$

La cusa es que hay dos aceleraciones distintas y se llaman con la misma letra

$$N - (F_i + P) = 0; \qquad N = F_i + mg\,; \quad F - F_R = m \cdot a\,; \quad F - \mu N = m \cdot a$$

$$F = \mu N + m \cdot a = \mu(m \cdot a_a + mg) + m \cdot a = 0{,}40(3 \cdot 2 + 3 \cdot 10) + 3 \cdot 2{,}5 = 21{,}9N$$

La diferencia con el caso de la cuestión anterior (5) es el aumento de la fuerza aplicada.

Opción 3)

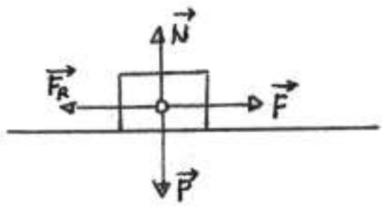
7) Un automóvil se desplaza por una carretera recta y horizontal con velocidad uniforme. Solamente una de las afirmaciones es correcta, indique cuál

1) La resultante de todas las fuerzas es cero

2) La fuerza impulsora es mayor que la de rozamiento

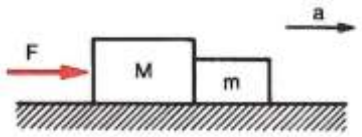
3) No existe ninguna fuerza sobre el automóvil excepto el peso del mismo

4) A velocidad constante la fuerza de rozamiento es nula



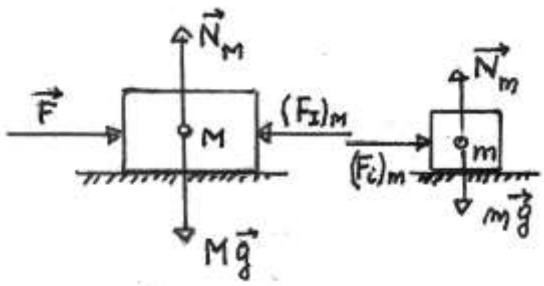
En la figura están las cuatro fuerzas que actúan sobre el automóvil $F = F_R$ y $N = P$. Según el principio fundamental de la Dinámica, un cuerpo va a velocidad constante cuando no actúa ninguna fuerza sobre él, o lo equivalente, que la suma de todas las fuerzas sea cero. La **opción correcta es 1)**

8.- Una fuerza horizontal F se aplica a los dos bloques de masas M y m respectivamente, La aceleración de los bloques es $\bar{a}$ y el rozamiento es despreciable. La fuerza que existe entre los dos bloques es



1) $\dfrac{m\,F}{M}$ 2) $\dfrac{mF}{M+m}$ 3) $\dfrac{mF}{M-m}$ 4) $\dfrac{M\,F}{M+m}$

Separamos los bloques y representamos las fuerzas que actúan sobre cada uno



Sobre el bloque M se cumple: $|\vec{N}_M| = |M\vec{g}|$; $F - (F_I)_M = M\,a$ (1)

Sobre el bloque m se cumple: $|\vec{N}_m| = |m\,\vec{g}|$; $(F_i)_m = m\,a$ (2)

$(\vec{F}_I)_M$ y $(\vec{F}_i)_m$ son dos fuerzas internas al sistema y representan la interacción entre los dos bloques. Son fuerzas de acción y reacción, por tanto, $(F_I)_M = (F_i)_m = F_C$

Despejamos a de la ecuación (2) y sustituimos en la (1)

$$F - F_C = M\frac{F_C}{m} \quad \Rightarrow F = F_C\left(1 + \frac{M}{m}\right) = F_C\left(\frac{M+m}{m}\right) \Rightarrow F_C = \frac{mF}{M+m}$$ **Opción 2)**

9.-Del techo de un ascensor pende un dinamómetro del que cuelga una masa m. El dinamómetro marca 10 N cuando el ascensor está en reposo. Si el ascensor sube con una aceleración constante de 2 m/s^2, la indicación del dinamómetro es: g= 10 m/s^2 *1) 8 N 2) 10 N 3) 12 N 14 N*

Analizamos el problema desde el sistema ligado al ascensor, Cuando el ascensor está en reposo el sistema elegido es inicial y el peso de la masa m es 10 N. Cuando el ascensor asciende con una aceleración constante de a= 2m/s^2 el sistema es no inercial y sobre la masa m actúa su peso y la fuerza de inercia en sentido vertical y hacia abajo, El dinamómetro indica la suma de las dos fuerzas:
La masa la obtenemos de la lectura del dinamómetro:

$$m = \frac{P}{g} = \frac{10\ N}{10\ m/s^2} = 1kg$$

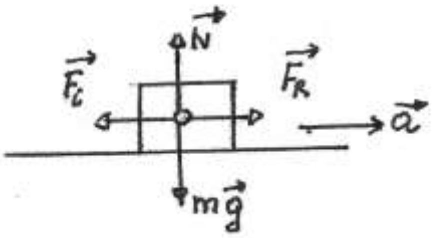
$$\cancel{10\ N + m\,a = 10\ N + 2\,m \Rightarrow 10 + 2\frac{10}{g} = 12\ N}$$

$$10N + m \cdot a = 10\ N + 1 \cdot 2\ N = 12\ N$$

Opción 3)

10) A un vagón se le comunica una aceleración a= 1m/s^2. Sobre su suelo hay un cuerpo de masa m = 2 kg. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el suelo del vagón es 0,2, el cuerpo se desplazará sobre el suelo del vagón a los *1) 2 s 2) 4 s 3) 6 s 4) Nunca se desplazará*

Analizamos el problema desde un sistema dentro del vagón, que es un sistema no inercial Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo están representadas en la figura.



La fuerza de inercia siempre de sentido contrario a la aceleración del vagón, vale:

$$F_I = m\,a = 2 \cdot 1 = 2\ N$$

El valor máximo de la fuerza de rozamiento vale

$$F_R\,(\text{max}) = \mu\, N = \mu\, m\, g = 0{,}2 \cdot 2 \cdot 9{,}8 = 3{,}92\,\text{N}$$

Al ser la fuerza de rozamiento máxima, mayor que la fuerza de inercia, la masa m no se desplazará respecto del suelo del vagón. Su valor se ajusta al de la fuerza de inercia, esto es, a la fuerza de rozamiento que vale 2 N. Para que la masa se mueva hacia la parte posterior del vagón la aceleración debe ser mayor que

$$3{,}92\ N \le m \cdot a; \qquad 3{,}92N \le 2\ kg \cdot a\,; \quad a \ge \frac{3{,}92\ N}{2\ kg} \ge 1{,}96\ \frac{m}{s^2}$$

$$\cancel{3{,}92 = 2\cdot a' \Rightarrow a' = 1{,}96\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \qquad \textbf{Opción 4)}$$

11) Una masa de 2 kg se cuelga de un dinamómetro y el conjunto de mueve hacia abajo con una aceleración de 1 m/s^2. La lectura del dinamómetro será. Tómese g= 10 m/s^2

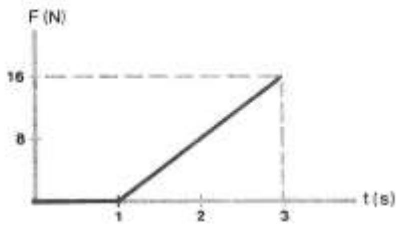
1) 10 N 2) 18 N 3) 20 N 4) 22 N

Desde el sistema no inercial unido al dinamómetro sobre la masa de 2 kg actúan su peso m·g en sentido vertical y hacia abajo y la fuerza de inercia m ·1m/s^2, en sentido vertical y hacia arriba, en sentido contrario a la aceleración del ascensor.

El dinamómetro indica la resultante de la suma vectorial de ambas fuerzas que en módulo es:

$$m\,g - m\,a = 2{\cdot}10 - 2{\cdot}1 = 18\,\text{N} \qquad \textbf{Opción 2)}$$

12) Sobre un cuerpo en reposo actúa una fuerza variable durante un cierto tiempo, tal como se observa en la figura. La cantidad de movimiento alcanzada por el cuerpo es



1) 16 Ns 2) 32 Ns 3) 40Ns 4) 48 Ns

El impulso mecánico de la fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento del cuerpo sobre el que actúa esa fuerza. En este caso el impulso es numéricamente igual al área comprendida entre la fuerza y el eje de los tiempos

$$I=\frac{(3-1)s\cdot(16-0)N}{2}=16\ N\cdot s=m\cdot\Delta v$$ $$\cancel{I=\frac{2\cdot 16}{2}=16\,N\cdot s=m\,\Delta v}$$ **Opción 1)**

13.- Una bola de masa 1 kg se nueve con una velocidad de 2m/s perpendicularmente a una pared. Rebota con una velocidad de 1,5 m/s en la misma dirección: La variación del módulo de la cantidad de movimiento de la bola expresada en unidades SI es:

1) cero 2) 0,5 3) 1,5 4) 3,5

La finalidad de esta prueba es reafirmar el carácter vectorial del vector cantidad de movimiento.

Cantidad de movimiento antes del choque con la pared $\vec{p}_A=m\,\vec{v}_A$

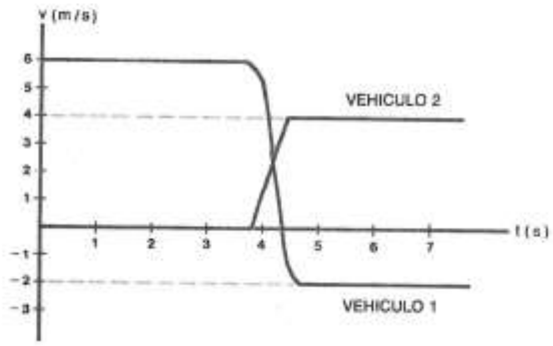
Cantidad de movimiento después del choque con la pared pues invierte el sentido. $\vec{p}_B=-m\,\vec{v}_B$

Variación de la cantidad de movimiento $\Delta\vec{P}=\vec{p}_B-\vec{p}_A=-m\,\vec{v}_B-m\,\vec{v}_A=-m(\vec{v}_B+\vec{v}_A)$

Módulo de la cantidad de movimiento $\Delta P=m(v_B+v_A)=1\cdot(1{,}5+2)=3{,}5\frac{kg\,m}{s}$

Opción 4)

14) La gráfica muestra cómo varían con el tiempo las velocidades de dos vehículos que se mueven en la misma línea recta. Los vehículos chocan elásticamente uno con el otro después de 4 segundos.



Si señalamos a los vehículos con los sufijos 1 y 2 y a sus masas m_1 y m_2 se deduce de la gráfíca que

1) $m_1 = 3\, m_2$ 2) $3\, m_1 = m_2$ 3) $2\, m_1 = m_2$ 4) $m_1 = 2\, m_2$

El vehículo 1 lleva una velocidad de 6 m/s antes del choque y el vehículo 2 esta en reposo. Sobre el sistema formado por los dos vehículos no actúan durante el choque fuerzas exteriores, por lo que se cumple la Conservación de la cantidad de movimiento. Obsérvese en la gráfica como el vehículo 1 cambia el sentido de su vector velocidad.

$$m_1 \cdot 6 + m_2 \cdot 0 = m_1 \cdot (-2) + m_2 \cdot 4 \;\Rightarrow\; 8 m_1 = 4 m_2 \;\Rightarrow\; 2 m_1 = m_2$$ **Opción 3)**

15.- Un proyectil de masa 0,1 kg se clava en una placa de madera de 9,9 kg. Si la bala y la placa se desplazan juntas inmediatamente con una velocidad de 1,2 m/s, la velocidad del proyectil antes del impacto era:

1) $\dfrac{10 \cdot 1{,}2}{0{,}1}\dfrac{m}{s}$ *2)* $\dfrac{9{,}9 \cdot 1{,}2}{0{,}1}\dfrac{m}{s}$ *3)* $\dfrac{0{,}1 \cdot 1{,}2}{10}\dfrac{m}{s}$ *4)* $\dfrac{0{,}1 \cdot 1{,}2}{9{,}9}\dfrac{m}{s}$

Se trata de un choque inelástico y las dos masas después del choque, se desplazan juntas con la misma velocidad.

La cantidad de movimiento antes del choque y después del choque es igual

$$m\,v = (m+M)\,v' \;\Rightarrow\; v = \frac{(m+M)\,v'}{m} = \frac{(0{,}1+9{,}9)1{,}2}{0{,}1} = \frac{10 \cdot 1{,}2}{0{,}1}\frac{kg\,m}{s}$$ **Opción 1)**

16.- La cantidad de movimiento de una partícula está dada por la ecuación $\vec{p} = 2t\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}$, siendo t el tiempo. A partir de sólo esta información podemos deducir:

1) La fuerza que actúa sobre la partícula *2) La masa de la partícula*

3) La velocidad de la partícula *4) La aceleración de la partícula*

$$\vec{p} = m\vec{v} \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$$ **Opción 1)**

A saber:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2t\vec{i} + 3t\vec{j}\right) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

17.- *El vector del c.d.m de un sistema de partículas viene dado por la expresión $\vec{r}_{CM} = 0{,}5t^2\,\vec{i} + 5t^2\,\vec{j}$ m. Se puede deducir que la fuerza exterior que actúa sobre el sistema de partículas es:*

1) Una fuerza constante *2) Una fuerza dependiente del tiempo*

3) Sobre el sistema de partículas no actúa ninguna fuerza

4) No hay información suficiente para saber si sobre el sistema actúa una fuerza

El c.d.m. de un sistema de partículas se mueve como si sobre él actuase la resultante de todas las fuerzas exteriores aplicadas al mismo. La ecuación fundamental de la dinámica de un sistema de partículas es

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2}$$

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = t\,\vec{i} + 10\,t\,\vec{j} \;;\; \frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2} = \vec{i} + 10\,\vec{j} \;\Rightarrow\; \sum \vec{F}_{ext} = M(\vec{i} + 10\,\vec{j})$$

Fuerza constante **Opción1**

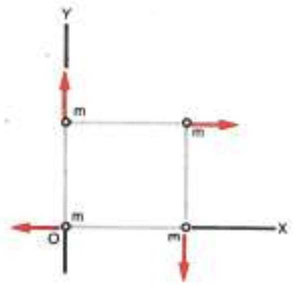
18.- Un sistema de partículas está formado por tres de ellas. Las cantidades de movimiento de dos de las partículas respecto del centro de masas son $\vec{p}_1 = 4\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{p}_2 = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, por tanto, la cantidad de movimiento de la tercera partícula respecto del centro de masas es:

1) $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1 - \vec{p}_2$ 2) $\vec{p}_3 = -\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ 3) $\vec{p}_3 = \vec{0}$ 4) Es imposible calcular $\vec{p}_3$

Para el sistema ligado al centro de masas del sistema, la cantidad de movimiento del ~~sistema~~ mismo es cero. Se cumple $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{p}_3 = -\vec{p}_1 - \vec{p}_2$

Opción 1)

19.- Un sistema de partículas está formado por cuatro partículas iguales que en el instante t=0 ocupan las posiciones indicadas en la figura. Sus vectores velocidades, para t=0, se han representado en la figura, siendo los módulos iguales. Sobre el sistema no actúan fuerzas exteriores



Podemos decir
1) El vector de posición del centro de masas es cero
2) El centro de masas se mueve a velocidad constante
3) La velocidad del centro de masas es cero
4) El centro de masas se desplaza con el tiempo y pude llegar a ocupar la posición O.

Ecuación fundamental de la dinámica de partículas $\sum \vec{F}_{ext} = M\,\vec{a}_{CM} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{0}$, Al ser cero el sumatorio de las fuerzas exteriores $\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \vec{0}$, la velocidad del centro de masas es cero o constante.

En la figura del enunciado, designamos con L la longitud del cuadrado, el centro de masas se determina por la ecuación:

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{masa\ total} = \frac{mL\vec{j} + mL\left(\vec{i}+\vec{j}\right) + mL\vec{i}}{4m} = \frac{L}{2}\vec{i} + \frac{L}{2}\vec{j}$$

está en el centro del cuadrado y sus coordenadas son $\frac{L}{2}\vec{i};\frac{L}{2}\vec{j}$.

Supongamos que un cierto tiempo después cada masa avanza un longitud L , las coordenadas de las cuatro masas comenzando por la situada en $(0, L\vec{j})$ y siguiendo en el sentido de las agujas del reloj son $(0,2L\vec{j});(2L\,\vec{i},L\vec{j});(L\vec{i},-L\vec{j});((-L\vec{i},0)$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m\,2L\vec{j} + m(2L\vec{i} + L\vec{j}) + m(L\vec{i} - L\vec{j}) + m(-L\vec{i})}{4m} = \frac{m\,2L\vec{j} + m2L\vec{i}}{4m} = \frac{L\vec{i}}{2} + \frac{L\vec{j}}{2}$$

Al pasar el tiempo el centro de masas está en el mismo lugar su velocidad es nula.

Opción 2)

20.-Un satélite describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra. En el punto más cercano se encuentra a 400 km y su velocidad es 18000 km/h. El punto más lejano está a 1600 km, siendo su velocidad expresada en km/h

1) $\dfrac{400 \cdot 18000}{1600}$ *2) 400 · 18000 · 1600* *3)* $\dfrac{400 \cdot 1600}{18000}$ *4)* $\dfrac{1600}{400 \cdot 18000}$

Como la fuerza gravitatoria es central, se produce la conservación del momento angular, cuyo módulo vale

$$mvr = Cte \;\Rightarrow\; m \cdot 400 \cdot 18000 = m \cdot 1600 \cdot v \;\Rightarrow v = \frac{400 \cdot 18000}{1600} \qquad \textbf{Opción 1)}$$

21.-Una partícula de masa m recorre una circunferencia de radio r, bajo la acción de una fuerza atractiva F= k/r^2 dirigida siempre al centro de la circunferencia. Con ℓ se representa el momento angular (cinético) respecto del centro de la circunferencia, el radio vale

1) $\dfrac{\ell}{m k^2}$ *2)* $\dfrac{\ell}{m k}$ *3)* $\dfrac{m k}{\ell^2}$ *4)* $\dfrac{\ell^2}{m k}$

$$\xcancel{\vec{\ell} = \vec{r} \times m\vec{v} \;\Rightarrow \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} + m\vec{v} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$$

El producto vectorial no es conmutativo.

$$\vec{l} = \vec{r} x m\vec{v} \;\rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} x \frac{d(m\vec{v})}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} x\, m\vec{v} = \vec{r} x \frac{d\vec{p}}{dt} + 0 = \vec{r} x \vec{F} = \vec{M}$$

En el anterior desarrollo el término: $\xcancel{m\vec{v} \times \dfrac{d\vec{r}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} = \vec{0}}$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} x\, m\vec{v} = \vec{v} x\, m\vec{v} = 0$$

ya que los vectores $m\vec{v}$ y $\vec{v}$ forman un ángulo de cero grados.

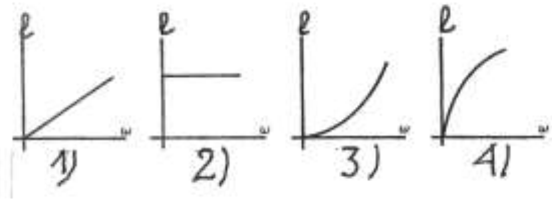
$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} = \vec{M}$, puesto que $\vec{r}$ y $\vec{F}$ forman un ángulo de 180º, la consecuencia es que el vector $\vec{\ell}$ es constante y lo es su módulo. $\ell = r\,m\,v \;\Rightarrow\; \ell^2 = r^2 m^2 v^2 \quad (1)$

El movimiento es circular y uniforme y la fuerza que actúa sobre el móvil es la fuerza centrípeta

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{k}{r^2} \;\Rightarrow mv^2 = \frac{k}{r} \quad (2).$$

Dividiendo (1) entre (2) $\dfrac{\ell^2}{\frac{k}{r}} = \dfrac{r^2 m^2 v^2}{m v^2} \Rightarrow \dfrac{\ell^2}{k} = r\,m \;\Rightarrow\; r = \dfrac{\ell^2}{k\,m}$ **Opción 4)**

22.-Una masa puntual m describe una circunferencia de radio R con un movimiento circular uniformemente acelerado. Si en el tiempo t=0 la velocidad de la masa es cero. señalar entre las siguientes opciones la que indica el módulo del momento angular de la masa m respecto del centro de la trayectoria frente a la velocidad angular



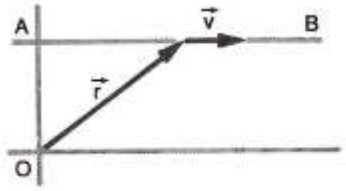
El módulo del momento angular es $\ell = R\,m\,v = R\,m\,\omega R = mR^2\omega$

La ecuación anterior es de primer grado, luego la ecuación al representar ℓ frene a ω, como m y R son constantes, se obtiene una línea recta que pasa por el origen y cuya pendiente es mR^2 **Opción 1)**

23) Una partícula de masa m recorre una circunferencia de radio R con velocidad angular constante. Entre las afirmaciones siguientes una es falsa, señale cuál
1) Sobre la partícula actúa una fuerza constante dirigida siempre hacia el centro de la trayectoria
2) El momento angular de la partícula respecto del centro de la trayectoria es cero
3) El momento de la fuerza centrípeta respecto del centro de la trayectoria es cero
4) El momento angular de la partícula respecto del centro de la trayectoria es constante y distinto de cero.

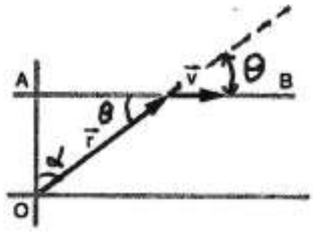
El momento angular es: $\vec{\ell} = \vec{R} \times m\vec{v}$, el vector $\vec{R}$ y el $m\,\vec{v}$ son perpendiculares por ser el vector velocidad siempre tangente a la trayectoria y perpendicular al radio, por tanto, su producto vectorial no puede ser nulo. **Opción 2)**

24) Una partícula de masa m se mueve recorriendo la trayectoria AB. Si la velocidad es constante, el momento angular de la partícula m respecto del punto O



1) Es constante
2) Aumenta al desplazarse la partícula
3) Disminuye al desplazarse la partícula
4) Es cero

En la figura inferior θ es el ángulo que forman entre sí los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$. Los ángulos θ y α son complementarios, el seno de uno es igual al coseno del otro

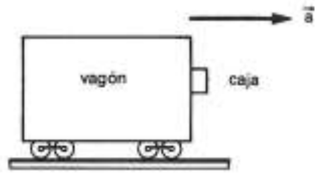


El módulo del momento angular es: $|\vec{\ell}| = |\vec{r}||m\vec{v}|\,\text{sen}\,\theta = |\vec{r}||m\vec{v}|\cos\alpha = |m\vec{v}|\cdot OA$

$|m\vec{v}|\cdot OA$ son iguales para cualquier punto de AB. El momento angular es constante.

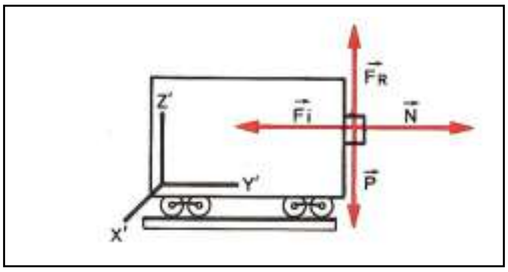
Opción 1)

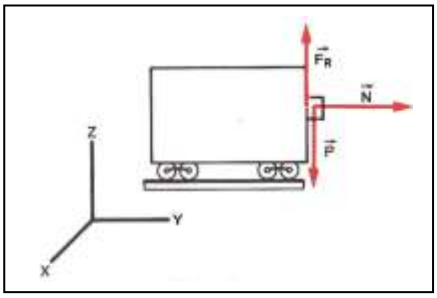
25) En la figura inferior el coeficiente de rozamiento entre el vagón y la caja es μ. El módulo de la aceleración mínima que determina que la caja esté pegada al vagón es



1) $a = g\,\mu$ *2)* $a = g\,\mu^2$ *3)* $a = \frac{g}{\mu}$ *4)* $a = \frac{g}{\mu^2}$

El sistema de referencia está en el vagón, por tanto, es un sistema no inercial. Las fuerzas que actúan sobre la caja son las de la figura A)





A) B)

Para el observador ligado al sistema X'Y'Z' por ser acelerado aparece una fuerza de inercia de sentido contrario a aceleración y de módulo $F_i = m \cdot a$, pero la caja está en reposo en este sistema de referencia y la suma vectorial de las fuerzas es nula

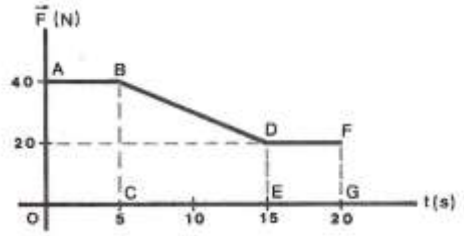
$$P = F_R = \mu N \quad ; \quad N = F_i = m a \quad \Rightarrow a = \frac{N}{m} = \frac{P}{\mu m} = \frac{m g}{\mu m} = \frac{g}{\mu}$$

Si el sistema de referencia está fuera del vagón es inercial figura B), por tanto, no aparece la fuerza de inercia. Para ese sistema la caja está acelerada debido a la fuerza N

$$P = F_R = \mu N \quad ; \quad N = m a \quad \Rightarrow a = \frac{N}{m} = \frac{P}{\mu m} = \frac{m g}{\mu m} = \frac{g}{\mu}$$

Opción 3)

26.-Sobre un cuerpo de masa 20 kg actúa una fuerza variable cuyo módulo está representado en la figura. Si para t=0 el cuerpo tiene una velocidad de 5 m/s, su velocidad a los 20 s es:



1) 20 m/s   2) 25 m/s   3) 30 m/s   4) 35 m/s

El impulso de una fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento del cuerpo sobre el que actúa la fuerza

$$\int_0^{20} F\,dt = \int_5^{v} m\,dv$$

Al ser la fuerza variable, la descomponemos en integrales en las que es constante durante el intervalo de tiempo.

$$\int_0^5 F \cdot dt + \int_5^{15} F \cdot dt + \int_{15}^{20} F \cdot dt = \int_5^{v} m \cdot dv$$

En la gráfica (F,t) el impulso, es el área de la gráfica, que al ser variable habremos de descomponerla en elementos con fuerza constante.

El valor numérico de la primera integral es el área comprendida entre la fuerza y el eje de los tiempos: área rectángulo ABCO

Para la segunda integral el área del trapecio BDEC.

Para la tercera integral el área del rectángulo DFGE

$$\int_0^{20} F\,dt = 5 \cdot 40 + \frac{40+20}{2} \cdot (15-5) + (20-15) \cdot 20 = 600\ N\,s = m\,v = 20.v \Rightarrow \quad v = 30\,\frac{m}{s}$$

Opción 3)

27) Un cuerpo de masa 10 kg posee una velocidad $\vec{v}_o = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ *en el tiempo t=0. Si sobre él actúa una fuerza* $\vec{F} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ *desde t= 0 a t= 3 s, el momento del cuerpo a los tres segundos es:*

1) $49\vec{i} - 56\vec{j} + 30\vec{k}$ *2)* $49\vec{i} + 56\vec{j} - 30\vec{k}$

3) $-49\vec{i} - 56\vec{j} - 30\vec{k}$ *4)* $12\vec{i} + 56\vec{j} - 6\vec{k}$

El impulso de una fuerza es igual a la variación de la cantidad de movimiento del cuerpo sobre el que actúa la fuerza.

Por tratarse de una fuerza constante.

$$\vec{F} \cdot (t - t_0) = \vec{p} - \vec{p_o}$$

$$(3\vec{i} - 2\vec{j}) \cdot (3 - 0) = \vec{p} - 10(4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k})$$

$$\vec{p} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 40\vec{i} - 50\vec{j} + 30\vec{k} = 49\vec{i} - 56\vec{j} + 30\vec{k}$$ **Opción 1)**

~~Calculamos el impulso de la fuerza~~ $\cancel{\int_0^3 (3\vec{i} - 2\vec{j})\,dt = \left|3t\vec{i} - 2t\vec{j}\right|_0^3 = 9\vec{i} - 6\vec{j}\ \mathrm{Ns}}$

~~Variación de la cantidad de movimiento~~ $\cancel{\vec{p}_3 - m\vec{v}_o = \vec{p}_3 - 10\cdot(4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k})}$

$\cancel{9\vec{i} - 6\vec{j} = \vec{p}_3 - 10\cdot(4\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}) \Rightarrow \vec{p}_3 = 49\vec{i} - 56\vec{j} + 30\vec{k}}$ ~~**Opción 2)**~~

28) Una masa de 5 kg está situada en el punto de coordenadas (3 , 4) y una segunda masa de 10 kg en el punto de coordenadas (-4 , -3), el centro de masas de este sistema vale

1) $1{,}67\vec{i} - 0{,}67\vec{j}$ 2) $0{,}67\vec{i} - 1{,}67\vec{j}$ 3) $-0{,}67\vec{i} + 1{,}67\vec{j}$ 4) $-1{,}67\vec{i} - 0{,}67\vec{j}$

$\boxed{)}$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{5\cdot(3\vec{i} + 4\vec{j}) + 10\cdot(-4\vec{i} - 3\vec{j})}{5 + 10} = \frac{-25\vec{i} - 10\vec{j}}{15} = -1{,}67\vec{i} - 0{,}67\vec{j}$$

Opción 4)

29) Tres cuerpos puntuales tienen las velocidades y masas siguientes $\vec{v}_1 = -3\vec{i}\ \mathrm{m/s},\ m_1 = 1\mathrm{kg}$ *;* $\vec{v}_2 = 5\vec{i}\ \mathrm{m/s},\ m_2 = 2\mathrm{kg}$ *;* $\vec{v}_3 = 2\vec{i}\ \mathrm{m/s},\ m_3 = 3\mathrm{kg}$

La velocidad del centro de masa de este sistema es:

1) $10\vec{i}\ \mathrm{m/s}$ *2)* $2{,}17\vec{i}\ \mathrm{m/s}$ *3)* $12{,}16\vec{i}\ \mathrm{m/s}$ *4)* $4\vec{i}\ \mathrm{m/s}$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{-3\vec{i} + 10\vec{i} + 6\vec{i}}{1 + 2 + 3} = 2{,}17\vec{i}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$ **Opción 2)**

30) *El vector de posición de una partícula de masa m= 5 kg esta dado por la expresión* $\vec{r} = 3t^2\,\vec{i} + 2\,t\,\vec{j}$ m *respecto del sistema de referencia OXYZ. El momento cinético de la partícula respecto del origen del sistema es;*

1) $60\,\vec{k}\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$ *2)* $-30\ t\ \vec{k}\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$

3) $-30\,t^2\ \vec{k}\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$ *4)* $-30\,t^3\ \vec{k}\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$

Cálculo de $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d(3t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j})}{dt} = 6t\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times m\,\vec{v} = (3t^2\,\vec{i} + 2t\,\vec{j}) \times (30\,t\,\vec{i} + 10\,\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3t^2 & 2\,t & 0 \\ 30\,t & 10 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2t & 0 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3\,t^2 & 0 \\ 30\,t & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3t^2 & 2t \\ 30\,t & 10 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\ell} = \vec{k}\,(3t^2 \cdot 10) + \vec{k}(-2\,t \cdot 30\,t) = 30\,t^2\,\vec{k} - 60\,t^2\,k = -30\,t^2\,\vec{k}\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

Opción 2)